

# Chaos dans les systèmes mécaniques

- L'expérience de la bille
- Transition vers le chaos
- Plongée dans le chaos
- Contrôle du chaos



# L'expérience de la bille qui rebondit

Cette expérience a été mise au point à l'Université Pierre et Marie Curie au cours de projets de travaux pratiques en Licence et Maîtrise de Physique et au Magistère Interuniversitaire de Physique.

Son élaboration s'est étalée sur plusieurs années. La participation et les initiatives des étudiants ont largement contribué à son état actuel.

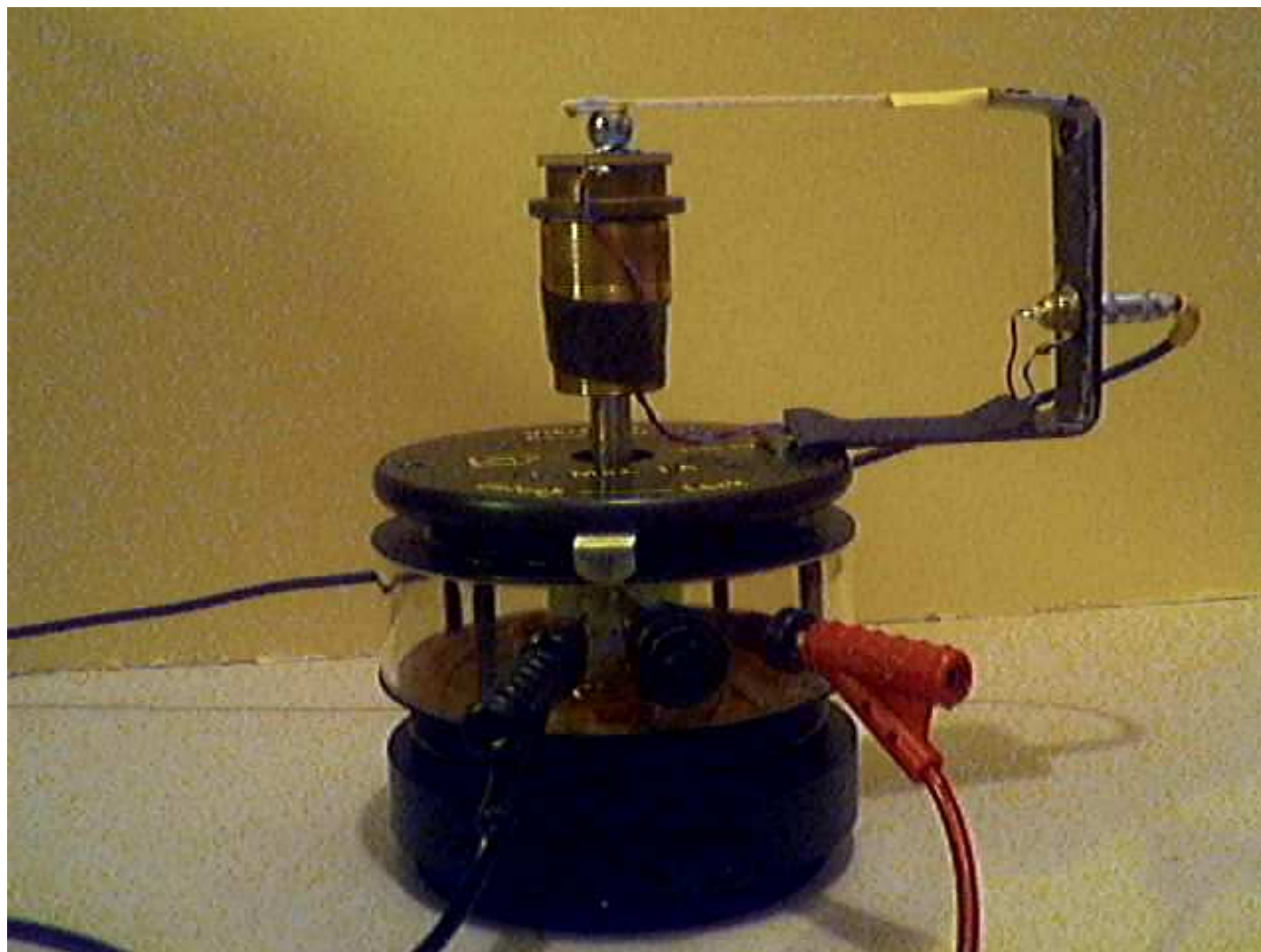
*Quelques références :*


B. Pippard *The Physics of vibrations* Cambridge U.P. (1978)

N.B. Tuffilaro, A.M. Albano *Am. J. Phys.* **54**, 939, (1986)

....

P. Boissel *Bulletin de l'Union des Physiciens* (N° 741, février 1992)

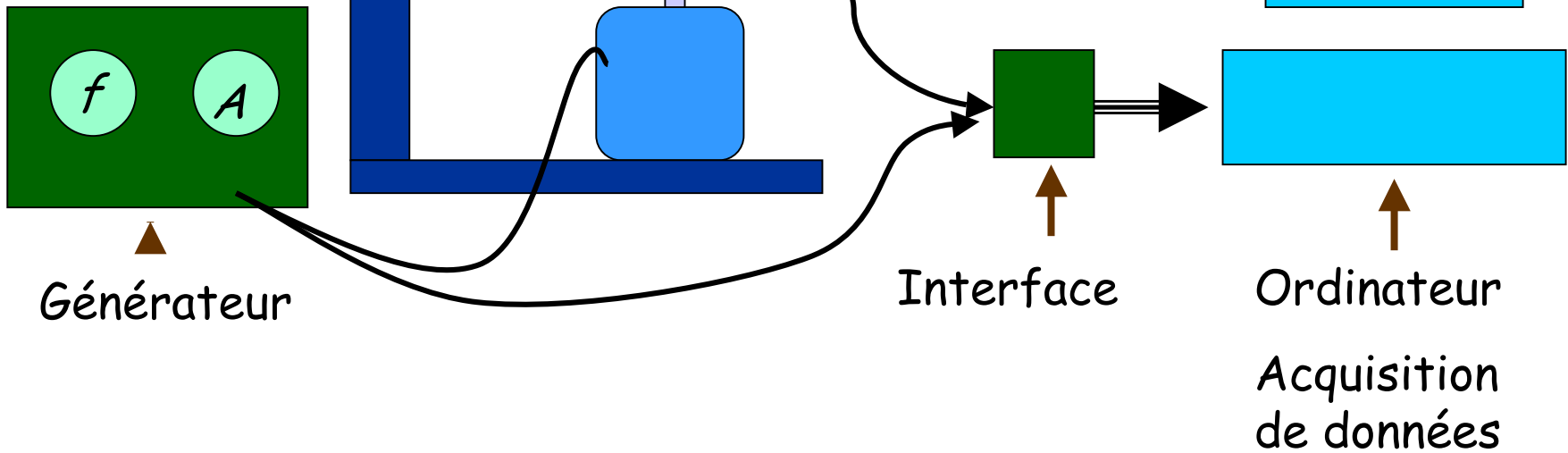


écouter 

# Schéma

Mouvement de la bille  
contraint dans une  
direction par le support

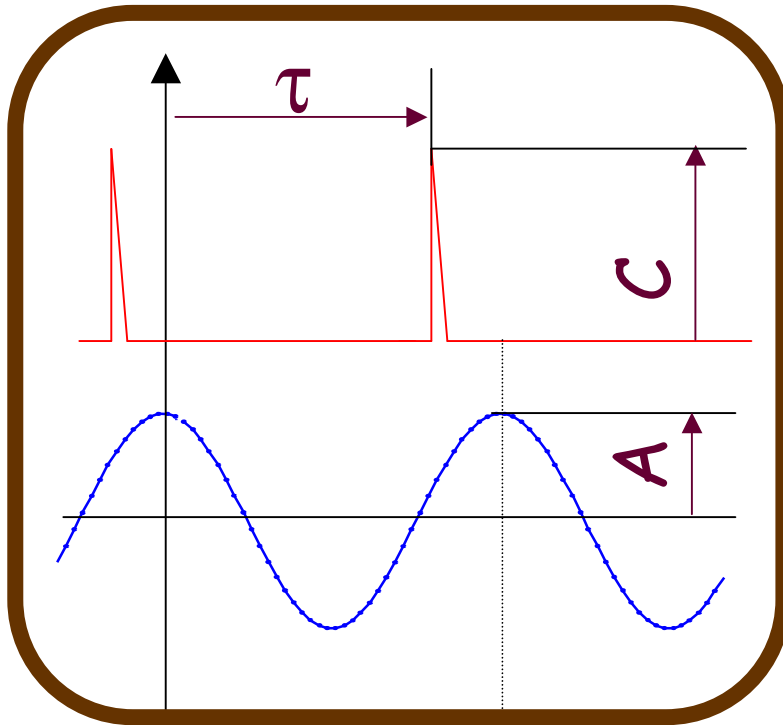
céramique  
piézoélectrique



# Acquisition de données

*Instant du choc*

*variables*



*Amplitude du choc*

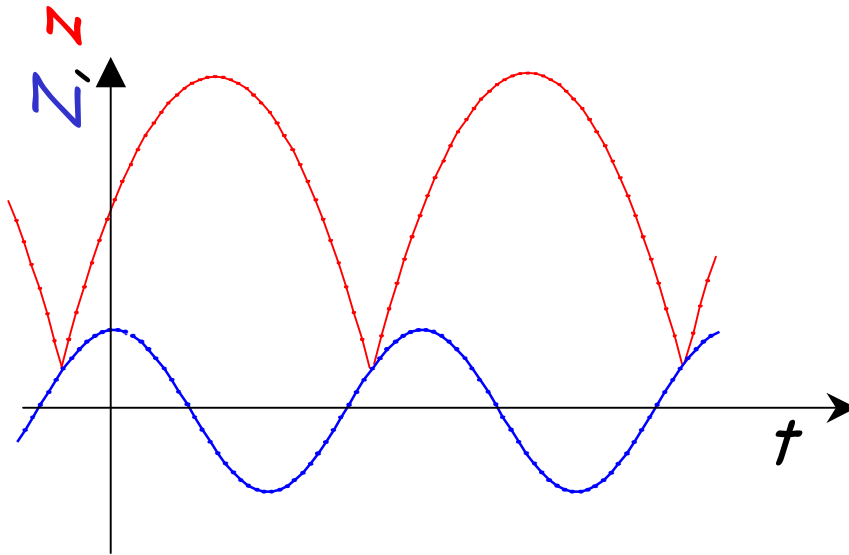
*Amplitude*

*Paramètre de contrôle*

*T*  
*Période*

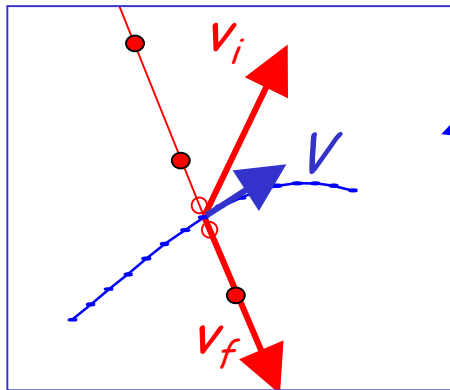
*paramètres*

# Calcul de la trajectoire



Mouvement du plateau :  
 $Z = A \cos(\omega t)$

Mouvement de la bille :  
 $z = z_i + v_i t - 1/2 g t^2$   
 $v = v_i - g t$



Choc : intersection des deux  
*résolu numériquement*

Vitesse après le choc :  
*loi de restitution des vitesses relatives*  
 $v_i - V = -\mu (v_f - V)$

La trajectoire de la bille obéit à des équations très simples de la dynamique du point.

On suppose que toutes les perturbations extérieures sont négligeables.

⇒ Si on connaît à un instant donné la position et la vitesse de la bille on peut calculer quelle sera sa position à un instant ultérieur.

C'est un système  
déterministe

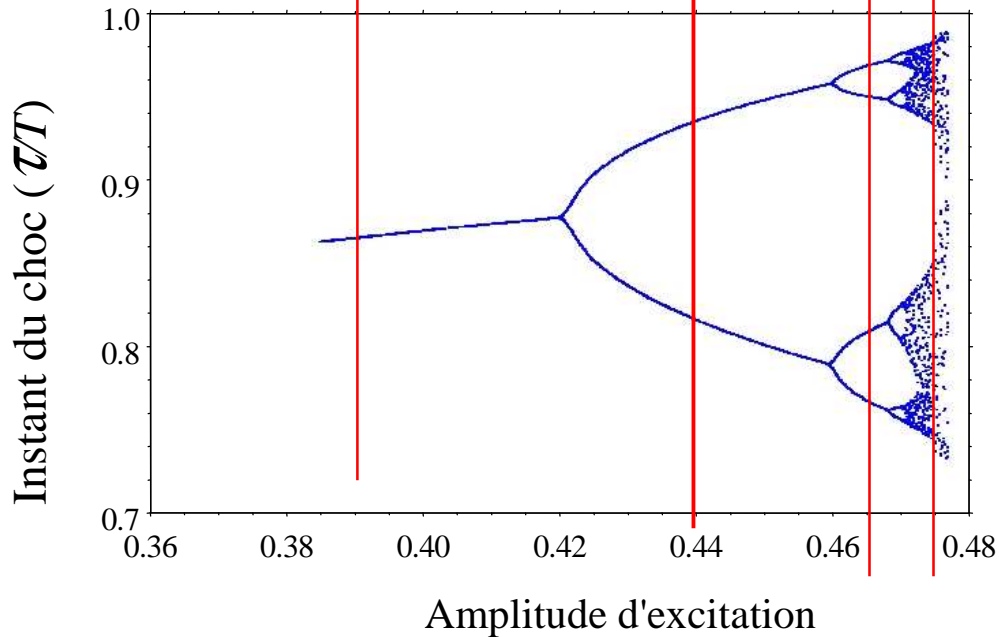
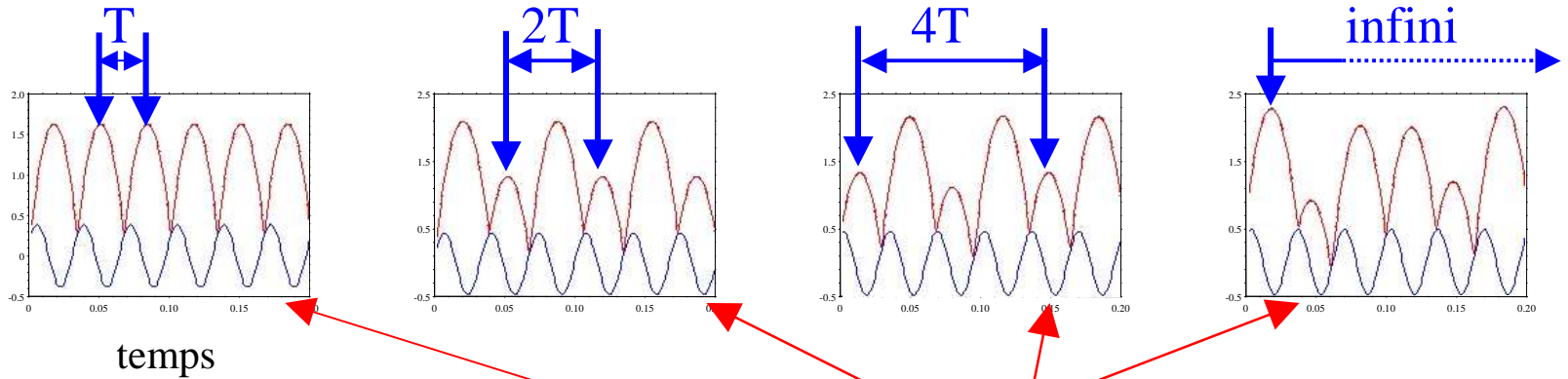
# La transition vers le chaos

- Cascade de doublements de période
  - *Doublements de période* → régime apériodique
    - Autosimilarité
  - *Universalité de la cascade*
    - Autres exemples
    - Nombre de Feigenbaum
  - *Comment naît une bifurcation*
    - Contre réaction - stabilité et instabilité
  - *Stabilité et instabilité (math)*
  - *Aperçu général du diagramme de bifurcations*



