

EPL - SESSION 2010 CORRIGÉ

Mouvement d'un satellite.

1. La vitesse du satellite sur son orbite circulaire de rayon $(h + R_T)$ est :

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R_T + h}} = 7,8 \text{ km.s}^{-1}$$

2. Sa période sur cette orbite est, d'après la troisième loi de Képler :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{\mathcal{G} M_T}} = 2\pi \frac{R_T + h}{v} = 5325 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 29 \text{ min}$$

3. Cette variation d'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$\Delta E_p = \mathcal{G} m M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

4. L'énergie cinétique du satellite lorsqu'il est niveau du sol à Kourou est :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m R_T^2 \Omega_T^2 = \frac{2\pi^2 m R_T^2}{T_0^2}$$

Lorsque le satellite est sur son orbite circulaire il a une énergie cinétique :

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\mathcal{G} m M_T}{2(R_T + h)}$$

La variation de l'énergie cinétique du satellite entre ces deux positions est donc :

$$\Delta E_c = \frac{\mathcal{G} m M_T}{2(R_T + h)} - \frac{2\pi^2 m R_T^2}{T_0^2}$$

5. La variation d'énergie mécanique du satellite entre les deux positions citées est :

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_c = \frac{\mathcal{G} m M_T}{2} \left(\frac{2}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right) - \frac{2\pi^2 m R_T^2}{T_0^2} = 135 \text{ GJ}$$

6. S'il y a des frottements l'énergie mécanique du satellite diminue au cours du temps $\left(\frac{dE_m}{dt} < 0 \right)$.

Comme le mouvement circulaire est peu perturbé on peut admettre que l'on a toujours, entre les énergies,

la relation $E_m = E_p + E_c = -E_c = \frac{1}{2} E_p$. Il en résulte que :

l'énergie cinétique, donc la vitesse, augmente ;

l'énergie potentielle, donc l'altitude, diminue.

Électrocinétique.

7. En régime établi :

le courant est nul dans le condensateur, $i_c = C \frac{du_c}{dt} = 0$, qui se comporte comme un interrupteur ouvert ;

la tension est nulle aux bornes de l'inductance pure, $u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$, qui se comporte comme un interrupteur fermé.

Il en résulte que $u_{R2} = u_L = 0$ donc :

$$u_{R_1} = u_C = E$$

8. Compte tenu que $u_{R_2} = u_L = 0$ on en déduit, toujours en régime établi, que la puissance reçue par le résistor R_2 est :

$$P_{R_2} = u_{R_2} i_{R_2} = 0$$

9. Lorsque le régime permanent est établi dans le circuit on ouvre l'interrupteur K. Les circuits (R_1, C) et (R_2, L) vont évoluer de indépendamment l'un de l'autre.

L'énergie emmagasinée dans le condensateur ó sous forme de champ électrique ó va se dissiper, par effet Joule, dans le résistor R_1 .

L'énergie emmagasinée dans la bobine ó sous forme de champ magnétique ó va se dissiper, par effet Joule, dans le résistor R_2 .

Ainsi dans ce dernier cas nous avons $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -R_2 i_L(t)$ ce qui nous conduit à l'équation différentielle en $u_L(t)$:

$$u_L(t) + \frac{L}{R_2} \frac{du_L(t)}{dt} = 0$$

$u_L(t)$ diminue exponentiellement au cours du temps avec une durée caractéristique $\tau_L = L/R_2$.

10. La continuité de l'énergie magnétique dans la bobine impose la continuité de l'intensité du courant soit $i_L(0^-) = \frac{E}{R_1} = i_L(0^+)$. On en déduit donc :

$$u_L(0^+) = -R_2 i_L(0^+) = -\frac{R_2}{R_1} E$$

Il y a discontinuité de la tension aux bornes de L à l'instant $t = 0$ puisque $u_L(0^-) = 0$.

11. Au cours du régime transitoire l'énergie contenue dans le condensateur passe de la valeur initiale $\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} CE^2$ à la valeur finale $\mathcal{E}_f = 0$. L'énergie reçue par le condensateur est donc :

$$\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = -CE^2/2$$

12. Quand $\omega \rightarrow 0^+$ on a $|Z_C| \rightarrow +\infty$ et $|Z_L| \rightarrow 0$ d'où $u_L(t) \rightarrow 0$.

