# Examen médian

Durée : 2h
Documents autorisés : AUCUN
Nombre de pages du sujet : 4

***Chaque problème doit être rédigé sur une copie séparée***

## Problème 1 : Plateforme téléscopique

Dans ce problème, nous allons étudier quelques éléments de cinématique associés à une plateforme téléscopique, telle que celle de la Figure 1.


Fig. 1. Plateforme téléscopique *(http ://www.fr.manitou.com)* : plateforme sur chantier et illustration des differentes positions possibles

Le bras de ce type de plateforme a la possibilité de s'allonger et se raccourcir ainsi que de tourner par rapport au corps de la machine, la plateforme peut tourner par rapport au bras. Ces rotations s'effectuent conjointement de telle sorte que la plateforme de travail (1) **reste toujours horizontale**. Nous allons étudier le mouvement d'un ouvrier se déplaçant sur la plateforme.

Nous proposons la modélisation et le paramétrage suivants, résumés Figure 2 :

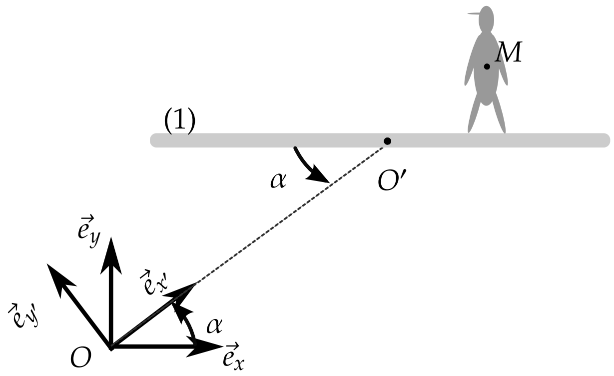


FIG. 2. Modélisation de l'ouvrier et de la plateforme

- le référentiel terrestre est noté $\mathcal{R}$, et un repère cartésien associé est le repère $R\,(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ;
- l'étude se fait dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ;
- la plateforme (1) est en **translation non rectiligne** par rapport à $\mathcal{R}$ ;
- on note $\mathcal{R}_1$ le référentiel associé à la plateforme (1) ;
- le point $O'$ est un point de la plateforme (1) et sa position est donnée par : $\overrightarrow{OO'} = \ell(t)\,\vec{e}_{x'}$. Elle est donc paramétrée par $\alpha$ et $\ell$ ;
- la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ est orthonormée et est représentée Figure 2 ;
- l'ouvrier est assimilé à un point matériel $M$ tel que : $\overrightarrow{O'M} = x'(t)\,\vec{e}_x + h\,\vec{e}_y$ où $h$ est une constante ;

**Dans la suite**, on choisit de définir $\mathcal{R}$ comme **référentiel absolu** et $\mathcal{R}_1$ comme **référentiel relatif**.

**1.** Quelle est la nature du mouvement de (1) par rapport au sol ? Que vaut le vecteur instantané de rotation associé ? Donner un repère cartésien de $\mathcal{R}_1$.

**2.** Un mouvement de translation est-il nécessairement rectiligne ? Qu'est-ce qui caractérise un mouvement de translation ? Donner la vitesse de tout point $P$ de (1) par rapport à $\mathcal{R}$, en fonction de la vitesse de $O'$ et, si besoin est, d'autres quantités utiles.

Dans une première étude, la longueur $\ell$ du bras est supposée constante et $\dot{\alpha} = \omega_0$, avec $\omega_0$ une constante. À l'instant initial, $t = 0$, $x'(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$, $\ell(0) = \ell_0 (\neq 0)$.

**3.** Exprimer la vitesse et l'accélération de $O'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

**4.** À partir de leur définition, exprimer la vitesse relative et la vitesse d'entrainement du point $M$. De même, donner l'accélération relative, d'entrainement et de Coriolis de $M$ (il n'est pas nécessaire d'exprimer le résultat dans la base de $R$).