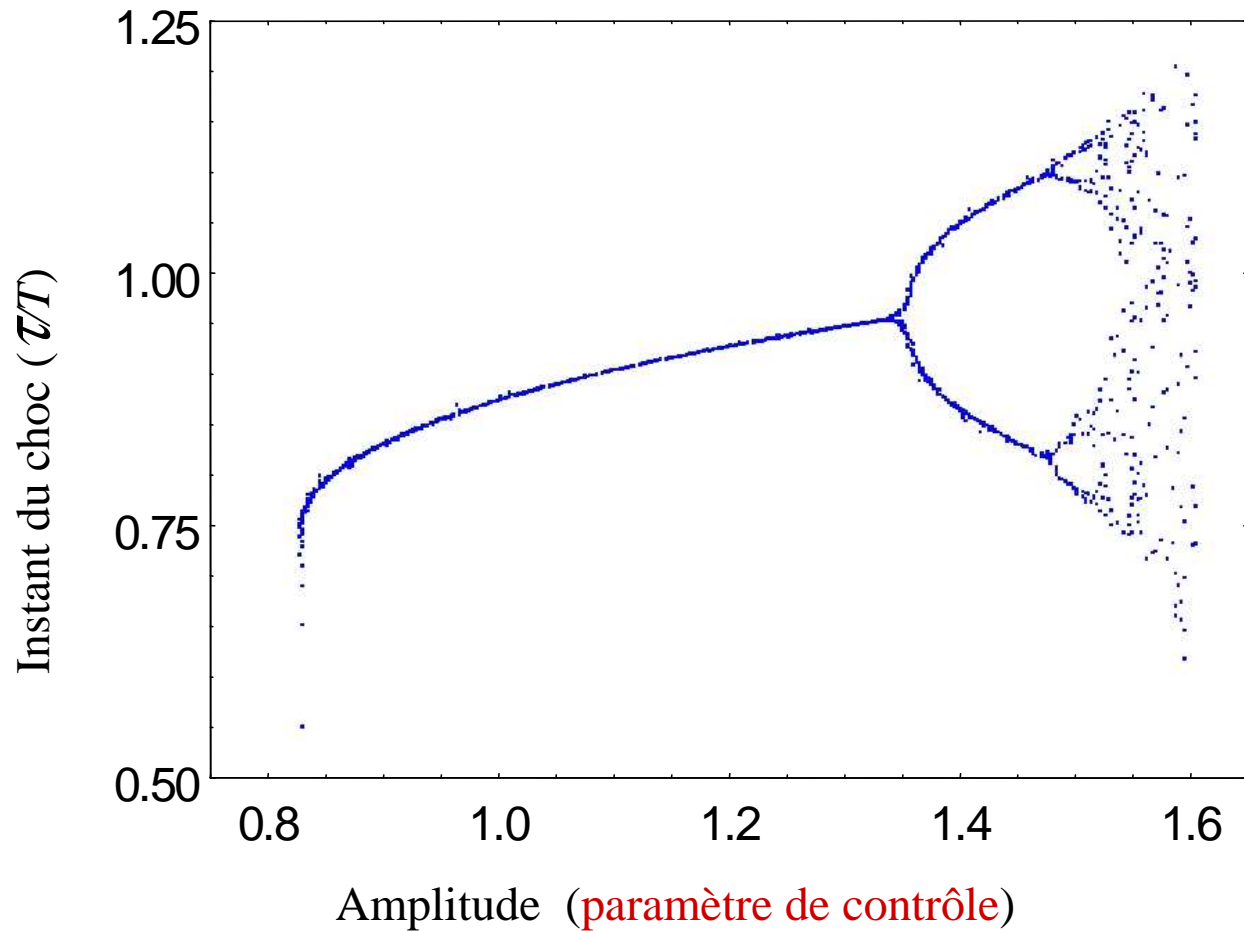
# Cascade de bifurcations

# Doublements de période

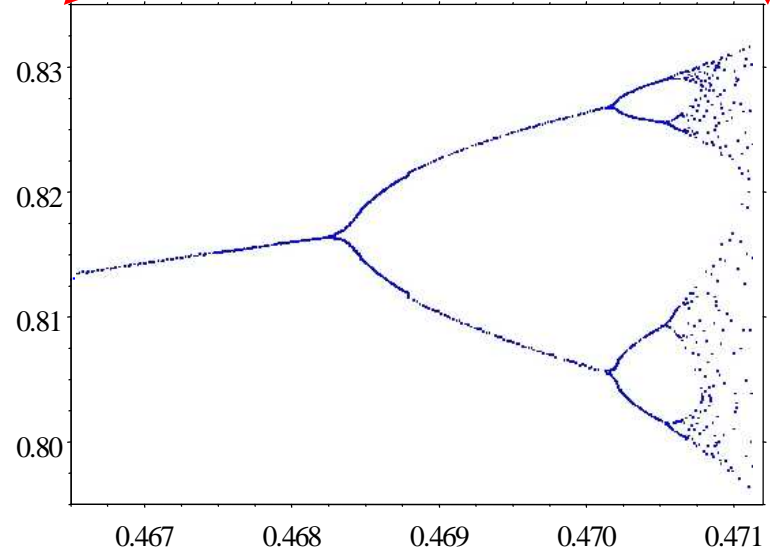
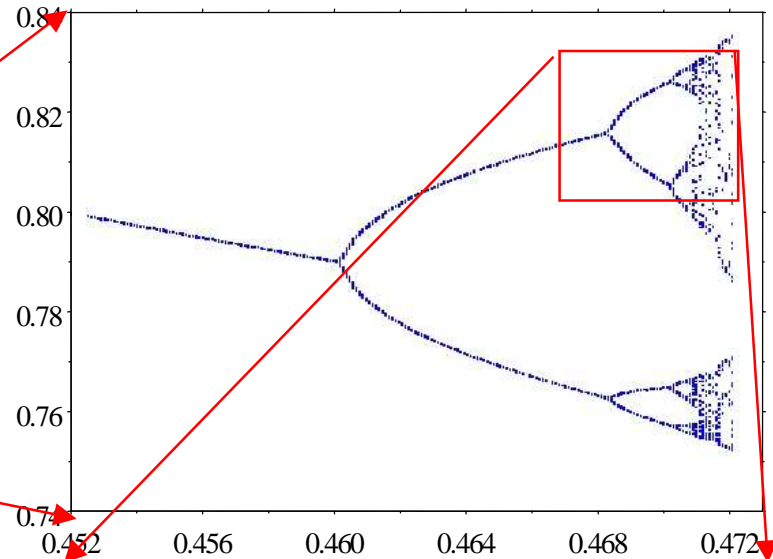
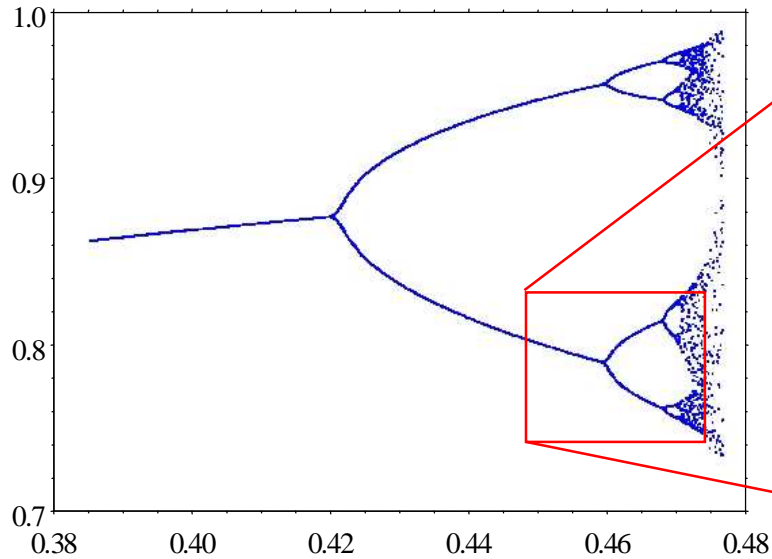


Transitions réversibles lorsque l'amplitude croît ou décroît

# Doublements de période (expérience)



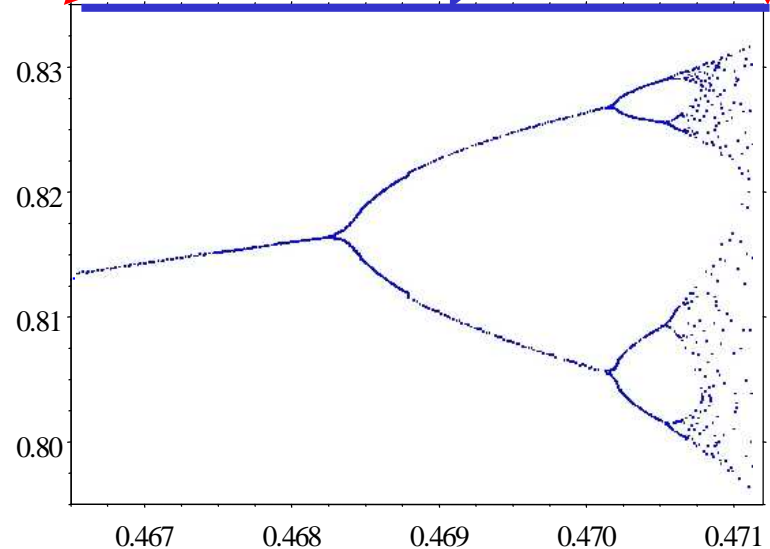
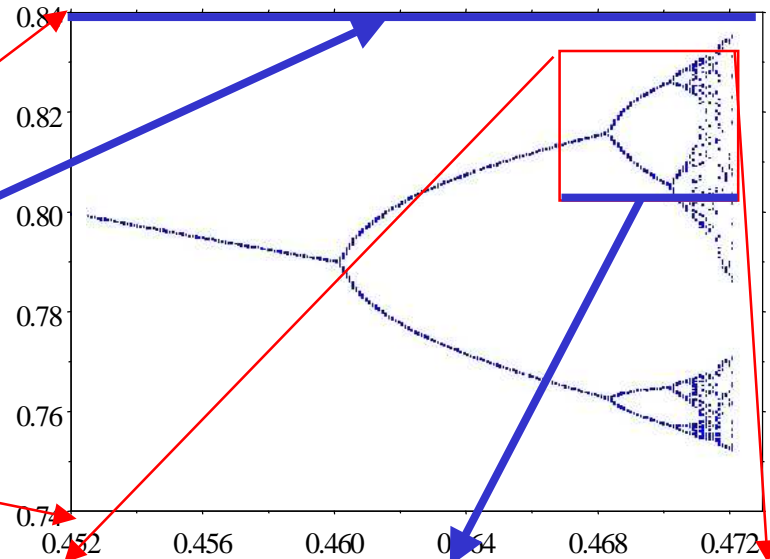
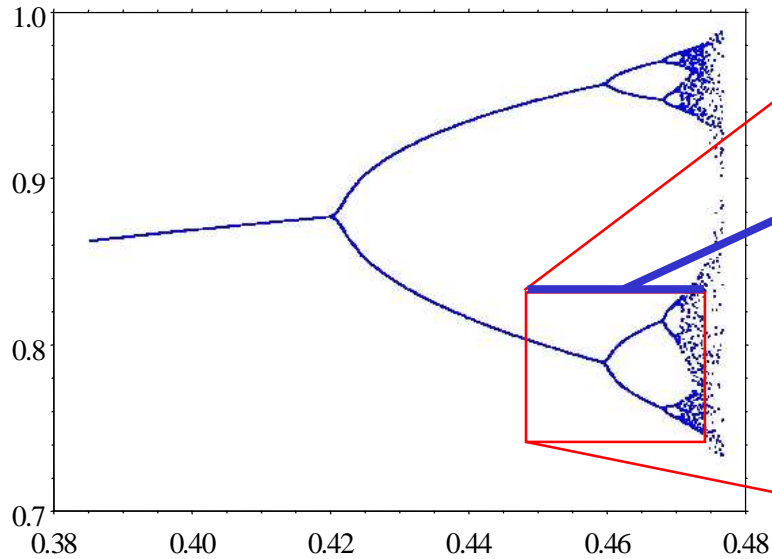
# Autosimilarité



L'agrandissement d'un détail a les mêmes caractéristiques que la figure complète.

**Autosimilarité**  
**Caractère fractal**

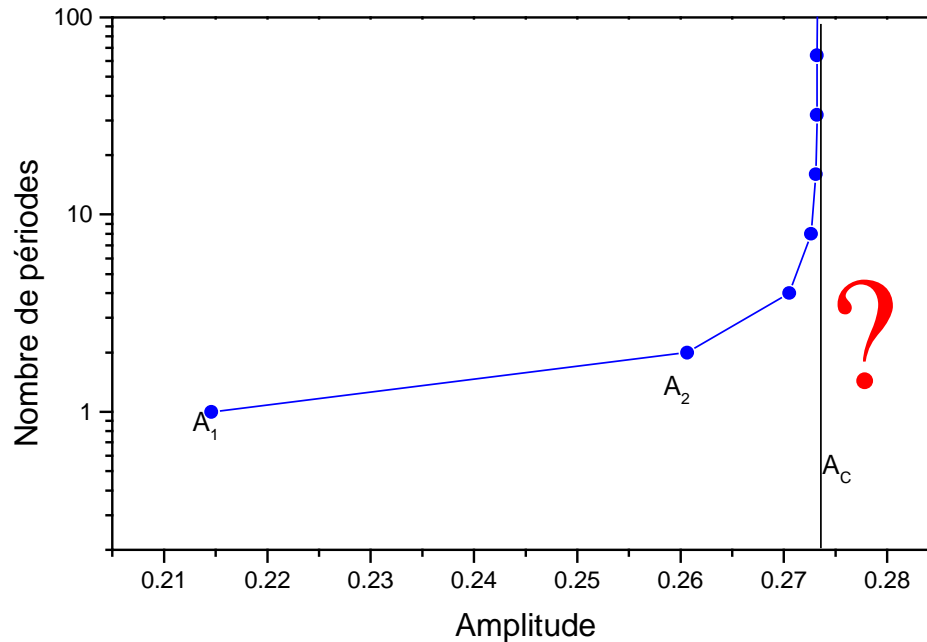
# Autosimilarité



L'agrandissement d'un détail a les mêmes caractéristiques que la figure complète.

*Rapport de grandissement  
~constant d'une étape à l'autre*

# Amplitude critique



$$A_n = A_{n-1} + (A_2 - A_1)(1/4.5)^n$$

$\Rightarrow A_n \rightarrow A_\infty$ , limite finie

$$\text{Période} = 2^n T$$

$\Rightarrow$  tend vers l'infini

Lorsque l'amplitude tend vers  $A_\infty$ , le temps nécessaire pour retrouver le même état du système tend vers l'infini.

$\Rightarrow$  au delà de  $A_\infty$  le système est devenu complètement aperiodique

(?)

Mais, suite de Sarkovsky :

1 - 2 - 4 ...  $2^n$  -  $\infty$  -  $2^m (2q+1)$  ... - 7 - 5 - 3

$\Rightarrow$  il peut y avoir d'autres cycles limites au delà de  $A_\infty$

# Universalité de la cascade de bifurcations

# La suite logistique

*Voir exposé de Daniel Perrin*

Suite numérique définie par :  $x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1-x_n)$

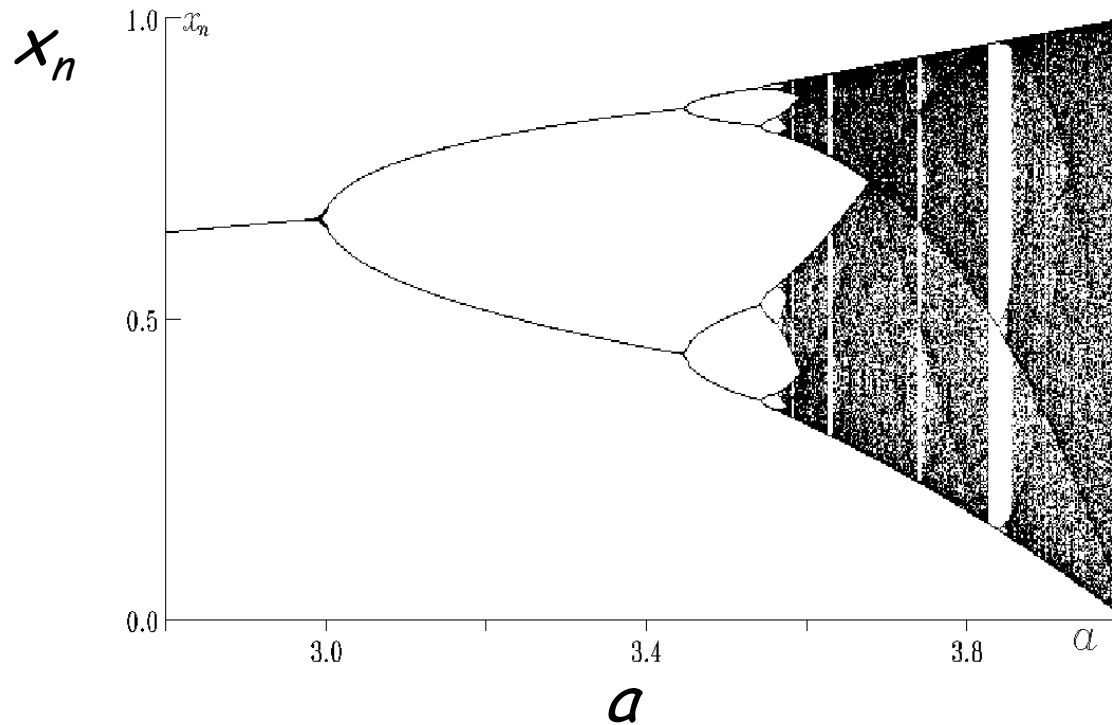
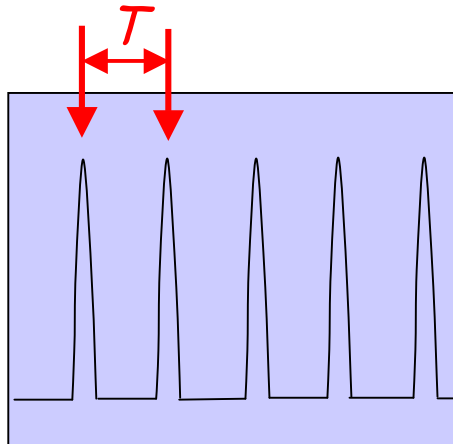


Diagramme de bifurcations

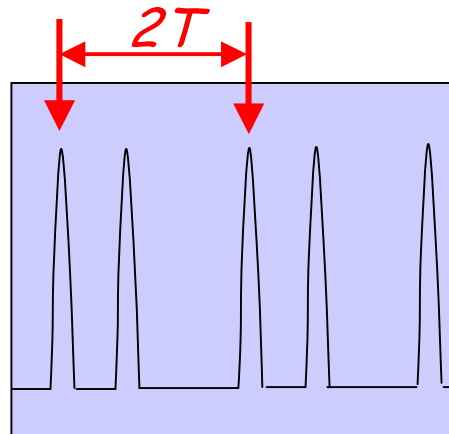


# Le robinet qui fuit

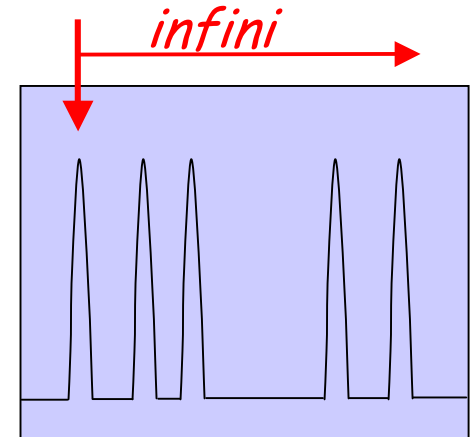
Intervalle d'arrivée des gouttes en fonction du débit de la fuite