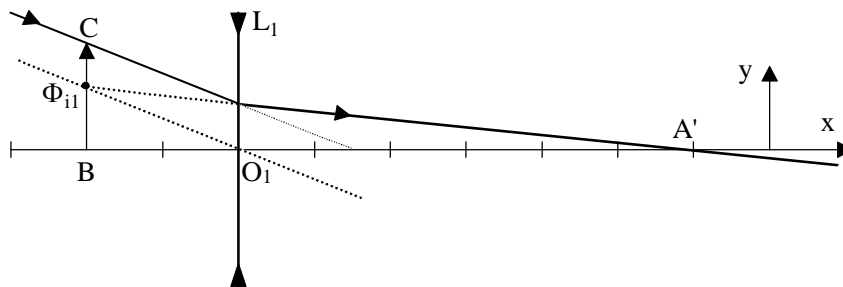
Quand $\omega \rightarrow +\infty$ on a $|Z_L| \rightarrow +\infty$ et $|Z_C| \rightarrow 0$ d'où $u_L(t) \rightarrow e(t)$.

Le circuit se comporte comme un **filtre passe-haut**.

Optique géométrique.

13. Un faisceau parallèle incident qui arrive sur une lentille mince convergente sous une incidence non nulle donne un faisceau émergent divergent ; les prolongements ó virtuels ó des rayons émergents se coupent en un foyer image secondaire Φ_{ii} . La distance entre le plan focal image ó virtuel - et la lentille nous donne sa distance focale $f'_1 < 0$.

Il suffit d'effectuer la construction ci-dessous.



On obtient alors :

$$\boxed{f'_1 = -10\text{cm}}$$

On observe que l'objet BC est dans le plan focal image de la lentille.

14. On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'_1}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\overline{O_1A} = \frac{f'_1 \cdot \overline{O_1A'}}{f'_1 - \overline{O_1A'}} = 7,5\text{cm}}$$

15. Toujours avec la relation de conjugaison des Descartes on obtient :

$$\boxed{\overline{O_1B'} = \frac{f'_1 \cdot \overline{O_1B}}{f'_1 + \overline{O_1B}} = -5\text{cm}}$$

16. Le grandissement transversal est défini par $G_t = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{O_1B'}}{\overline{O_1B}}$, on en déduit la taille de l'image :

$$\boxed{|\overline{B'C'}| = \left| \overline{BC} \frac{\overline{O_1B'}}{\overline{O_1B}} \right| = 7,5\text{cm}}$$

Cette image est virtuelle et droite.

17. B' et B'' = A' sont conjugués à travers L₂, soit :

$$-\frac{1}{\overline{O_2B'}} + \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2}$$

avec $\overline{O_2B'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1B'}$ et $\overline{O_2A'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'}$.

On en déduit l'équation du second degré :

$$\overline{O_1O_2}^2 + (\overline{O_1B'} + \overline{O_1A'})\overline{O_1O_2} + \overline{O_1B'}\overline{O_1A'} + f'_2(\overline{O_1A'} - \overline{O_1B'}) = 0$$

soit numériquement (en cm) :

$$\overline{O_1O_2}^2 - 25\overline{O_1O_2} + 112,5 = 0$$

dont les solutions sont :

$$\boxed{\overline{O_1O_2} = \begin{cases} 5,9\text{cm} \\ 19,1\text{cm} \end{cases}}$$

18. On a $|\overline{B''C''}| = |G_{t1}G_{t2}\overline{BC}|$ avec :

$$G_{t1} = \frac{\overline{O_1B'}}{\overline{O_1B}} = 0,5 \quad \text{et} \quad G_{t2} = \frac{\overline{O_2B''}}{\overline{O_2B'}} = \frac{\overline{O_1A'} - \overline{O_1O_2}}{\overline{O_1B'} - \overline{O_1O_2}} = \begin{cases} -2,2 \\ -0,45 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{|\overline{B''C''}| = \begin{cases} 16,5\text{cm} \\ 3,4\text{cm} \end{cases}}$$

Dans les deux cas l'image est réelle et renversée.

Statique des fluides.