**5.** En déduire la vitesse absolue $\vec{v}_a$ et l'accélération absolue $\vec{a}_a$ de $M$.

**6.** Donner un vecteur position de $M$ dans $\mathcal{R}$. Exprimer la vitesse absolue de $M$. Donner ses composantes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Déterminer $\dot{x}'(t)$ pour que l'ouvrier se déplace selon une droite verticale par rapport au sol (on pourra réfléchir à ce que cela implique sur les composantes de la vitesse et limiter les calculs au strict nécessaire). En déduire l'expression des coordonnées $(x, y)$ de $M$ dans $R$ au cours du temps.

**7.** Déterminer $\dot{x}'(t)$ pour que le point $M$ suive une trajectoire rectiligne faisant un angle $\beta$ quelconque non nul avec l'horizontale. Pour cela, on pourra introduire le vecteur unitaire $\vec{e}_{x_\beta}$ directeur de la droite à décrire. Quelle est la relation entre $\vec{v}_a$ et $\vec{e}_{x_\beta}$ ? On introduira également le vecteur $\vec{e}_{y_\beta}$ directement orthogonal à $\vec{e}_{x_\beta}$. Après avoir exprimé $\vec{e}_{x_\beta}$ et $\vec{e}_{y_\beta}$ dans la base de $R$, on pourra traduire mathématiquement l'information concernant la direction de la vitesse.

**8 .** Dans ce cas (trajectoire rectiligne faisant un angle $\beta$ avec l'horizontale), exprimer la vitesse scalaire (absolue). Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$v_a = \frac{\ell\omega_0 \cos\alpha}{\sin\beta}$$

**9 .** Toujours dans ce cas, en déduire les accélérations tangentielle et normale (absolues).

Dans une seconde étude, la longueur $\ell$ du bras et l'angle $\alpha$ évoluent en fonction du temps. Un des déplacements programmés de la plateforme est tel que l'évolution conjointe de $\ell$ et $\alpha$ provoque un déplacement horizontal de la plateforme (1).
À l'instant initial, $t = 0$, $x'(0) = 0$, $\alpha(0) = \alpha_0(\neq 0)$, $\ell(0) = \ell_0(\neq 0)$.

**10 .** À partir de considérations géométriques, quel doit être le lien entre $\ell$ et $\alpha$ ?

**11 .** Donner la vitesse absolue de $O'$ en fonction des paramètres du problème. À partir de cette vitesse, donner la relation reliant $\dot{\ell}$ et $\dot{\alpha}$ pour assurer le mouvement horizontal de la plateforme. Retrouver la relation établie à la question précédente.

**12 .** Déterminer la vitesse relative de $M$ pour que ce point soit immobile par rapport au sol. Montrer en particulier que :

$$\dot{x}'(t) = \frac{\ell\dot{\alpha}}{\sin\alpha}$$

**13 .** À partir des expressions établies aux questions 10 et 12, déterminer l'expression de $x'(t)$ en fonction de $\alpha(t)$. *(on pourra noter que :* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ *)*

***Chaque problème doit être rédigé sur une copie séparée***

## Problème 2 : Le petit Kevin joue au football

Le jeune Kevin joue au football seul dans son jardin, il se place donc face à une butte pour frapper la balle de sorte que la balle puisse redescendre jusqu'à lui après chaque tir (nous ne nous intéresserons qu'à la partie aérienne de la trajectoire). Le référentiel du jardin $\mathcal{R}_j$ est considéré comme galiléen et, l'étude se faisant dans le plan, on considère $R\,(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ un repère cartésien associé. La butte est modélisée par un plan incliné faisant un angle $\alpha_0$ avec $(O, \vec{e}_x)$ comme illustré Figure 3. La pesanteur terrestre est telle que : $\overrightarrow{g} = -g\,\vec{e}_y$. La balle est assimilée à un point matériel $B$ de masse $m_B$. À l'instant initial, $B$ est en $O$, sa vitesse initiale fait un angle $\beta$ avec l'horizontale et a une amplitude $v_0$.