débit faible  
intervalles réguliers



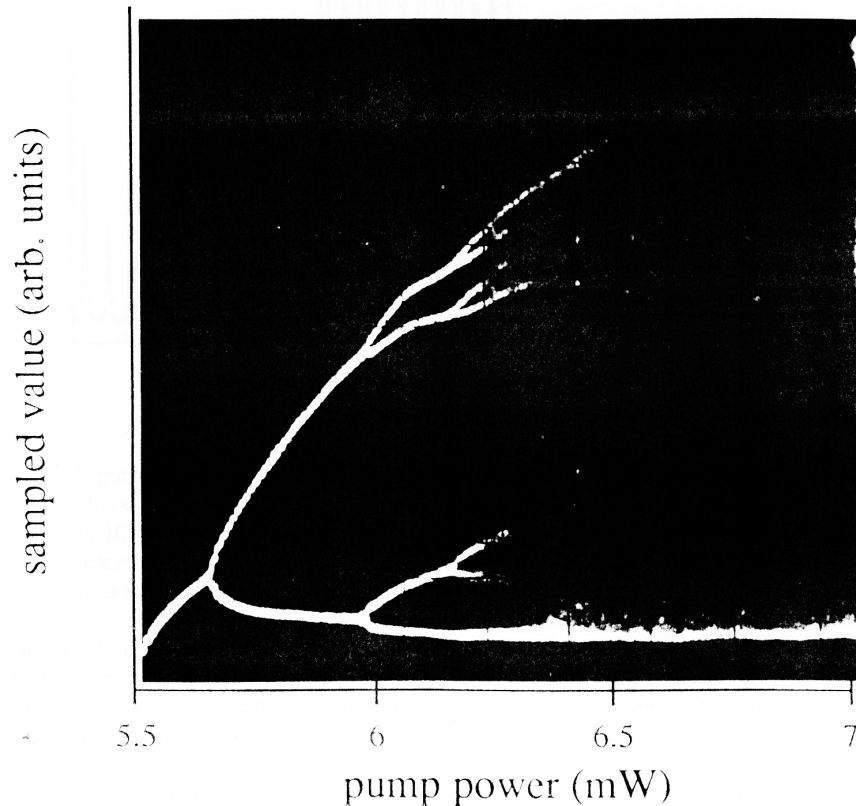
débit plus fort  
doublement de période



débit fort  
chaos

# Chaos dans les lasers

Laser constitué d'une fibre optique dopée au néodyme



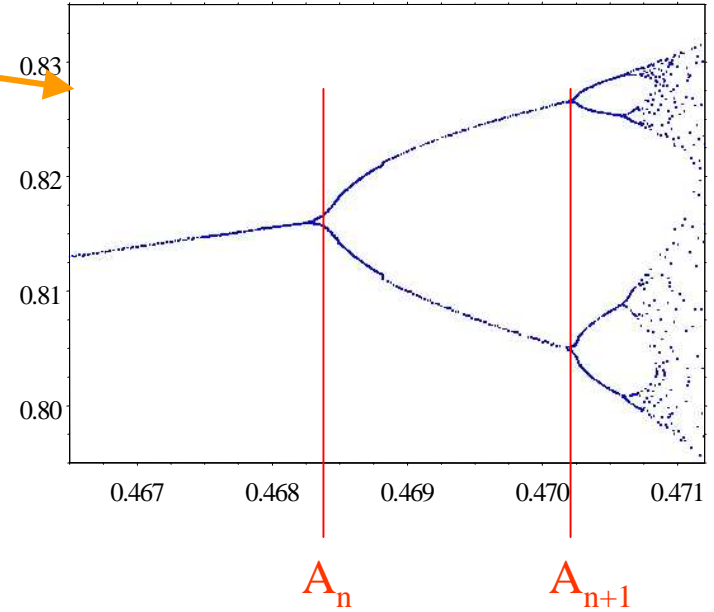
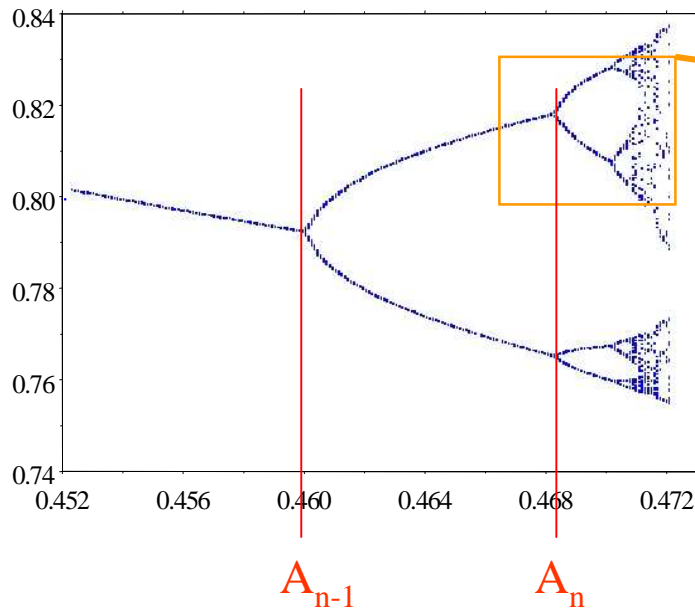
Pour une puissance de pompage  $> 5.5$  mW, on observe une oscillation spontanée de l'intensité de sortie

**Systeme auto oscillant  
(pas de fréquence imposée)**

A partir de 5.7 mW, cascade de doublement de période puis chaos

*D'après S. Bielawski, D. Derozier et P. Glorieux  
Université de Lille*

# Nombres de Feigenbaum



On mesure le rapport de grandissement  $\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}$   
Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $\delta_n$  tend vers une limite précise :  $\delta = 4.669201\dots$   
Le rapport d'agrandissement vertical tend vers  $2.502907\dots$

*Ces deux nombres ne dépendent pas du système étudié*

**Caractère universel de la cascade de bifurcations**

# Comment nait une bifurcation

# Condition du régime de rebond de période $T$

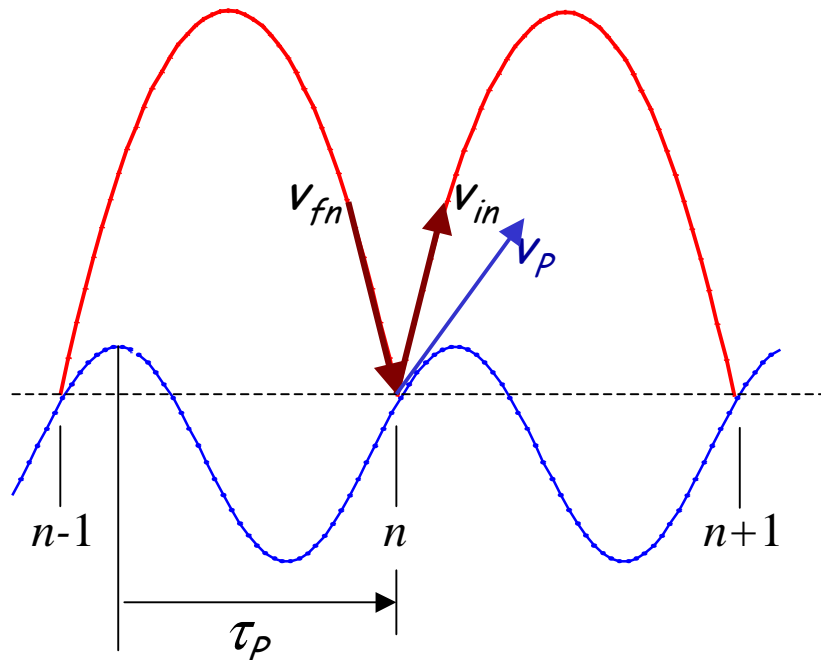
Vol de durée  $T$ .

$$z_{n-1} = z_n \quad \text{même altitude pour tous les chocs}$$

$$\Rightarrow v_{in} = -v_{fn} = v_T \quad \text{vitesses avant et après le choc identiques}$$

$$v_T = gT/2$$

$$(v_{fn} - V_p) = -\mu(v_{in} - V_p) \Rightarrow V_p = v_T(1-\mu)/(1+\mu)$$



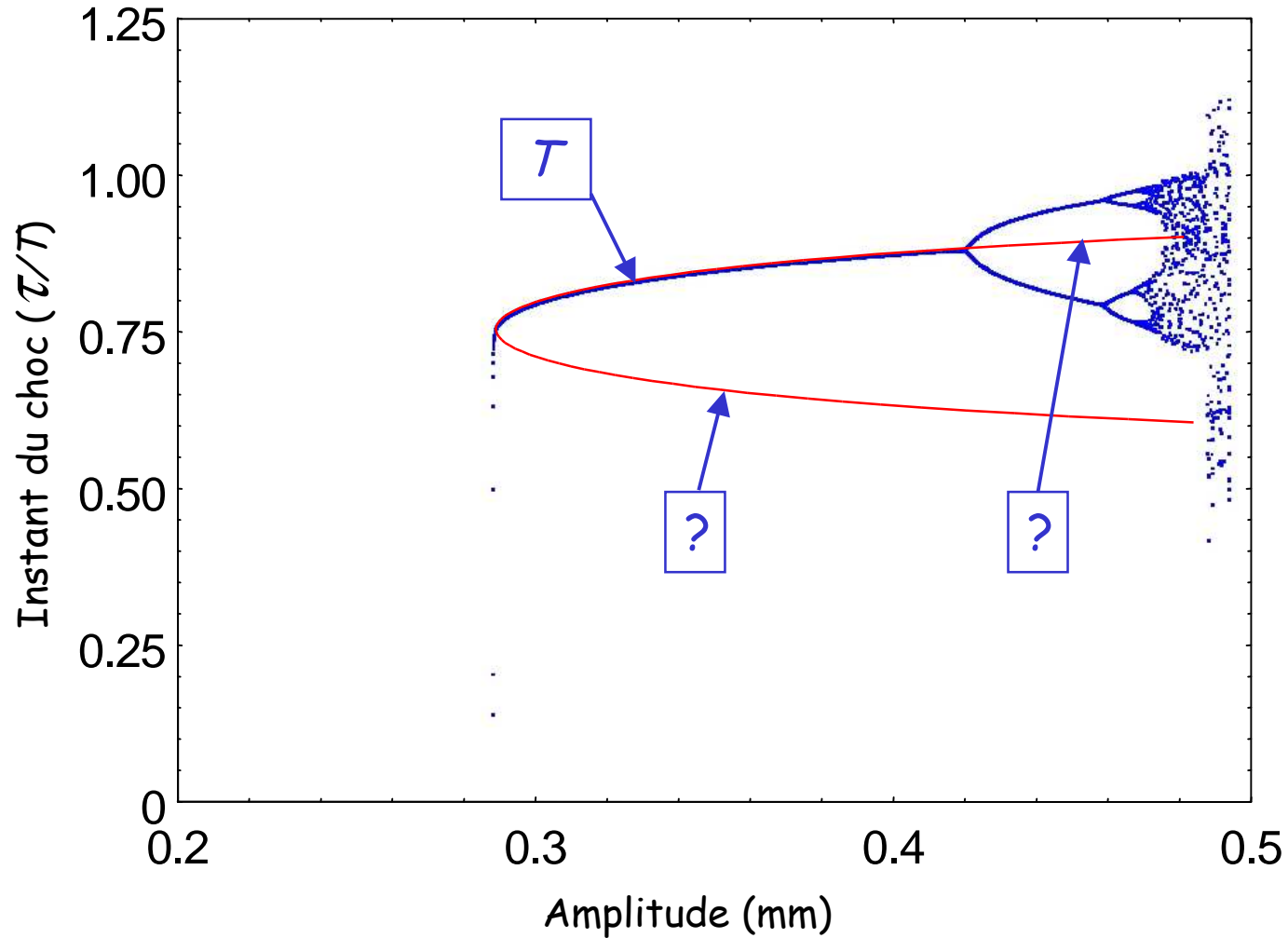
La donnée de la période  $T$   
impose la vitesse du plateau  $V_p$

$$V_p = \frac{gT}{2} \frac{1-\mu}{1+\mu}$$

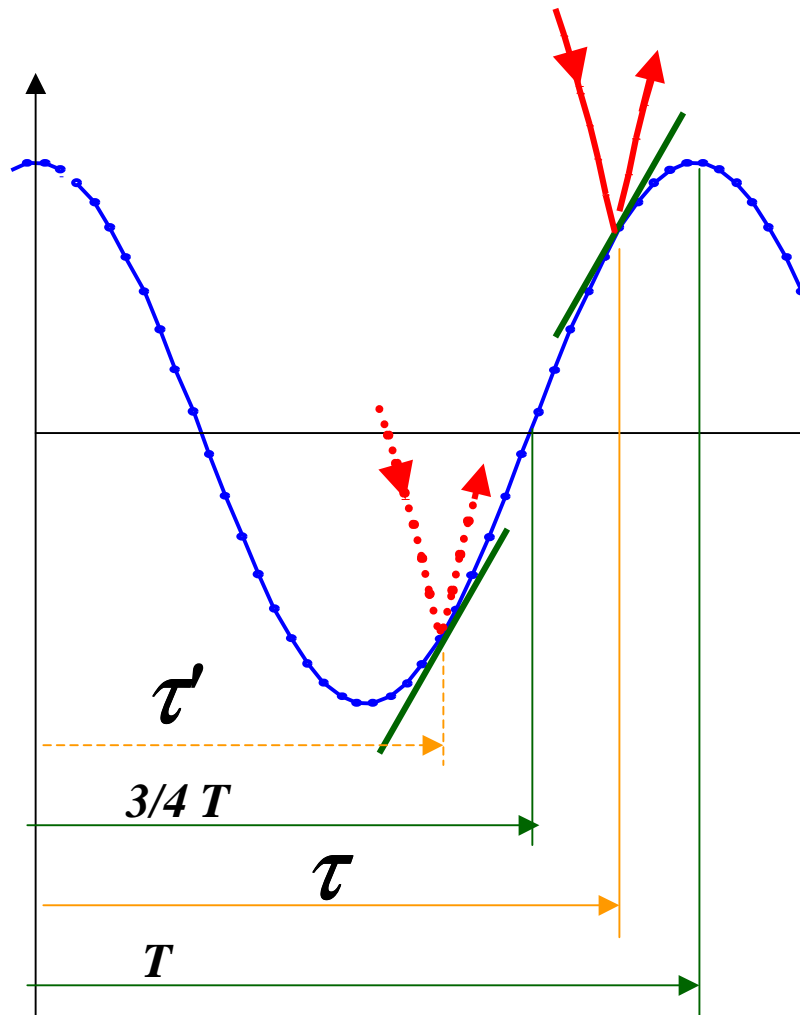
Pour une amplitude donnée  
 $A$ , la phase du choc  $\tau_p$  est  
donc :

$$V_p = -A\omega \sin \omega\tau_p$$

# Localisation du régime de période $T$



# Deux régimes périodiques ?



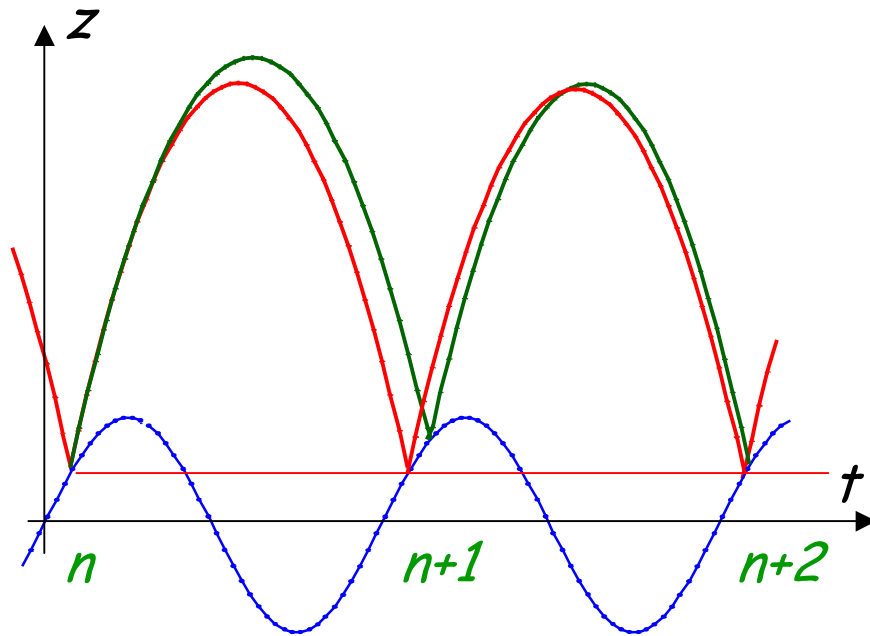
On observe le régime périodique pour  $\tau$  entre  $3/4 T$  et  $T$ .

La même vitesse du plateau se retrouve pour  $\tau$  entre  $1/2 T$  et  $3/4 T$ .

Pourquoi n'observe t'on pas ce deuxième régime ?

Pourquoi la bifurcation ?

# Branche stable du régime périodique



--- trajectoire "idéale", période  $T$   
--- trajectoire perturbée

Que se passe-t-il si la bille s'écarte de la trajectoire idéale du régime périodique (trajectoire rouge) ?

Au rebond  $n$ , à la suite d'une perturbation, la bille repart par exemple avec une vitesse trop grande (trajectoire verte).

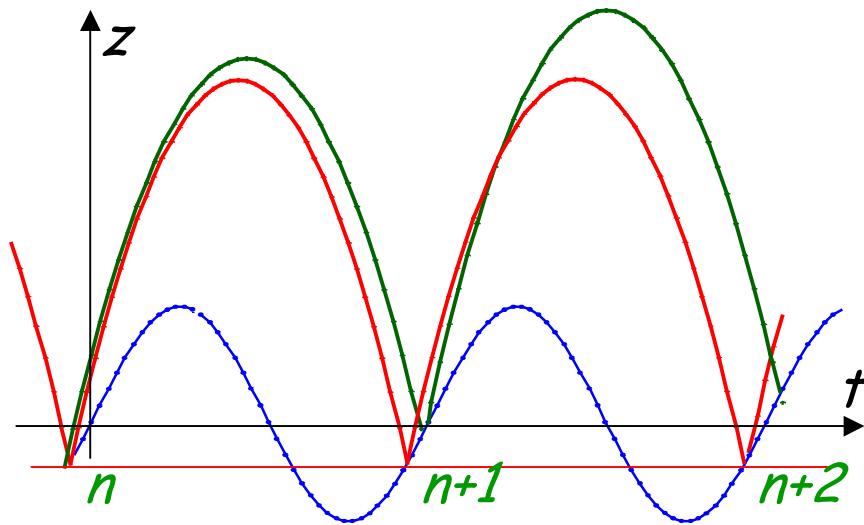
Au rebond  $n+1$ , elle arrive plus tard, à un moment où le plateau monte moins vite.

=> Au rebond  $n+2$ , l'erreur est en partie rattrapée.

=> Stabilisation par une rétroaction interne au système



# Branche instable du régime périodique



--- trajectoire "idéale", période  $T$   
--- trajectoire perturbée

La vitesse du plateau est la même pour les phases (exprimées en fraction de période)  $3/4+\theta$  et  $3/4-\theta$

On devrait donc observer aussi un régime périodique à la phase  $3/4-\theta$ .

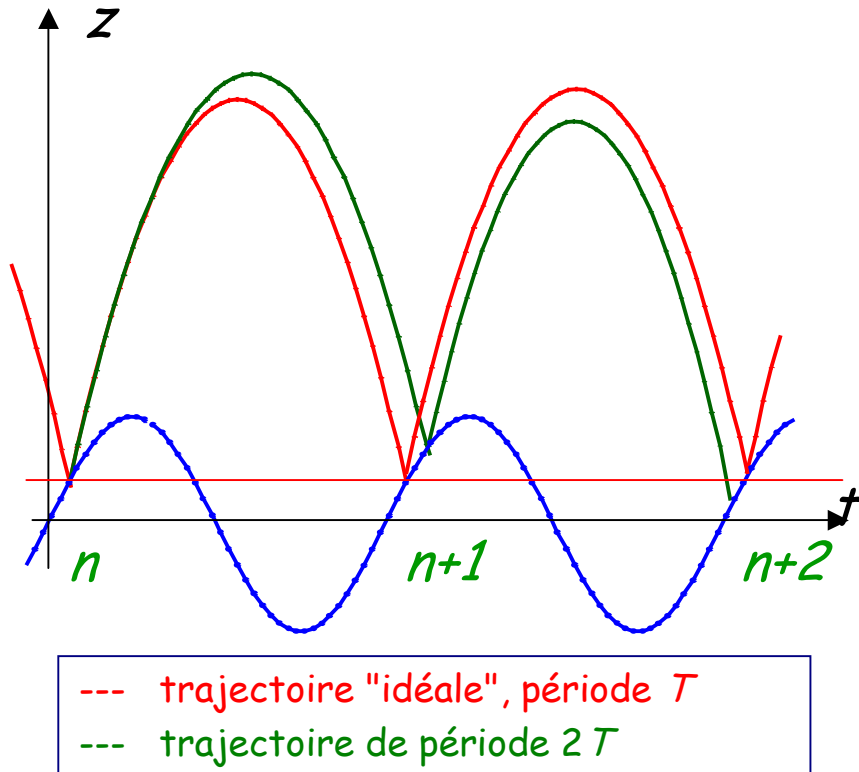
Au rebond  $n+1$ , la trajectoire perturbée rencontre le plateau à un moment où il monte plus vite.