19. L'équilibre du glaçon se traduit par $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ avec :

$$\text{poids du glaçon } \vec{P} = \rho_{\text{gl}} V_0 \vec{g}$$

$$\text{poussée d'Archimède } \vec{\Pi} = -\rho_{\text{liq}} V_{\text{im}} \vec{g}$$

On ne tient pas compte de la poussée due à l'air car $\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{liq}}$.

Il en résulte que :

$$V_{\text{im}} = \frac{\rho_{\text{liq}}}{\rho_{\text{gl}}} V_0 = 13,8 \text{ cm}^3$$

20. L'eau issue de la fonte du glaçon va occuper un volume : $V_{\text{liq}} = \frac{\rho_{\text{liq}}}{\rho_{\text{gl}}} V_0 = V_{\text{im}}$. Le niveau de liquide dans le récipient ne varie donc pas, soit :

$$h_1 - h_0 = 0$$

21. Dans ce cas nous avons $V'_{\text{im}} < V_{\text{im}}$ car la masse volumique de l'eau de mer est supérieure à celle de l'eau pure. Ainsi, après la fonte du glaçon la masse d'eau augmente alors que la masse de sel reste constante. Il en résulte que :

la masse volumique de l'eau salée diminue ;
le niveau de liquide dans le récipient augmente.

22. Dans ce cas l'équilibre du "glaçon composé" se traduit par :

$$\rho_{\text{gl}} (V_0 - V_{\text{liege}}) + \rho_{\text{liege}} V_{\text{liege}} = \rho_{\text{liq}} V_{\text{im}}$$

On en déduit le rapport :

$$\frac{V_{\text{em}}}{V_0} = 1 - \frac{V_{\text{im}}}{V_0} = 1 - \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{liq}}} + \left(\frac{\rho_{\text{gl}} - \rho_{\text{liege}}}{\rho_{\text{liq}}} \right) \frac{V_{\text{liege}}}{V_0} = 0,22$$

soit 22%.

23. Comme à la question 21 le volume de liquide dans le récipient ne varie pas, soit :

$$h_2 - h_0 = 0$$

24. Pour que l'ensemble (glaçon + bille) flotte il faut que $V_{\text{im}} \leq V_0$. Or, dans cette situation l'équilibre du corps flottant se traduit par :

$$\rho_{\text{gl}} (V_0 - V_{\text{Al}}) + \rho_{\text{Al}} V_{\text{Al}} = \rho_{\text{liq}} V_{\text{im}}$$

On en déduit :

$$V_{\text{Al}} \leq (V_{\text{Al}})_{\text{max}} = \frac{\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{gl}}} V_0 = 0,7 \text{ cm}^3$$

Thermodynamique : changement d'état.

25. La zone (1) correspond à l'état liquide et la zone (2) à l'état gazeux. A est le point triple et B le point critique.

26. Si on suppose que dans l'état initial l'eau est uniquement sous forme de vapeur la pression dans l'enceinte est alors :

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V} = 0,77 \text{ bar}$$

On observe que $P_1 < P_{\text{sat}}(T_1)$ ce qui confirme notre hypothèse.

27. Si on diminue la température du thermostat, le volume de l'enceinte étant constant, une partie de la vapeur d'eau va se liquéfier. Des deux relations de conservations :

$$m = m_L + m_V \quad \text{et} \quad V = mv = m_L v_L + m_V v_V$$

on déduit le titre en vapeur d'eau dans l'état final :

$$x_V = \frac{m_V}{m} = \frac{v - v_L}{v_V - v_L}$$

Or $v_L \ll v_V$ ce qui nous conduit à :

$$x_V \approx \frac{v}{v_V} = \frac{P_{\text{sat}}(T_2) V}{nRT_2} = 0,68 \text{ soit } 68\%$$

28. Pour déterminer ΔH on utilise la propriété fondamentale des fonctions d'état : leur variation le long d'un chemin ne dépend que des états initial et final. On imagine donc un chemin fictif que l'on peut décomposer en :

une liquéfaction de $n(1 - x_v)$ mole de vapeur d'eau à la température T_1 ;

un refroidissement de l'eau liquide et de la vapeur d'eau de T_1 à T_2 .

