Propagation d'une onde de choc

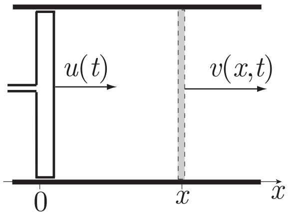
On se propose d'étudier la propagation d'une " onde de choc " dans un tuyau cylindrique (axe Ox, section S), due à une secousse produite sur un piston mobile dans le tuyau. On désigne respectivement par P_0 et ρ la pression et la masse volumique de l'air du tuyau lorsqu'il est à l'équilibre et par $p(x,t)$ la surpression résultant de la présence d'une onde acoustique. On considère que les mouvements du fluide dus aux ondes acoustiques sont suffisamment rapides pour être isentropiques, dans la mesure où l'on néglige à la fois les frottements et les échanges thermiques entre les tranches de fluide. On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique χ du fluide est défini par $\chi = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\delta V}{\delta P}$, où δV est une petite variation du volume de fluide et δP la variation correspondante de la pression dans le fluide.
A l'approximation acoustique, on considère que toutes les perturbations du fluide sont petites et en particulier que $p \ll P_0$, de plus, χ peut être considéré comme une constante.

1) Donner l'équation de propagation vérifiée par la vitesse $v(x,t)$ de l'élément de fluide d'abscisse x. Comment la célérité des ondes acoustiques c s'exprime-t-elle en fonction des constantes caractéristiques du fluide ? Rappeler quelle est la forme de la solution générale de cette équation de d'Alembert. Comment s'interprètent chacun des deux termes de cette solution ?

2) L'air du tuyau est refroidi à $-50°$ C de sorte que, la pression atmosphérique d'équilibre restant égale à $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa, sa masse volumique à l'équilibre est alors $\rho = 1,86\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
L'air peut être considéré comme parfait et ses transformations isentropiques suivent donc la loi de Laplace $PV^\gamma = \mathrm{cte}$.
Calculer χ et en déduire l'expression de c en fonction des données.
Calculer la valeur numérique de c à 1% près (on pourra faire un développement limité numérique) sachant que $\gamma = 5/3$ pour l'air.

3) Newton pensait que les transformations de l'air sous l'effet des ondes acoustiques étaient isothermes. Quelle serait, à 5% près, la valeur numérique c' obtenue dans cette hypothèse pour la célérité ?

4) A l'instant $t = 0$, un piston placé en $x = 0$ est lancé avec la vitesse u_0 dans l'air initialement à l'équilibre.
Son mouvement ultérieur est brutalement amorti, de sorte que la vitesse du piston suit la loi exponentielle $u = u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
Quelle est l'onde progressive $v(x,t)$ engendrée vers les x croissants par le mouvement du piston ?



5) Rappeler la définition et l'expression de l'impédance caractéristique du fluide. En déduire l'onde de pression acoustique $p\,(x,t)$ et représenter le graphe de $p\,(x,t)$ à un instant t donné ($t > 0$).

6) Le tuyau est ouvert à la distance L du piston. A quel instant t_1 le front de l'onde de choc atteint-il l'extrémité ouverte du tuyau ?

Quelle est l'expression de l'onde de pression réfléchie $p'(x,t)$ en $x = L$, puis en un point d'abscisse x quelconque ?

7) Quelle est l'allure du graphe de la pression résultante $p''(x,t)$ à l'instant $t_2 = t_1 + \tau$, si $L \gg c\tau$?

8) Calculer la densité de flux d'énergie acoustique incidente $j(x,t)$

9) Déterminer l'expression du niveau acoustique maximal en décibels I_{dB} à la distance x. On prendra $u_0 = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$ pour intensité acoustique de référence. On donne $\log_{10} 5,6 \simeq 0,7$.

10) Calculer l'énergie acoustique transportée par l'onde de choc. On donne :
$\tau = 10^{-3}\ \mathrm{s}; S = 5\ \mathrm{cm}^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 0,9.$