=> Au rebond  $n+2$ , l'erreur est amplifiée.

Cette deuxième branche du régime périodique existe bien, mais elle est instable

=> Dans ce cas la rétroaction déstabilise le système

# Naissance d'un doublement de période



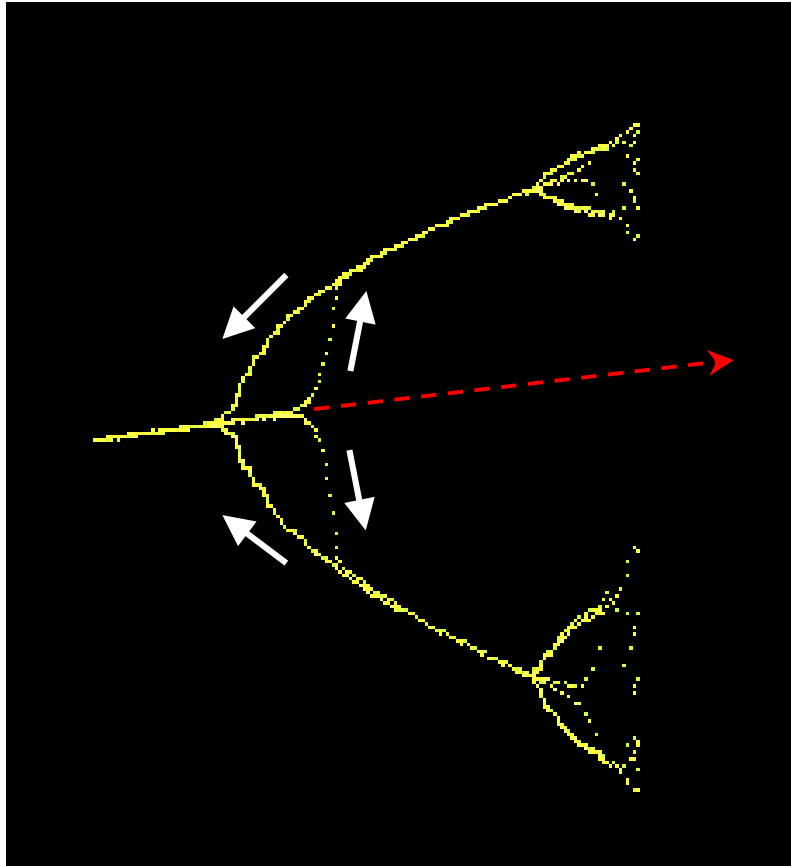
Lorsque l'amplitude du plateau augmente, la correction due à la rétroaction devient trop forte.

=> Au rebond  $n+2$ , l'erreur du rebond  $n+1$ , au lieu d'avoir diminué, se retrouve en sens inverse.

Le système se restabilise alors avec alternance de deux types de chocs (régime  $2T$ ) de part et d'autre du régime de période  $T$ .

Le régime de période  $T$  existe toujours, mais il est instable  
C'est le régime de période  $2T$  qui devient stable

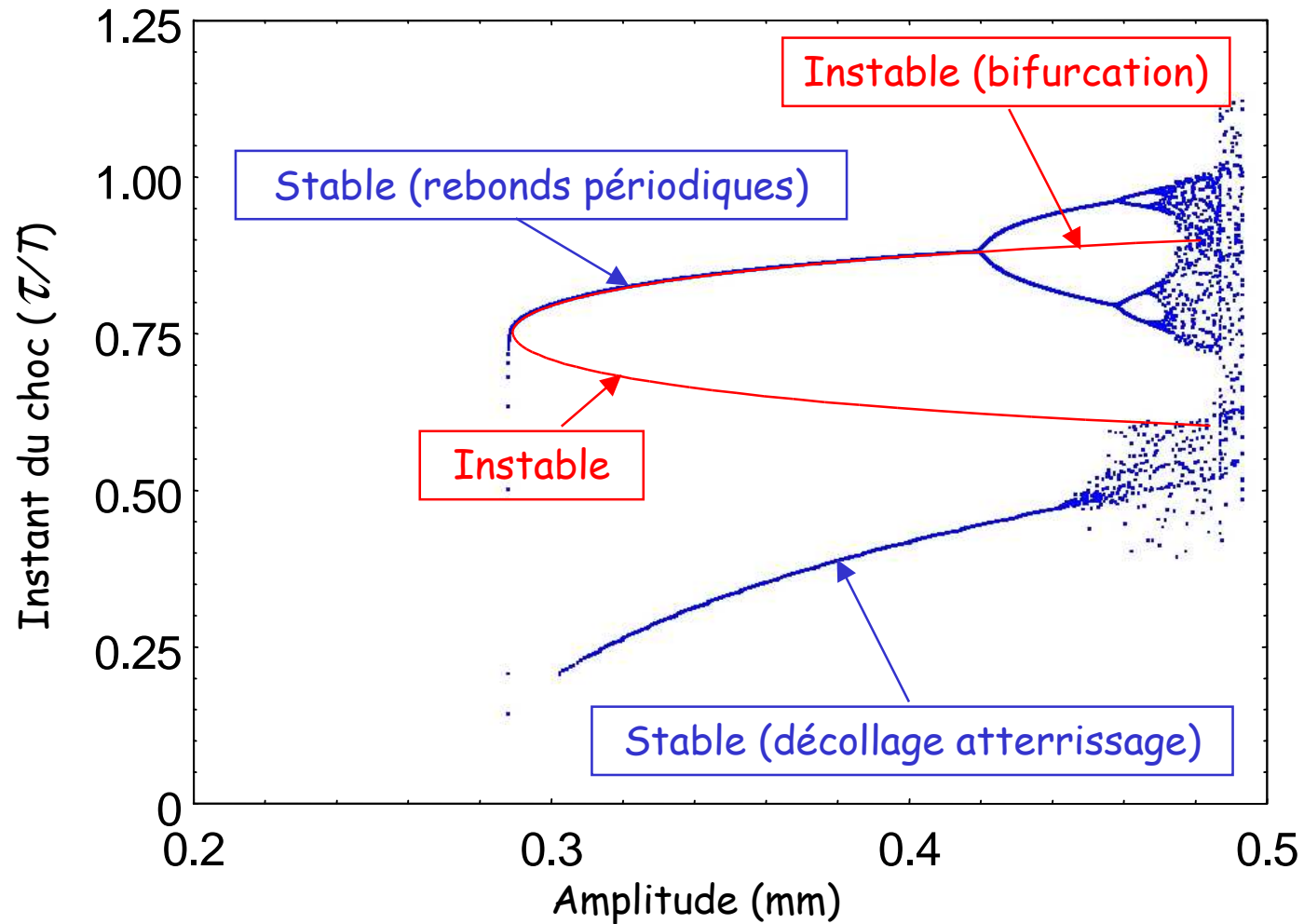
# Retard à la bifurcation



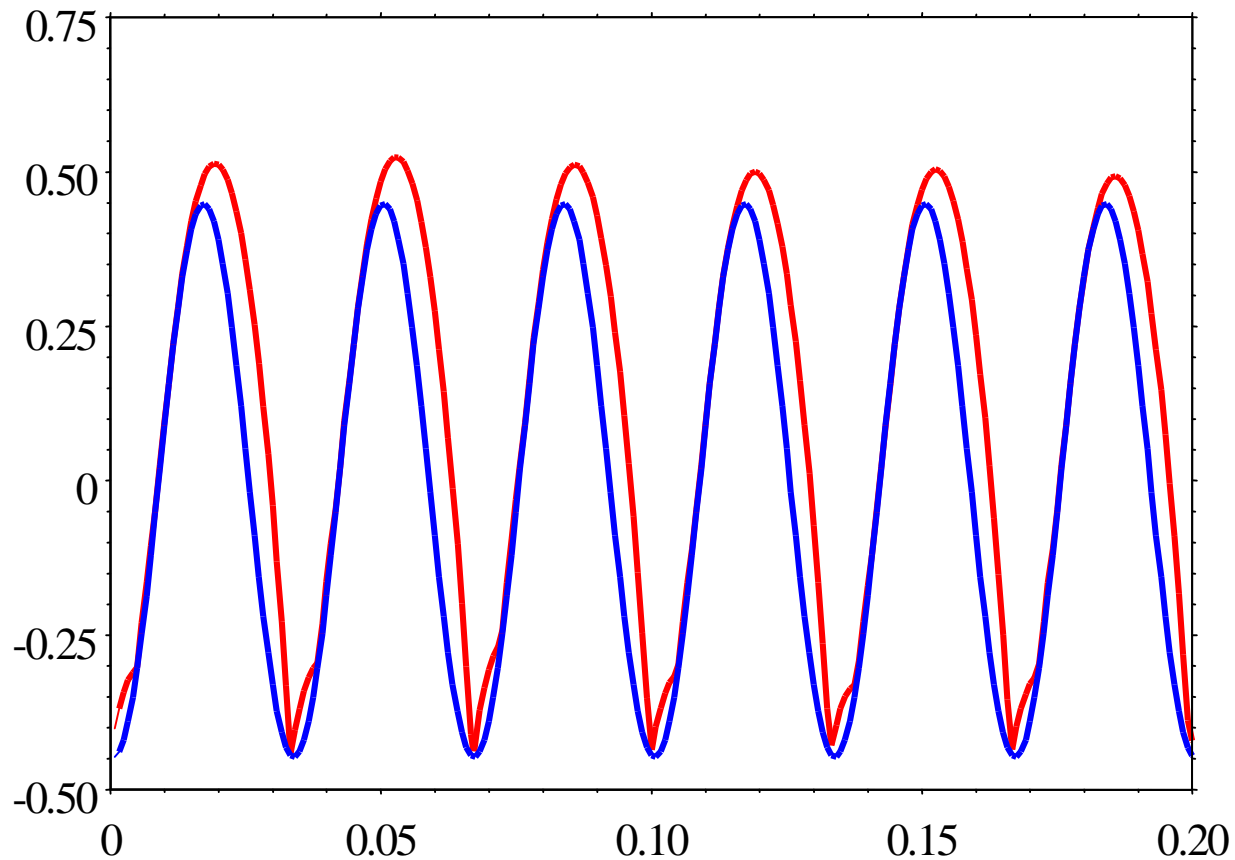
Lorsque le paramètre de contrôle est augmenté trop rapidement, la bille continue sur le régime de période  $T$  avant de se déstabiliser vers le régime  $2T$ .

⇒ Confirme l'existence de la branche instable

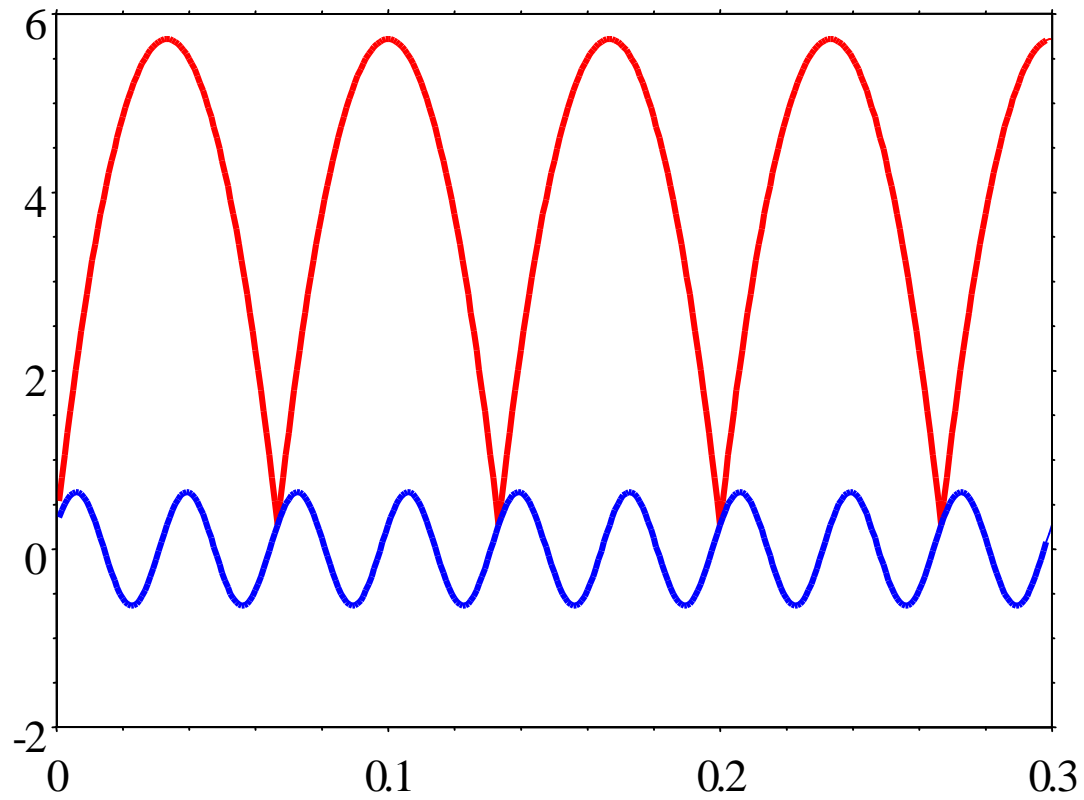
# Aperçu général des différents régimes



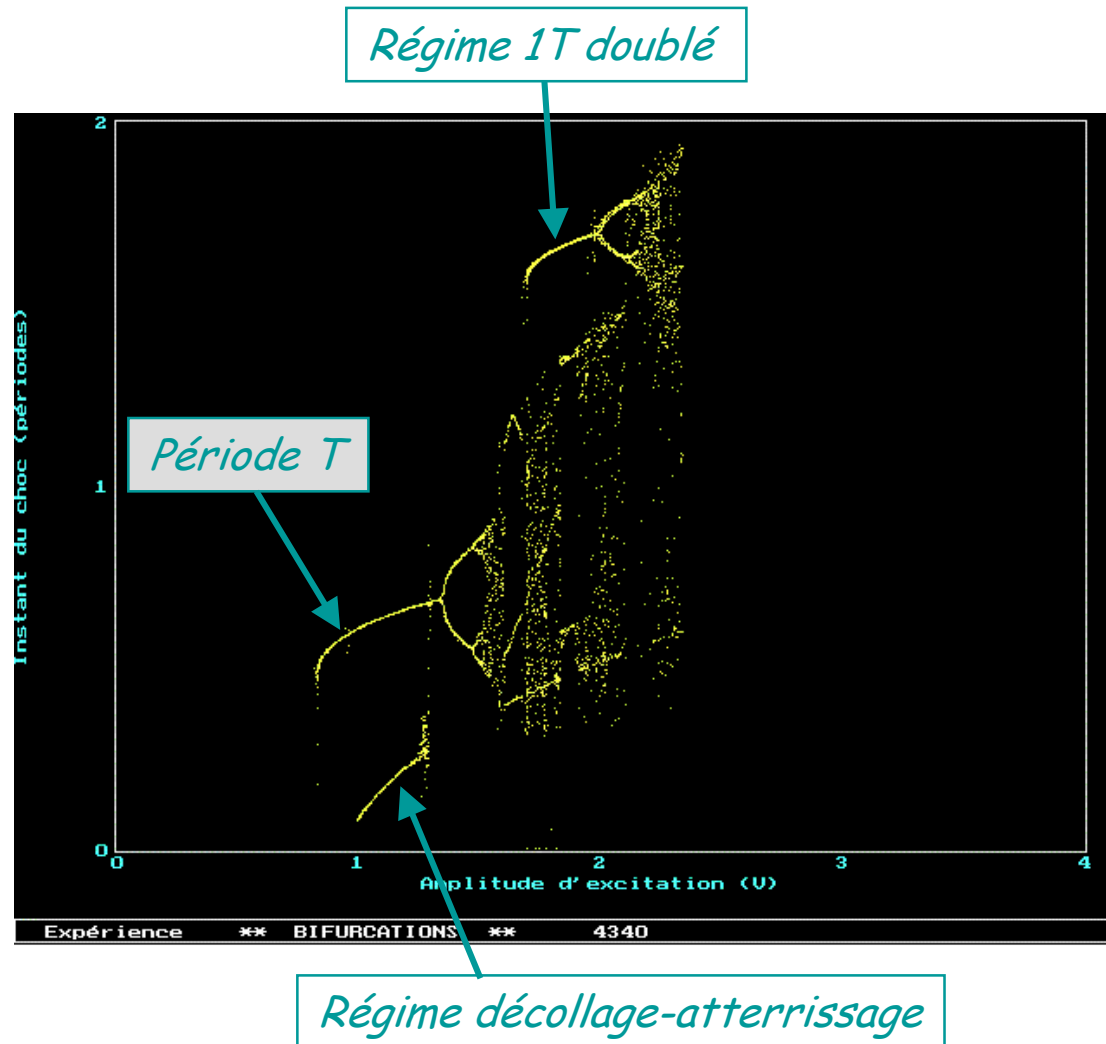
# Régime décollage-atterrissage



# Régime 1T doublé



# Vue générale du diagramme de bifurcations (*Expérimental*)



# Plongée dans le chaos

- Espace des phases et attracteurs
- L'attracteur étrange
- La sensibilité aux conditions initiales
- Cycles périodiques, "fenêtres d'ordre"

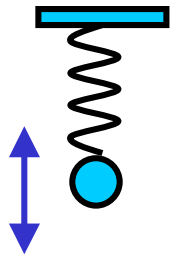


# Espace des phases

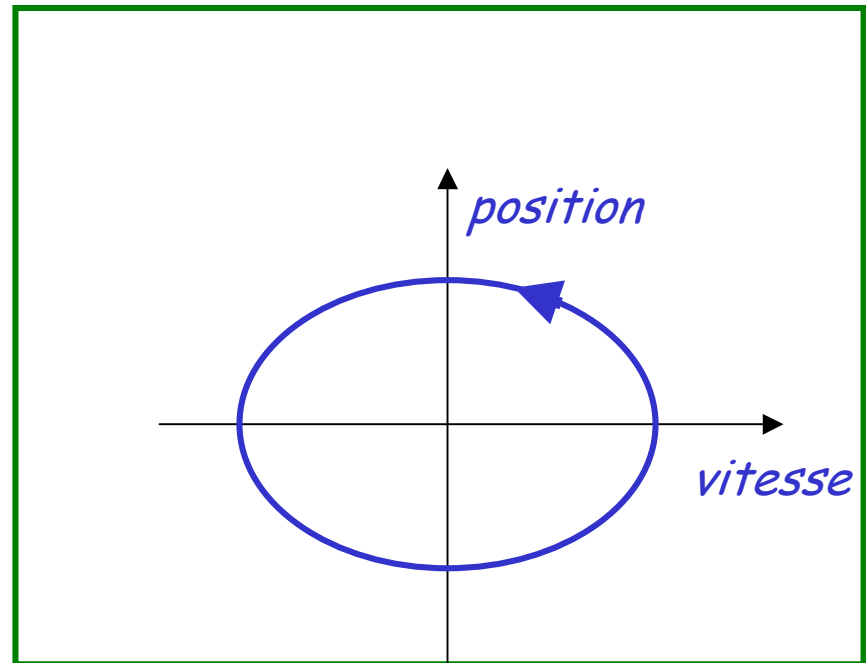
# Espace des phases

Pour un mouvement à une dimension, si les forces appliquées ne dépendent pas du temps, la connaissance de la vitesse et de la position à un instant donné suffisent à décrire l'ensemble des positions ultérieures.