Il en résulte une variation d'enthalpie :

$$\Delta H = n(1 - x_v) \left[-\Delta H_{\text{vap}} + C_L (T_2 - T_1) \right] + n x_v \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = -1,41 \text{ kJ}$$

Remarque. Ne pas oublier qu'un gaz parfait suit la deuxième loi de Joule.

29. L'eau est placée dans un récipient de volume invariable. Il n'y a pas d'échange de travail, l'eau reçoit la quantité de chaleur :

$$Q = \Delta U$$

En utilisant le même chemin que précédemment il vient :

$$Q = \Delta U = \Delta H - n x_v R (T_2 - T_1) = -1,4 \text{ kJ}$$

30. On abaisse la température du thermostat de manière quasi-instantanée et on attend l'établissement de l'équilibre thermique : la transformation est irréversible donc l'entropie de l'Univers augmente.

Le refroidissement de l'enceinte close, avec formation d'eau liquide, entraîne une diminution de l'entropie de l'eau.

Électrostatique.

31. La distribution uniforme de charge est à symétrie sphérique donc le champ électrique créé en un point $M(r, \theta, \varphi)$ de l'espace est de la forme $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Rappel.

Toute rotation autour d'un axe passant par O_1 laisse la distribution de charge invariante donc le champ électrique créé en $M(r, \theta, \varphi)$ ne dépend que de la distance r de O_1 à M , soit $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

Tout plan contenant O_1 est plan de symétrie pour cette distribution de charge, le champ électrique, vecteur vrai appartient à ces plans de symétrie donc à leur intersection. Le champ électrique est donc radial de la forme $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Pour déterminer ce champ à l'intérieur de la sphère on utilise le théorème de Gauss appliqué à une surface sphérique de centre O_1 et de rayon $r < R$. Il vient :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

d'où on déduit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \overline{O_1 M}$$

32. Si le point M se trouve à l'extérieur de la sphère, le théorème de Gauss appliqué à une surface sphérique de centre O_1 et de rayon $r > R$ se traduit par :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho_e}{\epsilon_0} + 4\pi R^2 \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$\vec{E}(M) = \left(\frac{R^3 \rho_e}{3} + R^2 \sigma_e \right) \frac{\vec{e}_r}{\epsilon_0 r^2} = \left(\frac{R^3 \rho_e}{3\epsilon_0} + \frac{R^2 \sigma_e}{\epsilon_0} \right) \frac{\overline{O_1 M}}{\|\overline{O_1 M}\|^3}$$

33. Il suffit d'utiliser les correspondances suivantes :

$$\rho_e \rightarrow \rho_m, \quad \sigma_e \rightarrow \sigma_m, \quad \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow -4\pi \mathcal{G}$$

Ainsi l'intensité du champ de gravitation à la surface d'une planète sphérique de rayon R , de masse volumique uniforme ρ_m , présentant une croûte de masse surfacique σ_m , est :

$$g_0 = 4\pi G \left(\frac{R\rho_m}{3} + \sigma_m \right)$$

34. La neutralité électrique de la distribution totale impose :

$$q = -\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_e - 4\pi R^2 \sigma_e$$

Attention, dans l'énoncé l'indice e a été remplacé par 0.

35. Soit M_1 un point de l'axe O_1z tel que $\|\overline{O_1M_1}\| = r \gg a = \|\overline{O_1O_2}\| > R$. On peut donc considérer que

le champ électrique en M_1 est celui d'un dipôle de moment $\vec{p} = qa \frac{\overline{O_1O_2}}{\|\overline{O_1O_2}\|}$, soit :

$$\vec{E}(M_1) = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\overline{O_1O_2}}{\|\overline{O_1O_2}\|}$$

36. On prend maintenant un point M_2 de l'axe O_1y tel que $\|\overline{O_1M_2}\| = r \gg a = \|\overline{O_1O_2}\| > R$ (*confusion dans l'énoncé entre y et r*). Le champ électrique créé en ce point par le dipôle est alors :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\overline{O_1O_2}}{\|\overline{O_1O_2}\|}$$

Remarques.

a) Un dipôle électrostatique, de moment dipolaire \vec{p} , placé en un point O crée, en un point M tel que $\overline{OM} = \vec{r}$ ($r = \|\vec{r}\| \gg$ dimension du dipôle), un champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

b) M_1 et M_2 correspondent aux deux positions de Gauss $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

~::~::~~