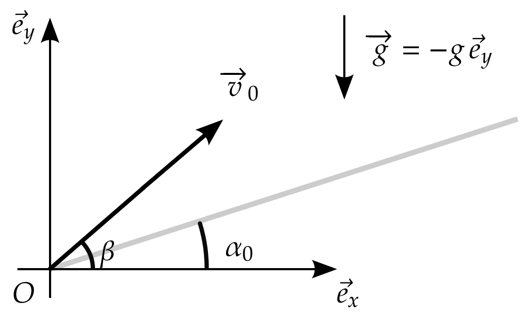


FIG. 3. Représentation de la butte, de la vitesse initiale et du champ de pesanteur

Dans un premier temps, **on néglige** l'effet du vent et des frottements de l'air sur la balle.

**1 .** Donner un vecteur position de $B$. Quelles forces s'appliquent sur la balle $B$ ? En déduire les équations vérifiées par les coordonnées cartésiennes de $B$, puis l'évolution de la position de $B$ au cours du temps.

**2.** Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire ? Quelle est celle du plan incliné modélisant la butte (se résumant à une droite dans le plan d'étude) ? Déterminer la distance $x_{max}$ dans la direction de $\vec{e}_x$ parcourue par la balle avant de toucher le plan incliné. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$x_{max} = \frac{{v_0}^2}{g} \frac{\sin(2\beta - \alpha_0) - \sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}$$

*Indication*

> *On pourra remarquer (avec $a = \beta - \alpha_0$ et $b = \beta$) que :*
>
> $$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

**3.** Pour tout $\alpha_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donner la valeur de $\beta$ telle que le point $B$ parcourt la plus grande distance horizontale.

Le ballon de Kevin étant un ballon de supermarché, il n'est pas possible de négliger les frottements visqueux. Nous allons donc en tenir compte dans cette seconde étude. Comme du vent souffle le long de la butte, la force liée à l'action de l'air sur la balle est supposée de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -C\left(\overrightarrow{v}(B) - \overrightarrow{v}_V\right) \quad \text{, avec} \quad \overrightarrow{v}_V = -v_V\left(\cos\alpha_0\,\vec{e}_x + \sin\alpha_0\,\vec{e}_y\right), v_V \text{ et } C \text{ constants et positifs}$$

*Remarque : ce modèle de frottement visqueux linéaire par rapport à la vitesse n'a une pertinence que très limitée à l'échelle du mouvement étudié. Il est toutefois adopté ici, au risque de choquer votre sens physique, pour vous permettre de mener les calculs jusqu'au bout sans avoir recours à un ordinateur.*

**Hormis à la dernière question, on ne tiendra pas compte de la présence de la butte pour la suite.**

**4.** Donner les conditions initiales du problème ainsi que les équations différentielles vérifiées par les coordonnées cartésiennes de la vitesse du point $B$. On pourra poser $\gamma = \frac{C}{m_B}$.

**5.** Quelle est la vitesse limite (ou vitesse stationnaire) atteinte par la balle ? Quel est son signe selon $\vec{e}_x$ en fonction des paramètres du problème ?

**6.** Déterminer l'expression des coordonnées cartésiennes de la vitesse du point $B$ en fonction du temps.

*Rappel*

> *La solution générale de l'équation :* $\dot{y} + A\,y = B, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
> *est donnée par :*
>
> $$y(t) = \frac{B}{A} + K e^{-A\,t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

**7.** En déduire les lois horaires de la position de $B$ (*i.e.* $x(t)$ et $y(t)$). Montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme (on précisera la valeur des constantes $A_x$,$B_x$,$A_y$ et $B_y$) :

$$\begin{cases} x(t) = A_x\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - B_x\,t \\ y(t) = A_y\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - B_y\,t \end{cases}$$

**8.** Déterminer la condition sur $\beta$ pour que le ballon repasse en $O$. Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\tan\beta = \frac{g + \gamma v_V \sin\alpha}{\gamma v_V \cos\alpha}$$

**9.** En supposant que $B$ a atteint sa vitesse stationnaire au moment de son retour en $O$, quel angle fait la vitesse avec l'horizontale (on pourra caractériser l'angle par sa tangente) ? Que penser alors de l'hypothèse disant que la balle ne touche pas le plan incliné dans son mouvement avant son retour en $O$ ?