↪ Le mouvement peut être décrit par une trajectoire dans les coordonnées *position-vitesse*



Exemple :  
masse au bout  
d'un ressort



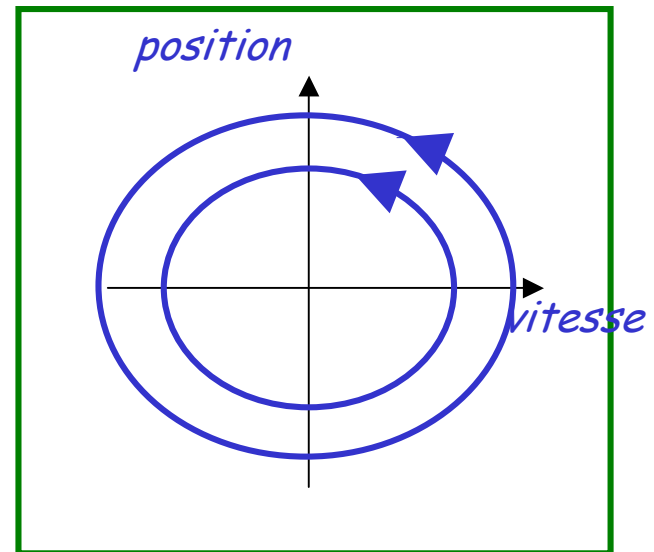
# Systemes non dissipatifs (Hamiltoniens)

Systemes pour lesquels l'énergie mécanique est conservée (sans frottements).

Une fois mis en mouvement, ils ne s'arrêtent plus.

Les trajectoires dans l'espace des phases dépendent des conditions initiales

Exemple : oscillateur non amorti pour deux positions de départ différentes



# Systemes dissipatifs (non Hamiltoniens)

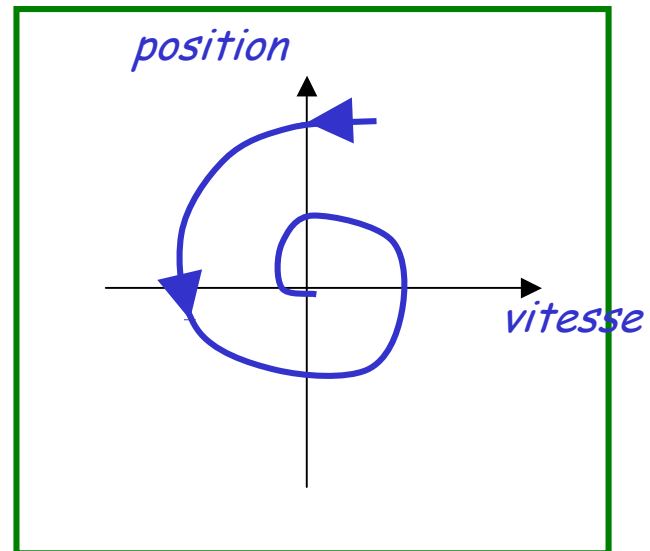
Systemes avec frottements => l'energie mecanique diminue.

Une fois mis en mouvement, ils finissent par s'arreter.

Les trajectoires dependent des conditions initiales au depart, puis finissent par un point fixe ou rien ne bouge

C'est le cas general dans la nature, que ce soit pour des systemes mecaniques ou d'autres systemes.

Exemple : oscillateur amorti



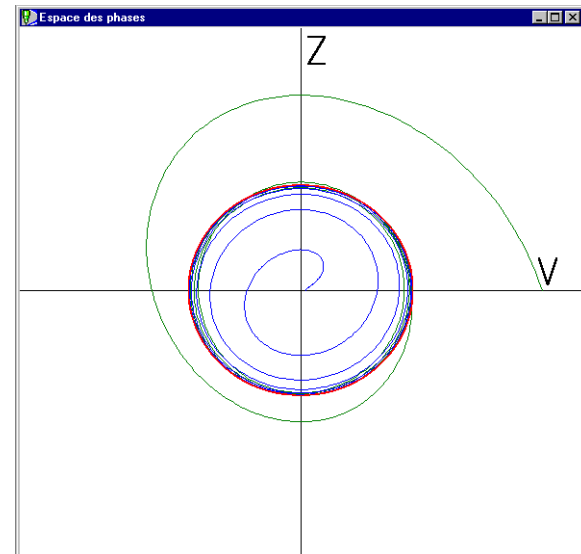
# Systemes dissipatifs entretenus

Systemes avec frottements => l'énergie mécanique diminue.

Un apport d'énergie permanent maintient le système hors de son état de repos

Les trajectoires dépendent des conditions initiales au départ, puis finissent sur un attracteur :

- point fixe
- cycle limite
- attracteur étrange



oscillateur amorti

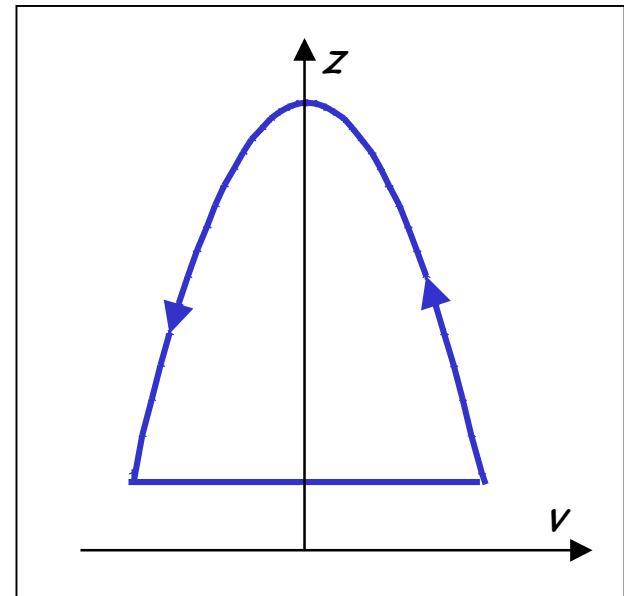
# Systemes dissipatifs entretenus

Systemes avec frottements => l'energie mecanique diminue.

Un apport d'energie permanent maintient le systeme hors de son etat de repos

Les trajectoires dependent des conditions initiales au depart, puis finissent sur un attracteur :

- point fixe
- cycle limite
- attracteur etrange



Bille rebondissante

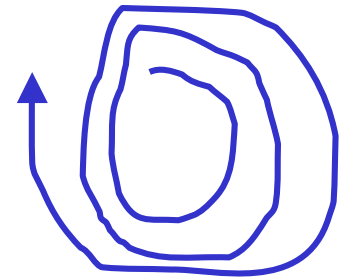
# Espace des phases - dimension

- Un point donné de l'espace des phases détermine une trajectoire unique qui passe par ce point.

↳ Deux trajectoires ne peuvent pas se couper.

- Dans le chaos, la trajectoire n'est pas périodique

- Pour un système à un degré de liberté, on ne peut pas avoir de trajectoire infinie qui ne repasse jamais par le même point dans une région limitée du plan (position-vitesse) ?

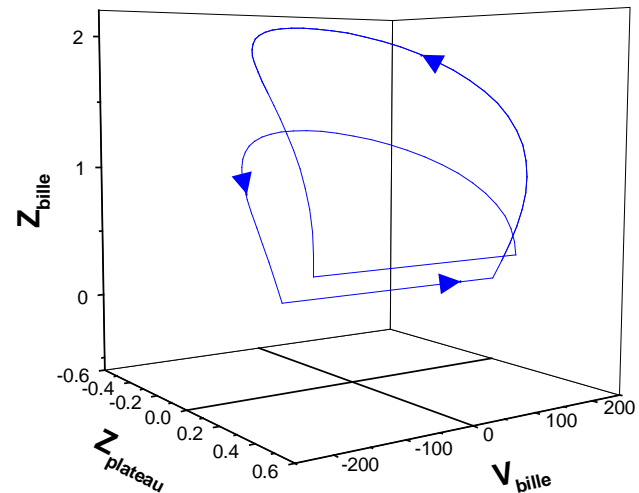
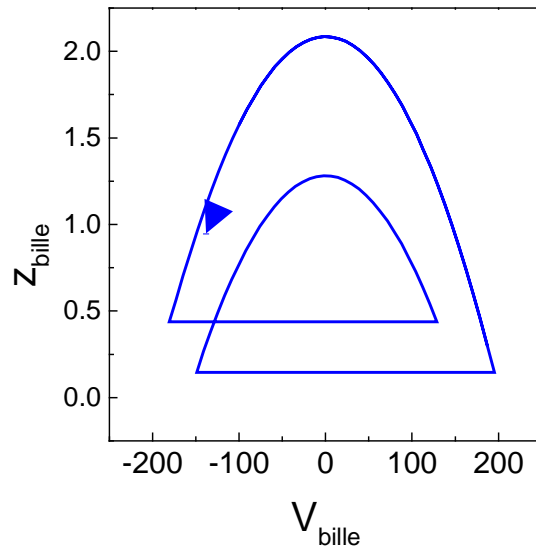


La prise en compte de l'excitation ajoute une nouvelle dimension :

Pour connaître l'avenir de la bille, il faut connaître non seulement sa position et sa vitesse à un instant donné, mais aussi à quel moment elle rencontrera le plateau  $\Rightarrow$  troisième dimension

# Espace des phases (expérience de la bille)

## Expérience de la bille, cycle de période 2



Projection dans le plan  $Z_{\text{bille}}, V_{\text{bille}}$

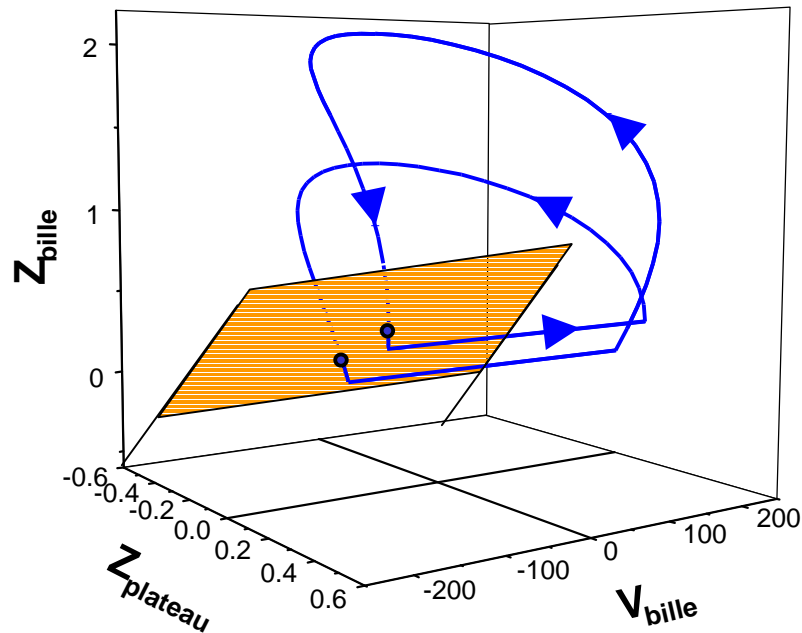
Représentation à trois dimensions

**Dans l'espace des phases complet (3D) les courbes ne se recoupent pas**

↪ En régime chaotique, la trajectoire s'enroule indéfiniment dans une région limitée de l'espace sans jamais se recouper :  
"attracteur étrange"



# Section de Poincaré

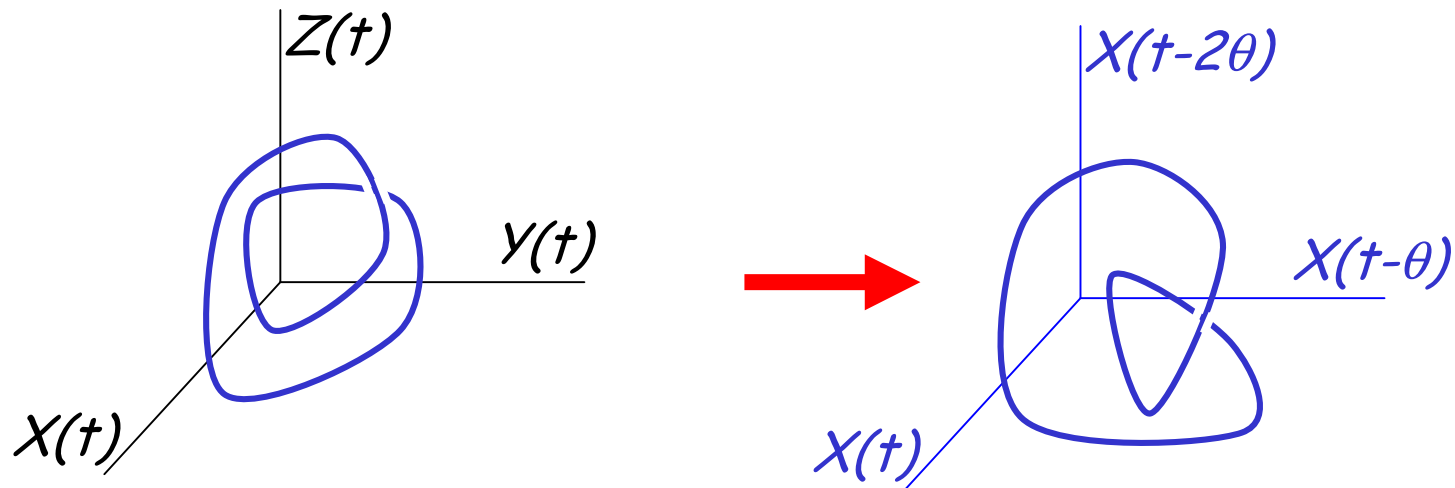


En coupant la trajectoire dans l'espace des phases par un plan (ou une surface), on ramène l'étude d'une courbe à trois dimensions à l'étude d'une suite de points dans un plan.

# Reconstruction de l'espace des phases

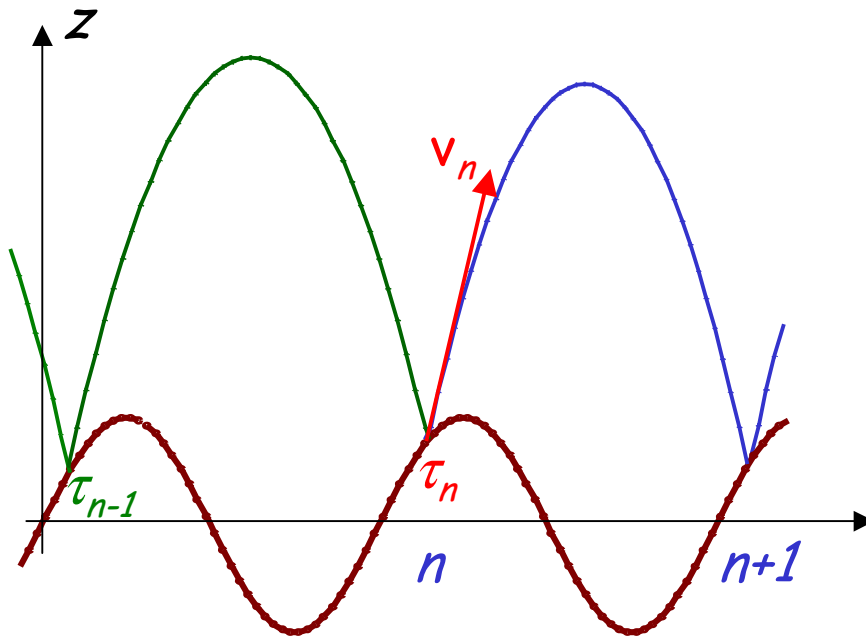
Dans la plupart des systèmes, on ne peut pas mesurer assez de variables simultanément pour avoir une description complète de l'espace des phases.

On peut reconstruire une courbe qui a les mêmes propriétés que la trajectoire dans l'espace des phases en mesurant les valeurs d'une seule variable à des temps décalés:



↪ Possibilité d'étudier des systèmes dont on connaît peu de choses

# Reconstruction de l'espace des phases - explication



Pour connaître la trajectoire après le choc  $n$  il faut connaître  $\tau_n$  et  $v_n$  ( $z_n$  est connu par la trajectoire du plateau)

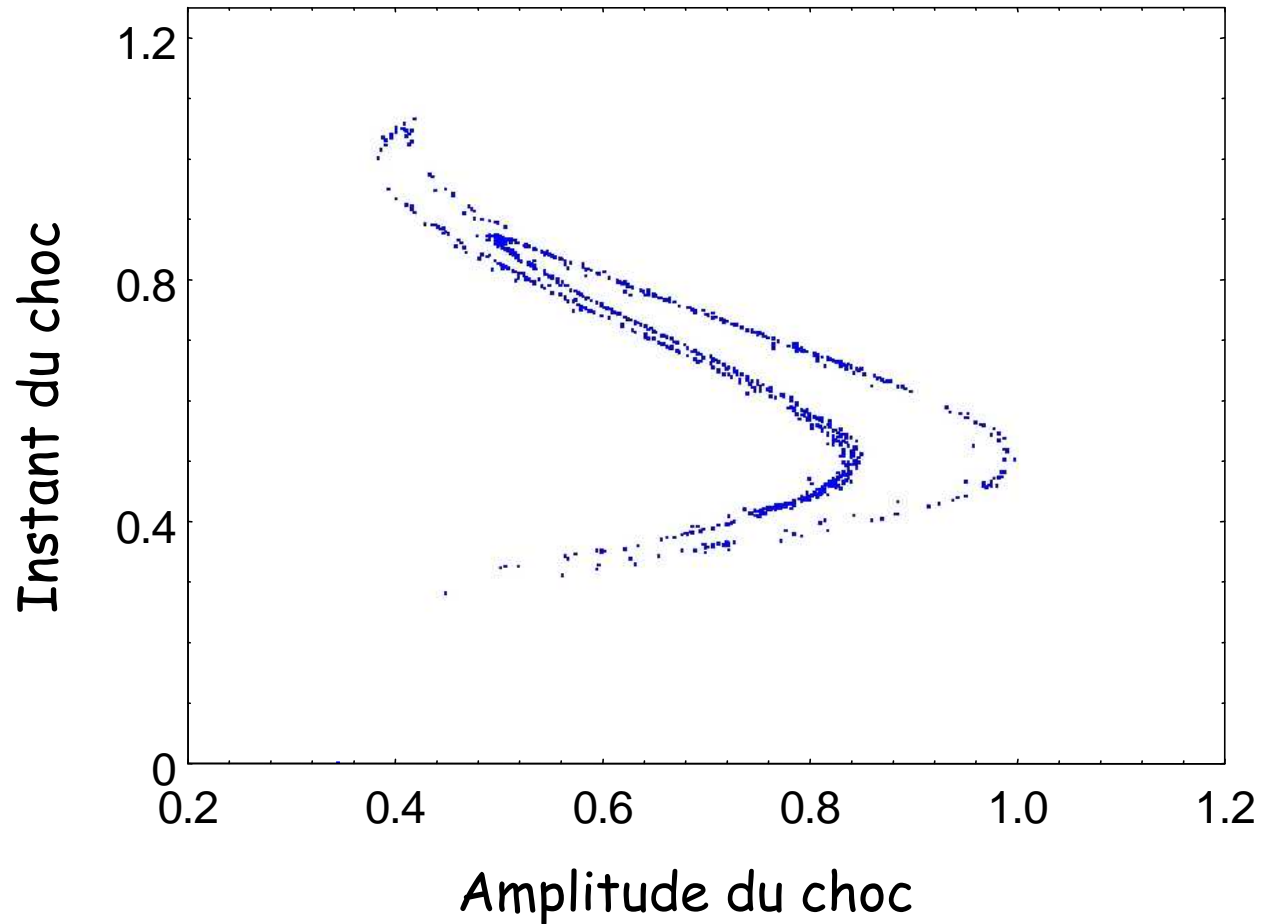
Mais la trajectoire avant le choc  $n$ , et donc la vitesse  $v_n$ , est entièrement déterminée si on connaît  $\tau_{n-1}$ .

*Le couple  $\tau_{n-1}, \tau_n$  donne les mêmes informations que le couple  $v_n, \tau_n$*

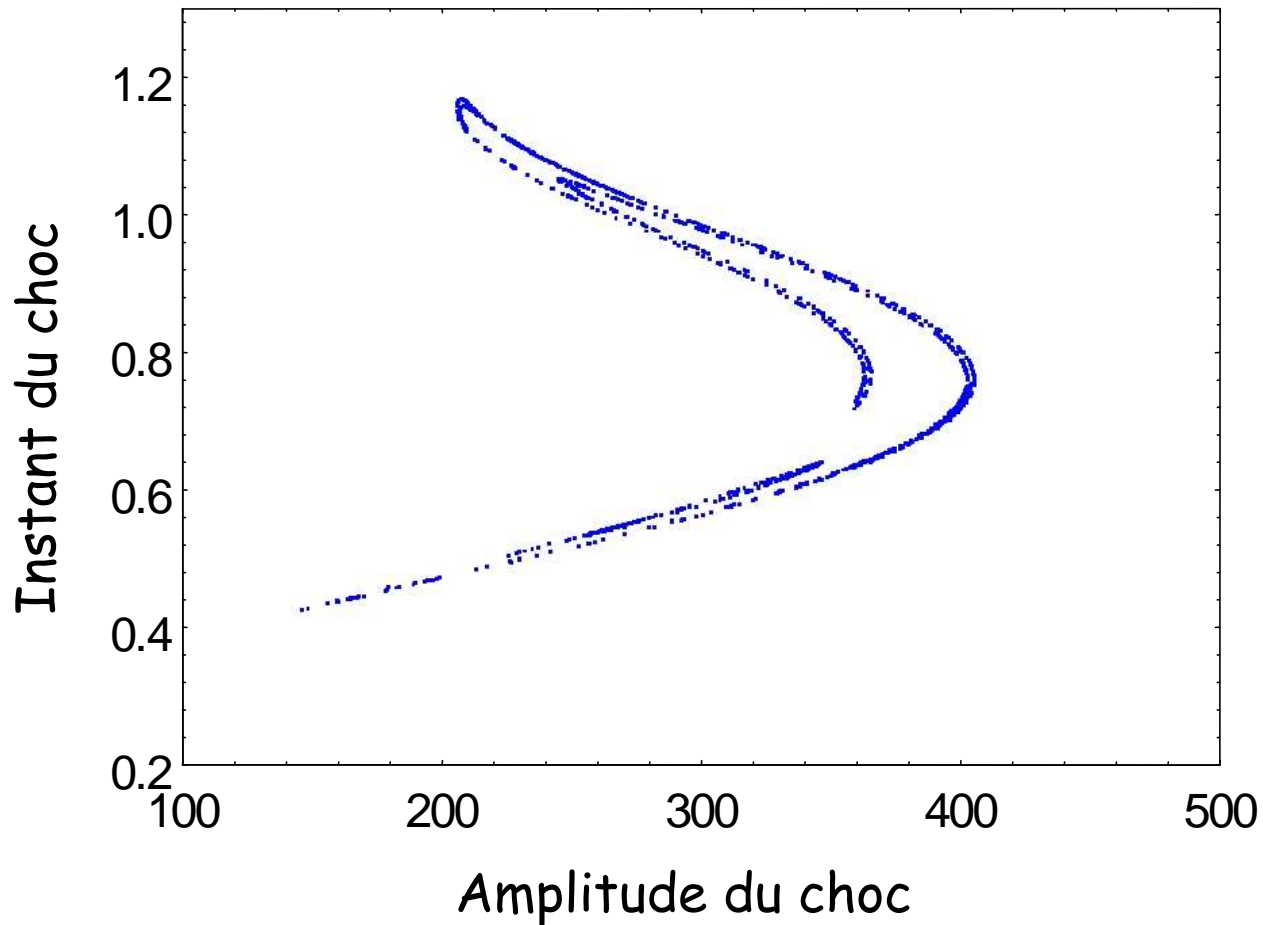
↪ Reconstruction de la section de Poincaré

# Attracteur étrange

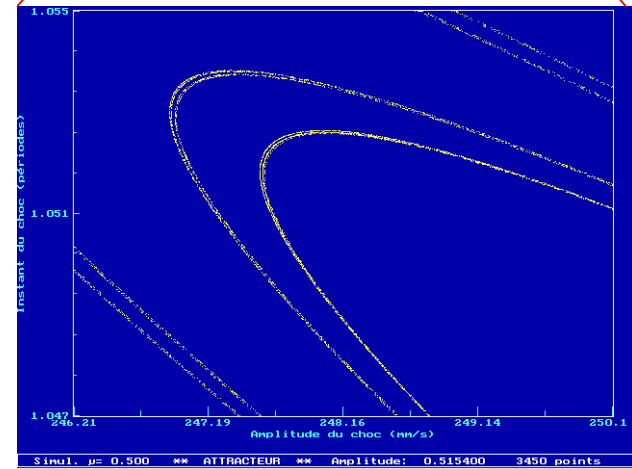
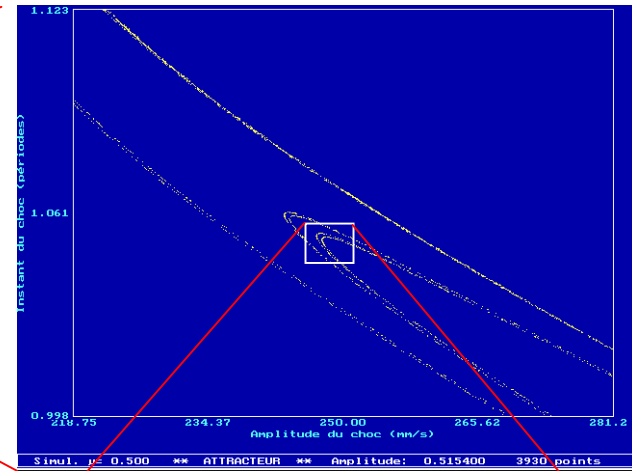
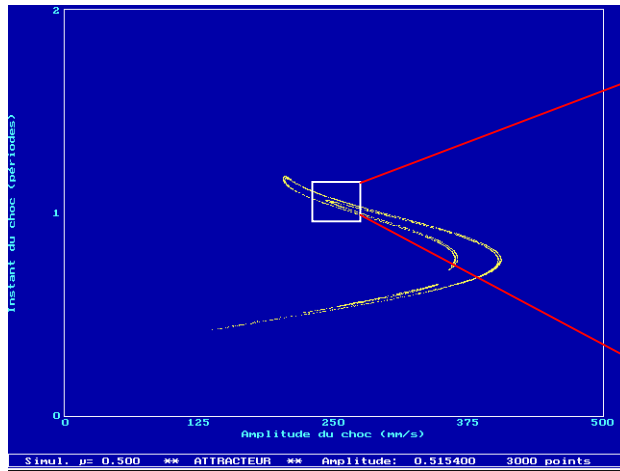
# Attracteur étrange, section de Poincaré (*Expérimental*)



# Attracteur étrange, section de Poincaré (*Simulation*)



# Autosimilarité de l'attracteur



Autosimilarité  
Caractère fractal

# Propriétés de l'attracteur étrange

La trajectoire est confinée dans une région limitée de l'espace des phases.

C'est un attracteur : partant de conditions initiales quelconques, on se retrouve très vite dans cette région

=> stabilité "en travers"

Il n'y a plus de période (période infinie)

=> on ne repasse jamais par le même point

Autosimilarité et caractère fractal



# Problèmes de stabilité

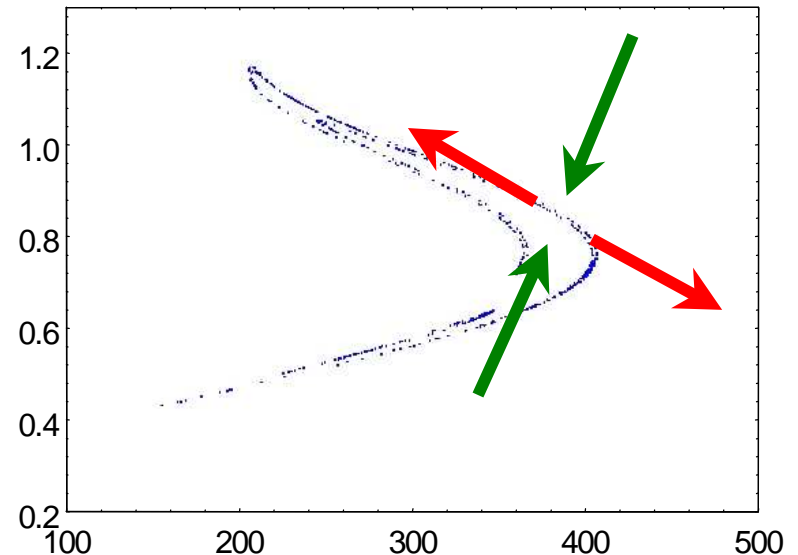
L'attracteur étrange est un attracteur : partant de conditions initiales quelconques, on finira sur l'attracteur

↪ Stabilité "en travers"

A l'intérieur de l'attracteur on ne repasse jamais par le même point.

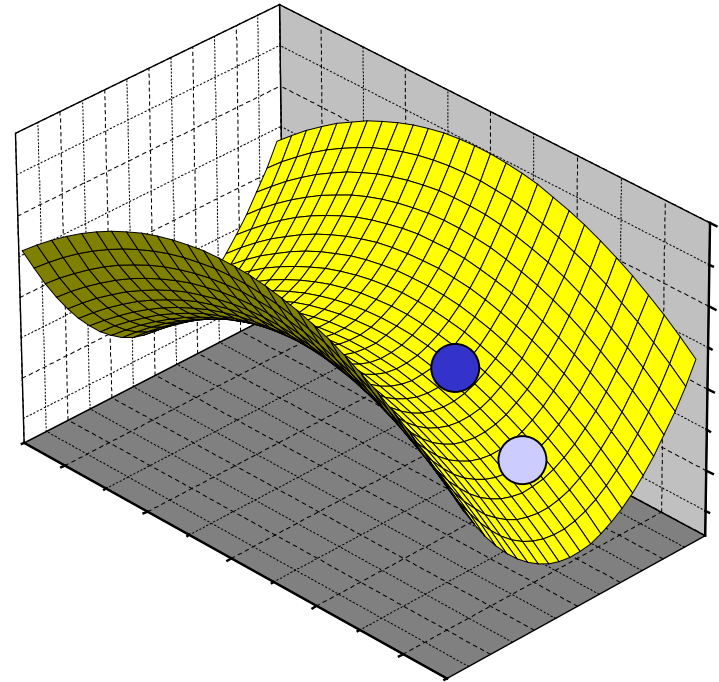
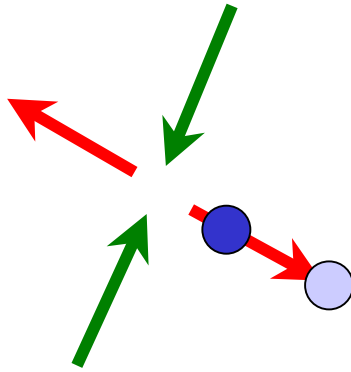
Partant de deux points voisins, les points successifs s'écartent indéfiniment (sensibilité aux conditions initiales).

↪ Instabilité "en long"



# Stabilité, représentation imagée

Représentation au niveau d'un point de la section de Poincaré

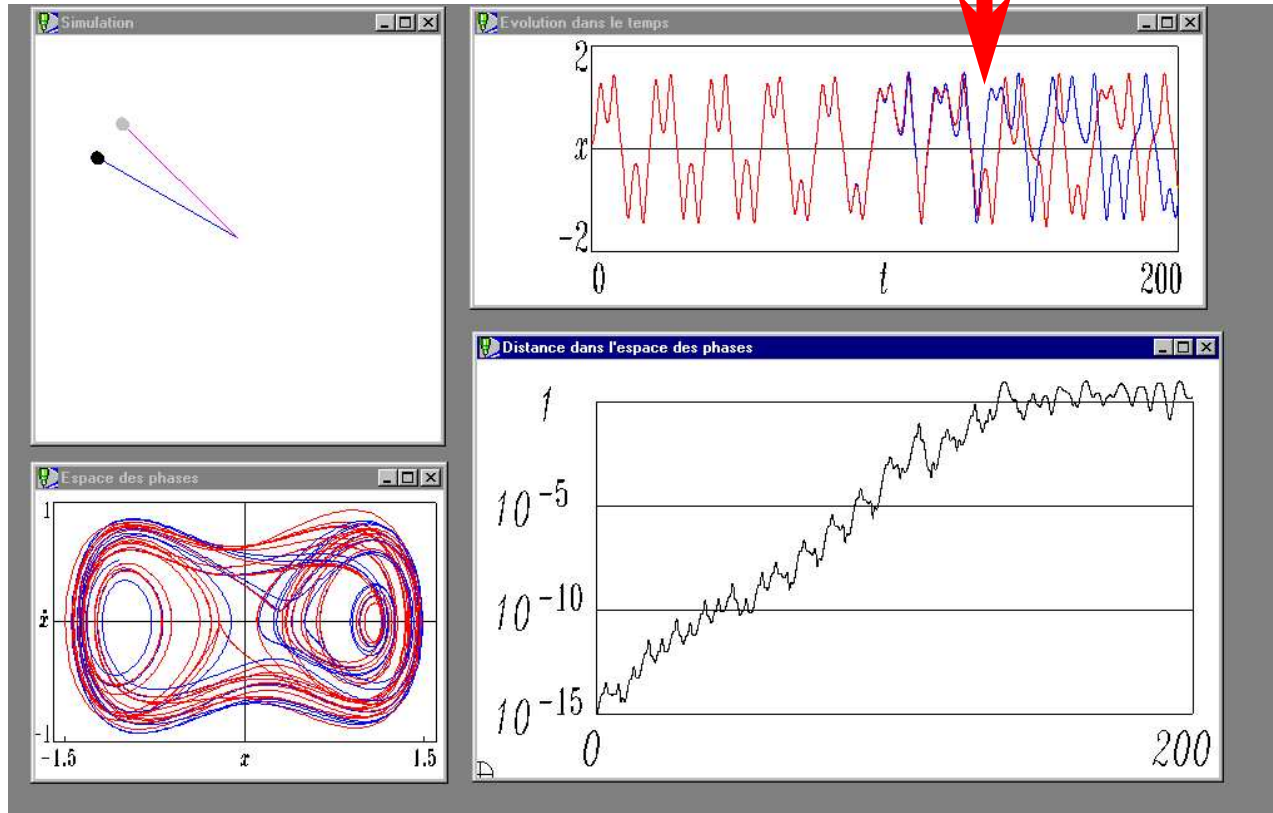


Localement l'attracteur a une structure de col :

- "en travers", les points sont ramenés vers la vallée,
- "en long", ils descendent la pente et s'écartent les uns des autres

# Sensibilité aux conditions initiales

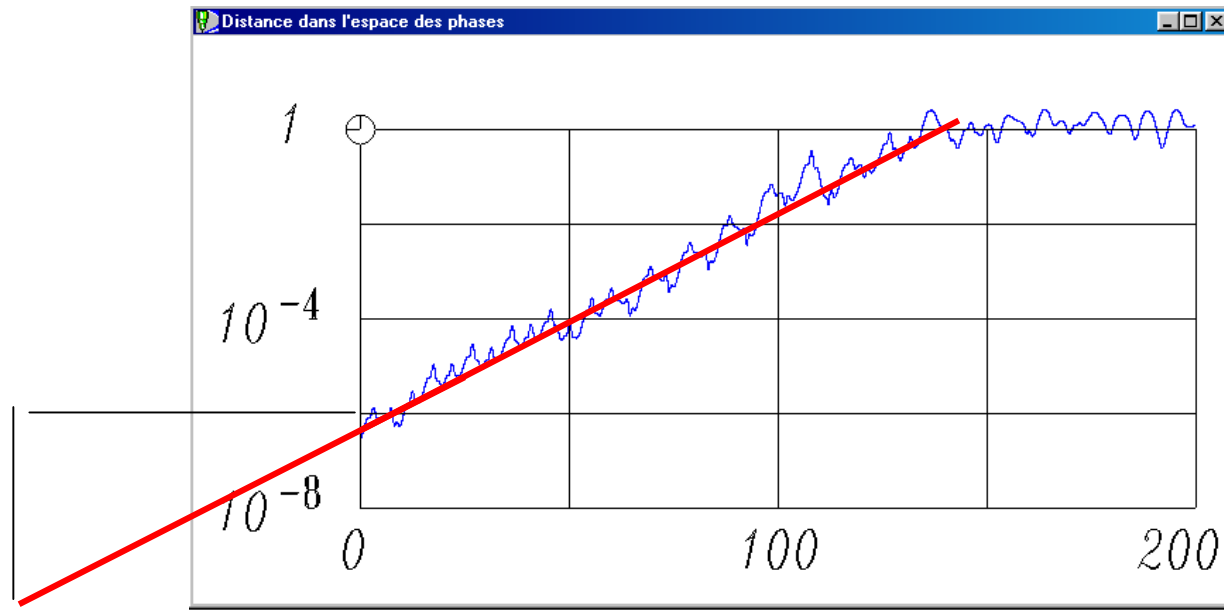
# Sensibilité aux conditions initiales: Duffing



Les deux trajectoires semblent identiques pendant tout le début  
- à l'échelle de l'observateur, elles se séparent "tout d'un coup"

↳ donne l'impression d'un événement extérieur fortuit

# Sensibilité aux conditions initiales : divergence exponentielle

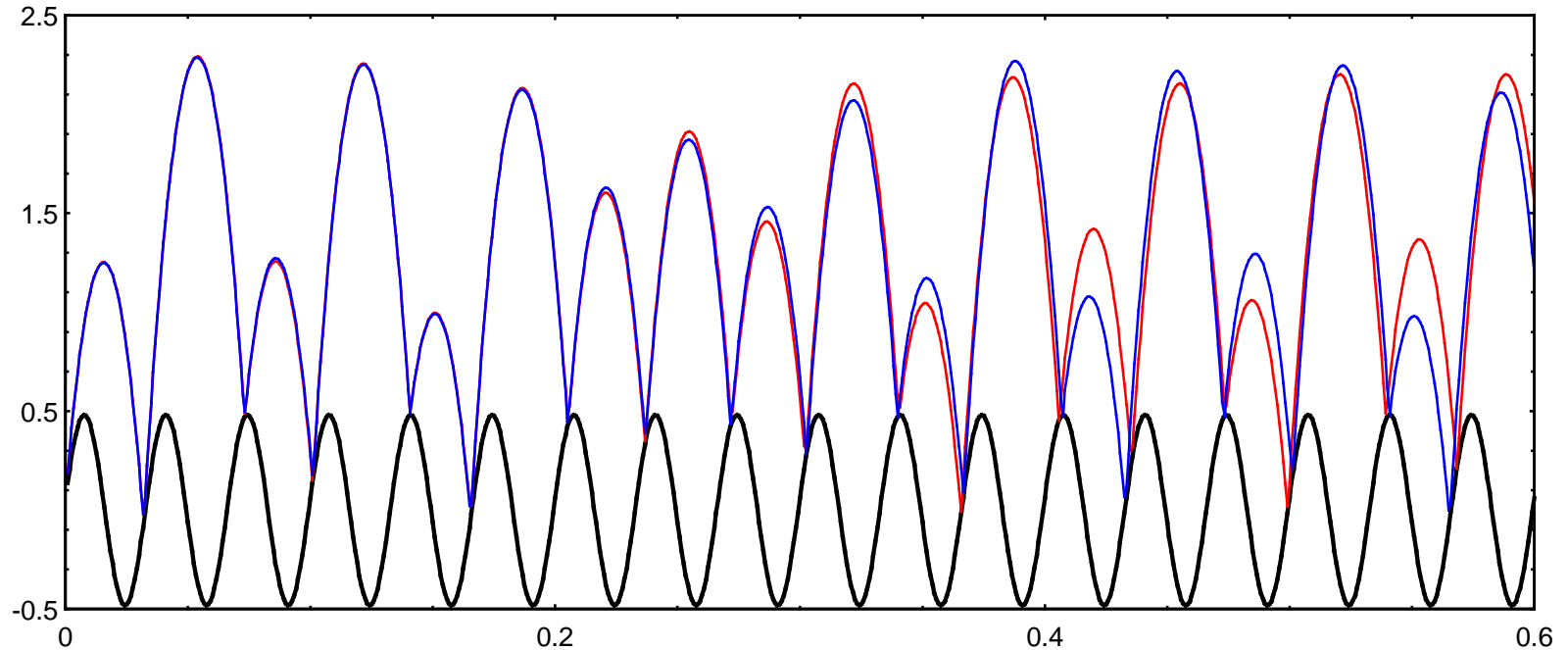


L'écart entre les deux trajectoires augmente exponentiellement depuis le début, il est multiplié par 100 toutes les 50 secondes.

↳ même en augmentant la précision au départ, il arrivera toujours un moment où l'erreur devient de la taille du système

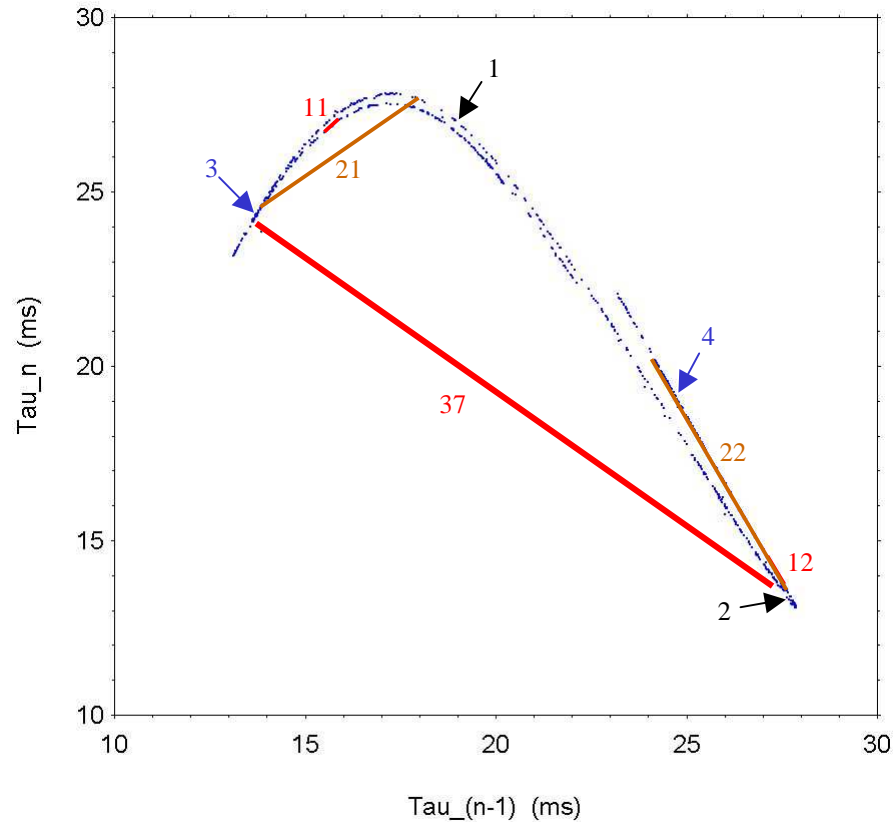
**Horizon de prédictibilité**

# Sensibilité aux conditions initiales : bille qui rebondit (simulation)



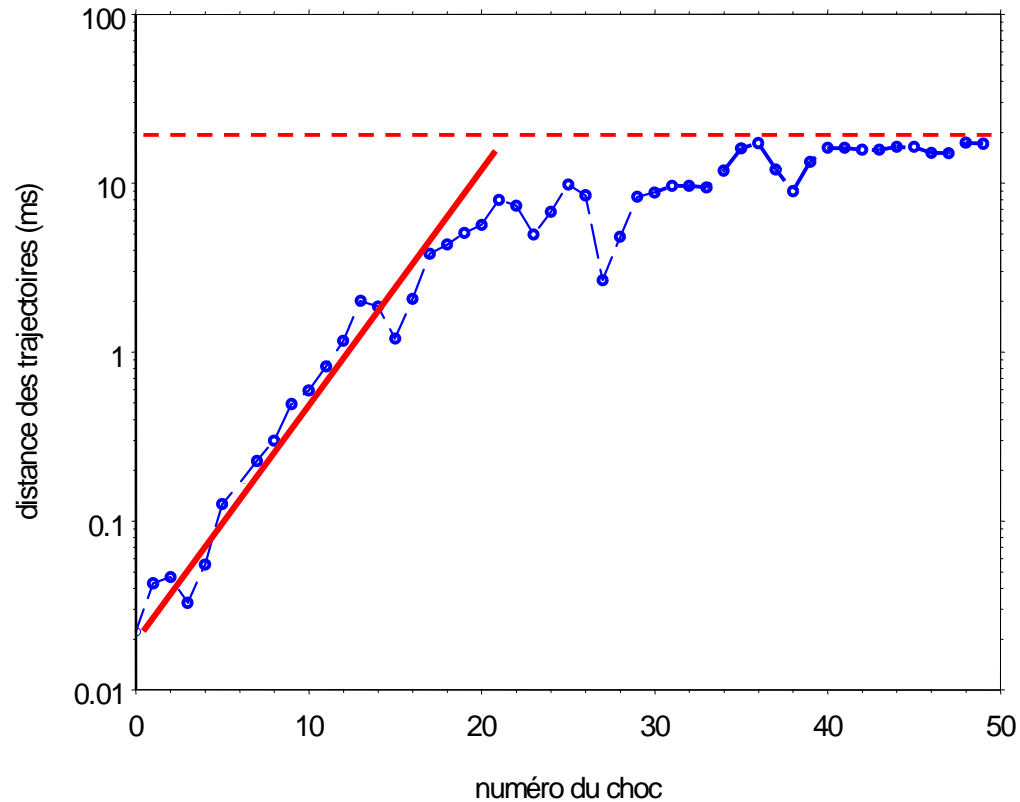
Deux trajectoires, commencées "presque" dans les mêmes conditions (simulation).

# Sensibilité aux conditions initiales : bille qui rebondit (expérience)



On prend un premier point au hasard  
On attend de trouver un point à une distance minimum  
On garde les 50 points qui suivent

# Sensibilité aux conditions initiales : bille qui rebondit (expérience)



Horizon de prédictibilité :  $\approx 20$  chocs



# Déterminisme et imprédictibilité

Autres exemples : les jeux de hasard

Roulette



Loto



Après un grand nombre de chocs, la trajectoire des boules devient complètement imprédictible, bien que les mouvements soient régis par lois déterministes de la mécanique classique

# Déterminisme et imprédictibilité

Le système de départ est gouverné par des équations très simples.

déterminisme

Mais, à cause de la sensibilité aux conditions initiales, quelles que soient les améliorations apportées à la mesure de l'état initial, on ne peut pas prédire l'avenir de la trajectoire au delà d'un certain temps.

imprédictibilité

*Exemple classique : l' " effet papillon "*

*le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut créer un ouragan au Texas*

Conséquence : les météorologistes ne peuvent pas prédire précisément le temps plus de quelques jours à l'avance

*(mais c'est un mauvais exemple...)*

# Contrôle du chaos

- Stabilité et instabilité  
point de vue mathématique
- Le contrôle du chaos :  
techniques et exemples
- La richesse du chaos :  
contrôle et maîtrise

# Stabilité et instabilité

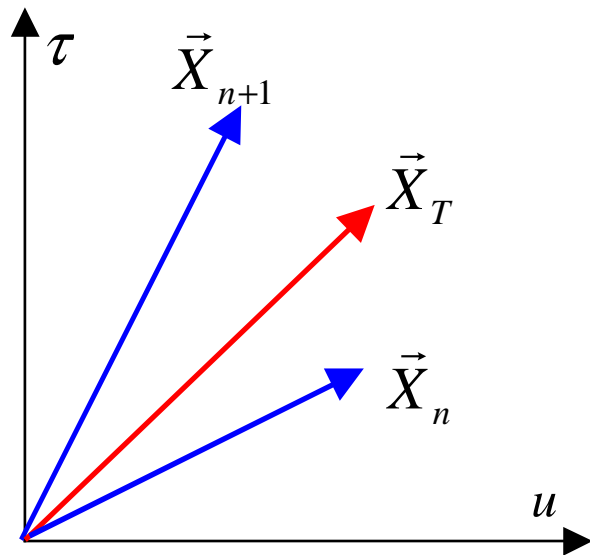
Point de vue mathématique

# Stabilité, point de vue mathématique (1)

Plaçons nous dans la section de Poincaré de coordonnées

$\tau_n$  : instant du choc  $n$

$u_{in} = v_{in}/g$  : vitesse initiale après le choc (en unités de temps)



Dans cette section le rebond  $n$  est représenté par un vecteur  $X_n$   
La suite des rebonds est donnée par une application  $F$ :

$$X_{n+1} = F(X_n)$$

Le régime de période  $T$  correspond à un vecteur fixe  $X_T$ :

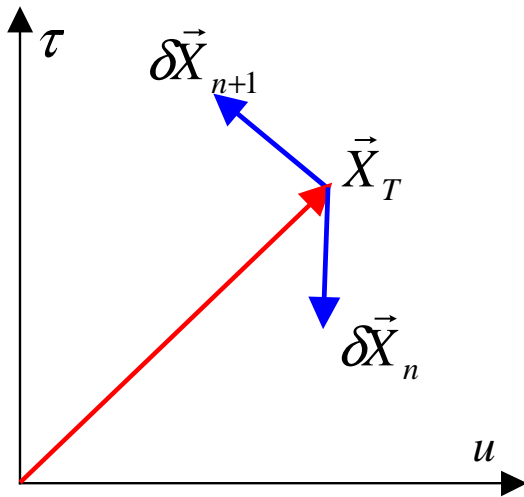
$$X_T = F(X_T)$$

## Stabilité, point de vue mathématique (2)

Au voisinage de  $\vec{X}_T$  on peut linéariser l'application :

$$\vec{X}_n = \vec{X}_T + \delta\vec{X}_n, \vec{X}_{n+1} = \vec{X}_T + \delta\vec{X}_{n+1} \approx \vec{X}_T + M \cdot \delta\vec{X}_n$$

$M$  étant la matrice des dérivées partielles de  $F$ .



L'évolution des écarts au régime périodique est donc donnée par :

$$\delta\vec{X}_{n+1} = M \cdot \delta\vec{X}_n$$

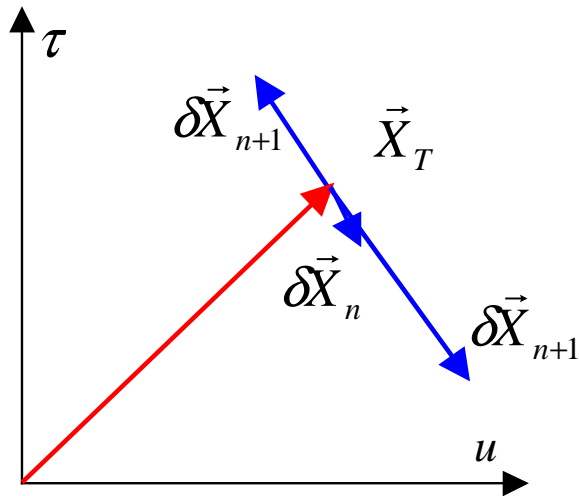
Pour ce système, la matrice  $M$  peut être calculée exactement :

$$\begin{pmatrix} \delta\tau_{n+1} \\ \delta u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mu \\ \pi(1 - \mu) \cdot \cotg(\omega\tau_p) & \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \cdot \cotg(\omega\tau_p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\tau_n \\ \delta u_n \end{pmatrix}$$

## Stabilité, point de vue mathématique (3)

La matrice  $M$  a deux valeurs propres,  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$ , et deux vecteurs propres correspondants, notés  $\mathbf{W}_a$  et  $\mathbf{W}_b$ .

La stabilité du régime dépend du module de ces valeurs propres.



Supposons qu'au choc  $n$ , une petite perturbation crée un écart  $\delta \mathbf{X}_n$ . Cet écart peut être décomposé dans la base des vecteurs propres :

$$\delta \mathbf{X}_n = \alpha \mathbf{W}_a + \beta \mathbf{W}_b$$

Après  $p$  chocs, cet écart sera devenu

$$\delta \mathbf{X}_{n+p} = \alpha \lambda_a^p \mathbf{W}_a + \beta \lambda_b^p \mathbf{W}_b$$

Si les deux valeurs propres ont un module inférieur à 1, l'écart tend vers zéro, le régime est stable.

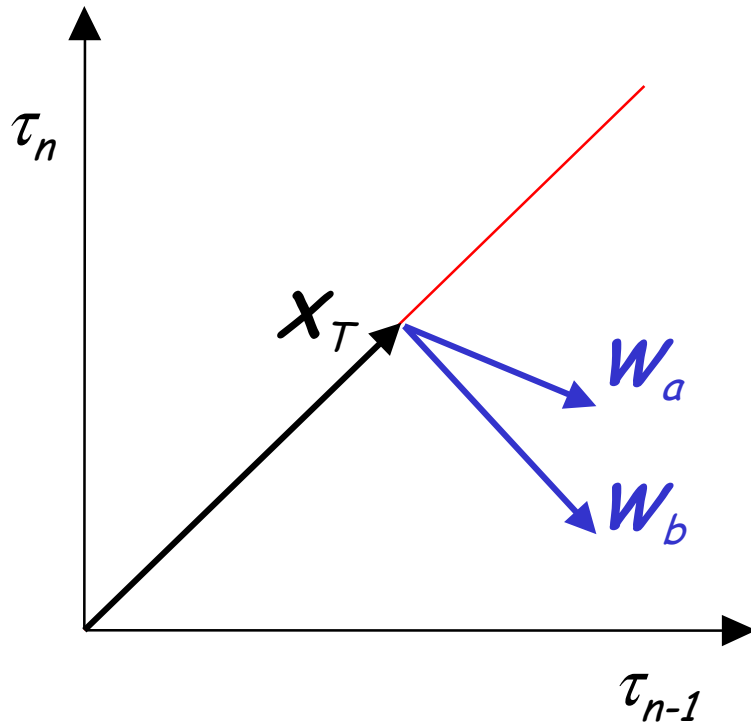
Si l'une des deux a un module supérieur à 1, l'écart augmente indéfiniment, le régime est instable.

# Représentation dans la section $\tau_n - \tau_{n-1}$

La nouvelle matrice  $M'$  est obtenue facilement à partir de  $M$  :

$$\begin{pmatrix} \tau_{n+1} \\ \tau_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a + \lambda_b & D \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_n \\ \tau_{n-1} \end{pmatrix}$$

où  $D$  est le déterminant de  $M$



Les valeurs propres de  $M'$ ,  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$ , sont les mêmes que celles de  $M$ , ses deux vecteurs propres  $w_a$  et  $w_b$  peuvent être pris sous la forme :

$$w_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_a \end{pmatrix}$$

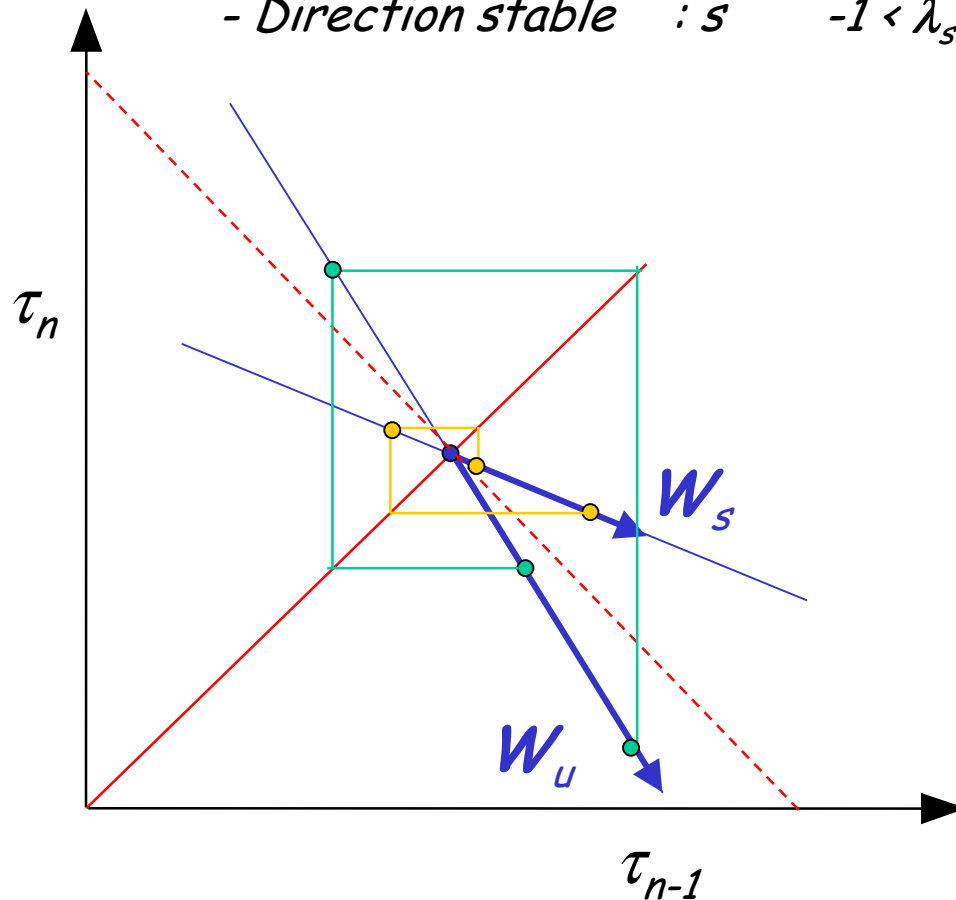
$$w_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_b \end{pmatrix}$$



# Evolution dans la section $\tau_n - \tau_{n-1}$

Valeurs propres et vecteurs propres au delà de la première bifurcation :

- Direction instable :  $u$       $\lambda_u < -1$
- Direction stable :  $s$       $-1 < \lambda_s < 0$



On montre que  $\lambda_u \lambda_s = \mu^2$

↳  $\lambda_u \lambda_s < 1$

↳ Une seule direction est instable

Ecart dans la direction stable

Ecart dans la direction instable

# Contrôle du chaos

# Contrôle du chaos : idée de base

Puisque le battement d'aile d'un papillon peut créer une tempête, écrasez le papillon et vous éviterez la tempête.

*(Mais le mouvement de votre main en provoquera peut être une plus forte.)*

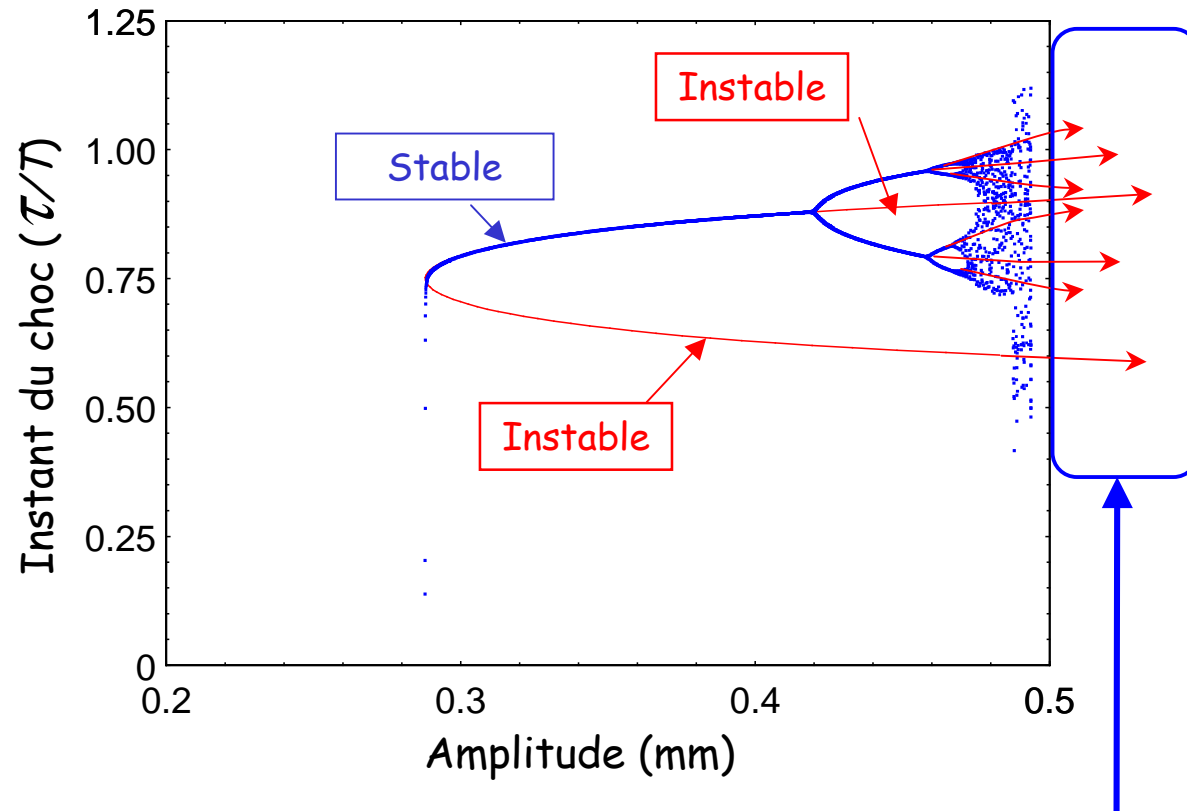
*d'après Ian Stewart "Dieu joue-t-il aux dés ?"*

En résumé :

- En régime chaotique, un écart infime des trajectoires peut produire une différence importante au bout d'un certain temps.

↳ Avec quelques perturbations minimales mais bien contrôlées on doit donc pouvoir faire faire "ce qu'on veut" au système

# Orbites périodiques instables

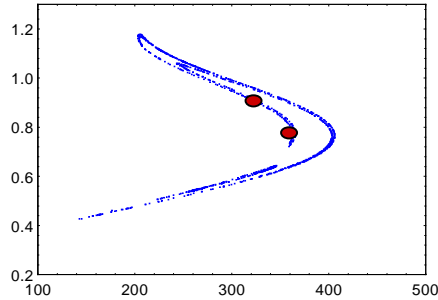


Une infinité de trajectoires instables se prolongent dans le chaos

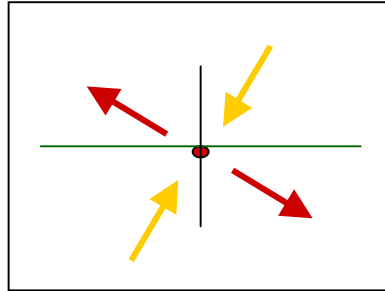
Le but du contrôle est de stabiliser ces trajectoires

# La méthode "OGY"

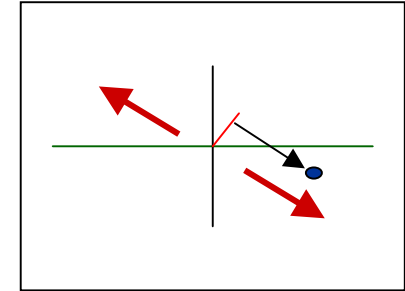
Technique proposée par Ott, Grebogi et Yorke



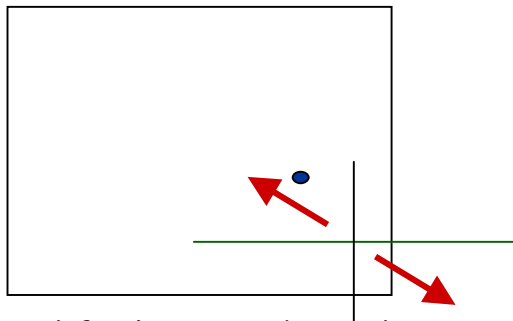
On sélectionne une orbite instable dans l'attracteur



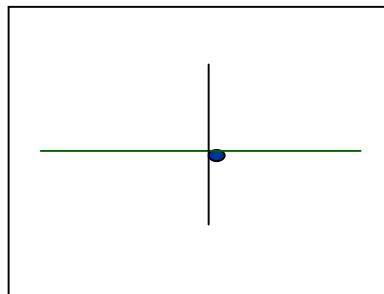
Sur un des points de l'orbite on repère la direction instable



Au premier passage, on repère l'écart du point mesuré dans cette direction



On modifie le paramètre de contrôle pour déplacer l'orbite dans le sens qui corrigera cet écart

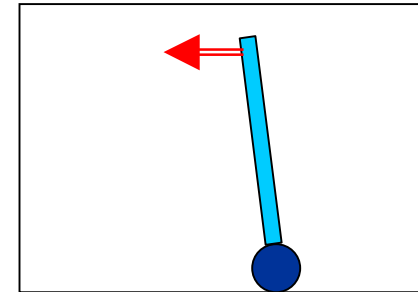
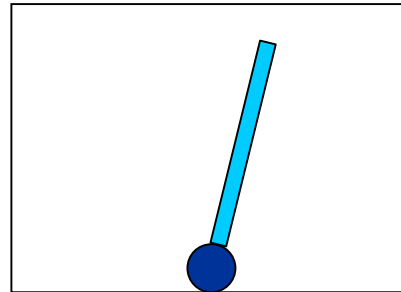
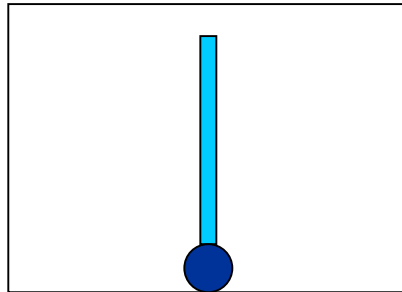
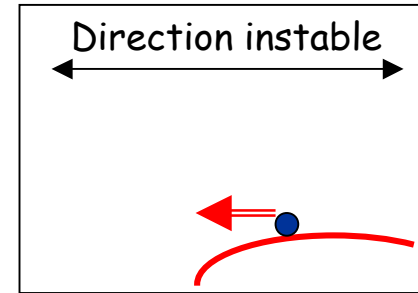
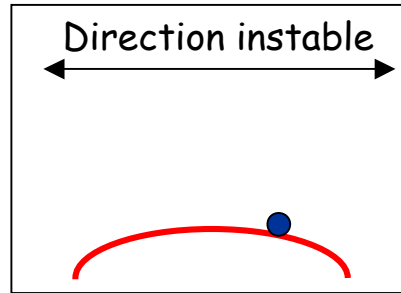
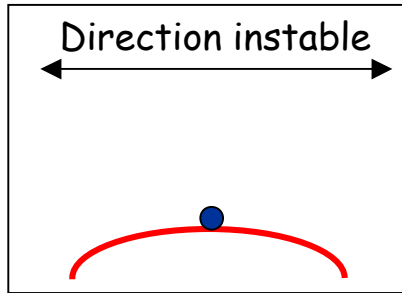


Au passage suivant, le point est ramené vers l'orbite initiale dans la direction instable.

Contrôle effectué à partir d'une mesure tous les deux tours seulement

# La méthode "OGY" (2)

Analogie avec l'équilibre d'un bâton sur la pointe

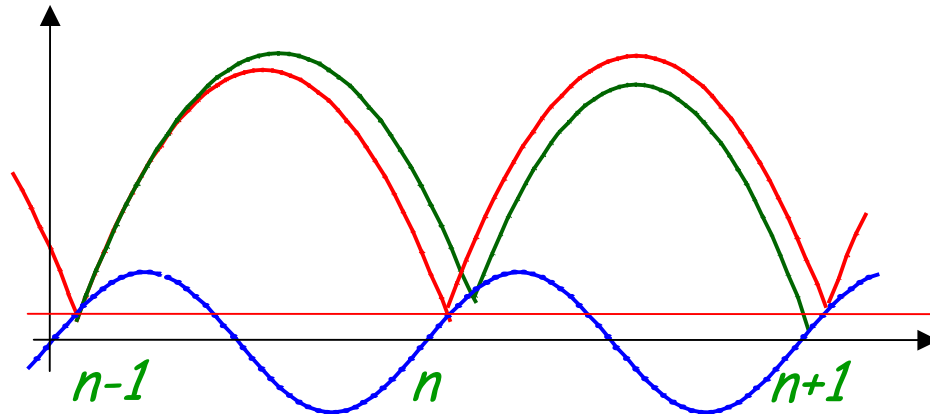


On repère l'écart

On modifie le paramètre de contrôle

# Contrôle du chaos dans l'expérience de la bille (méthode)

Stabilisation du régime de période T par une méthode "OGY simplifiée"



Si  $\tau_n > \tau_{n-1}$ , le choc  $n+1$  se produira à un temps où la vitesse du plateau est trop grande

↳ On corrige cet effet en diminuant l'amplitude à partir du choc  $n$ ,

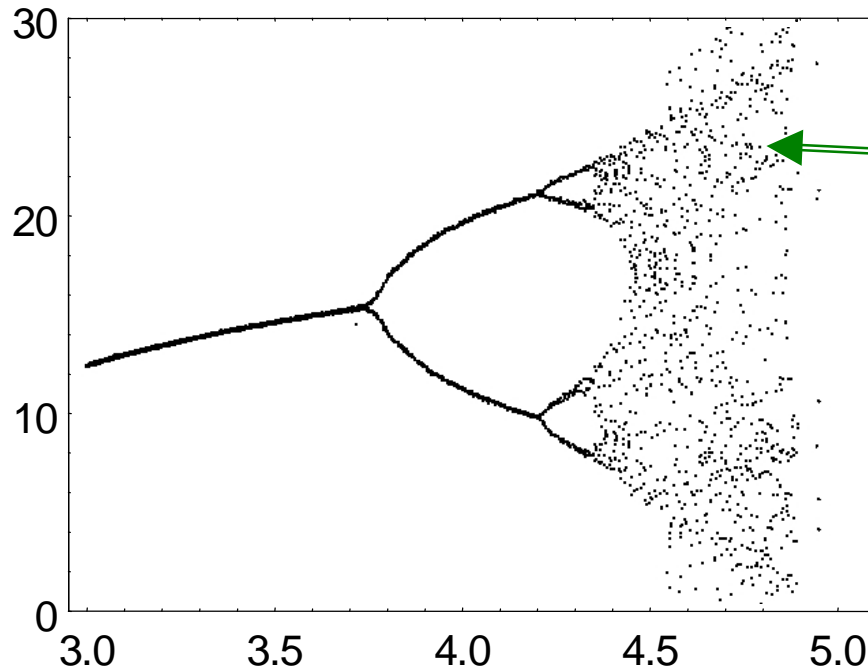
Le contrôle se limite donc à faire une correction d'amplitude  $\delta A_n$  après le choc  $n$  et jusqu'au choc  $n+1$ , correction donnée par :

$$\delta A_n = -k(\tau_n - \tau_{n-1}),$$

le coefficient  $k$  positif est déterminé empiriquement

# Contrôle du chaos dans l'expérience de la bille (résultat)

Stabilisation du régime de période T par une méthode "OGY simplifiée"



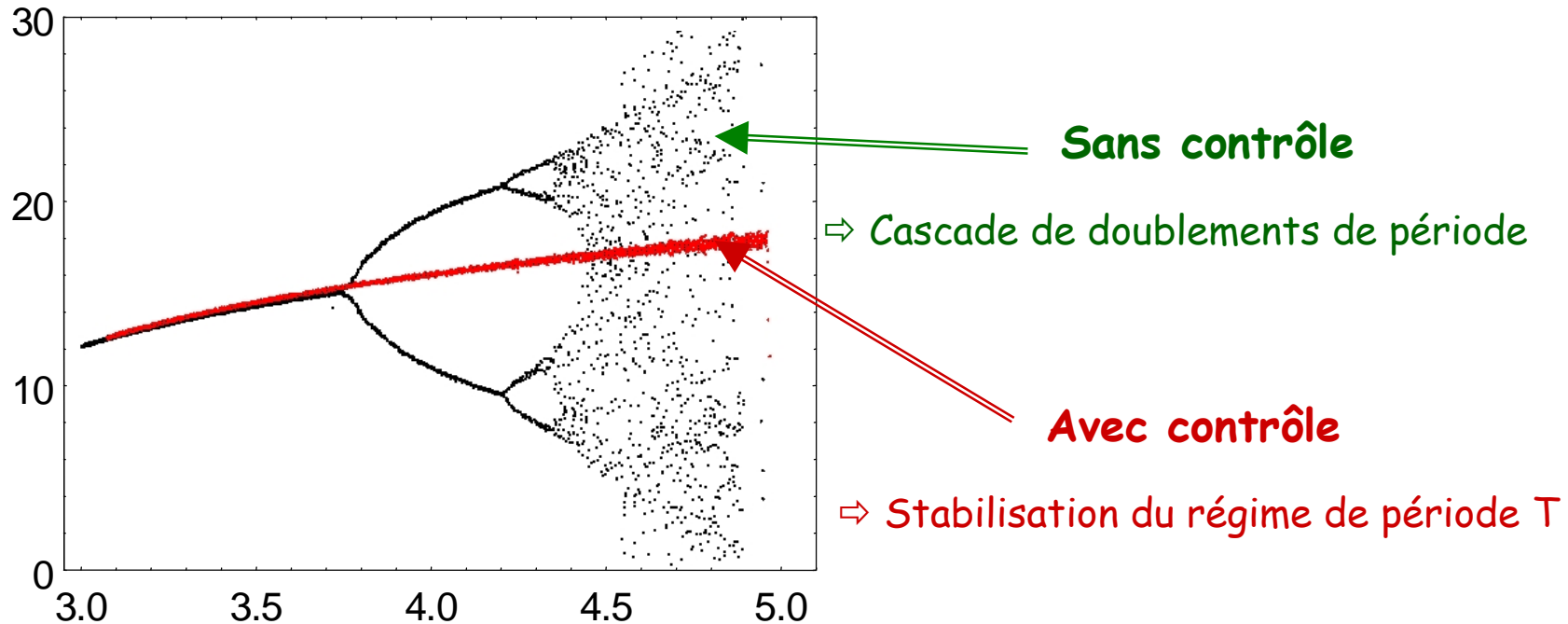
**Sans contrôle**

⇒ Cascade de doublements de période



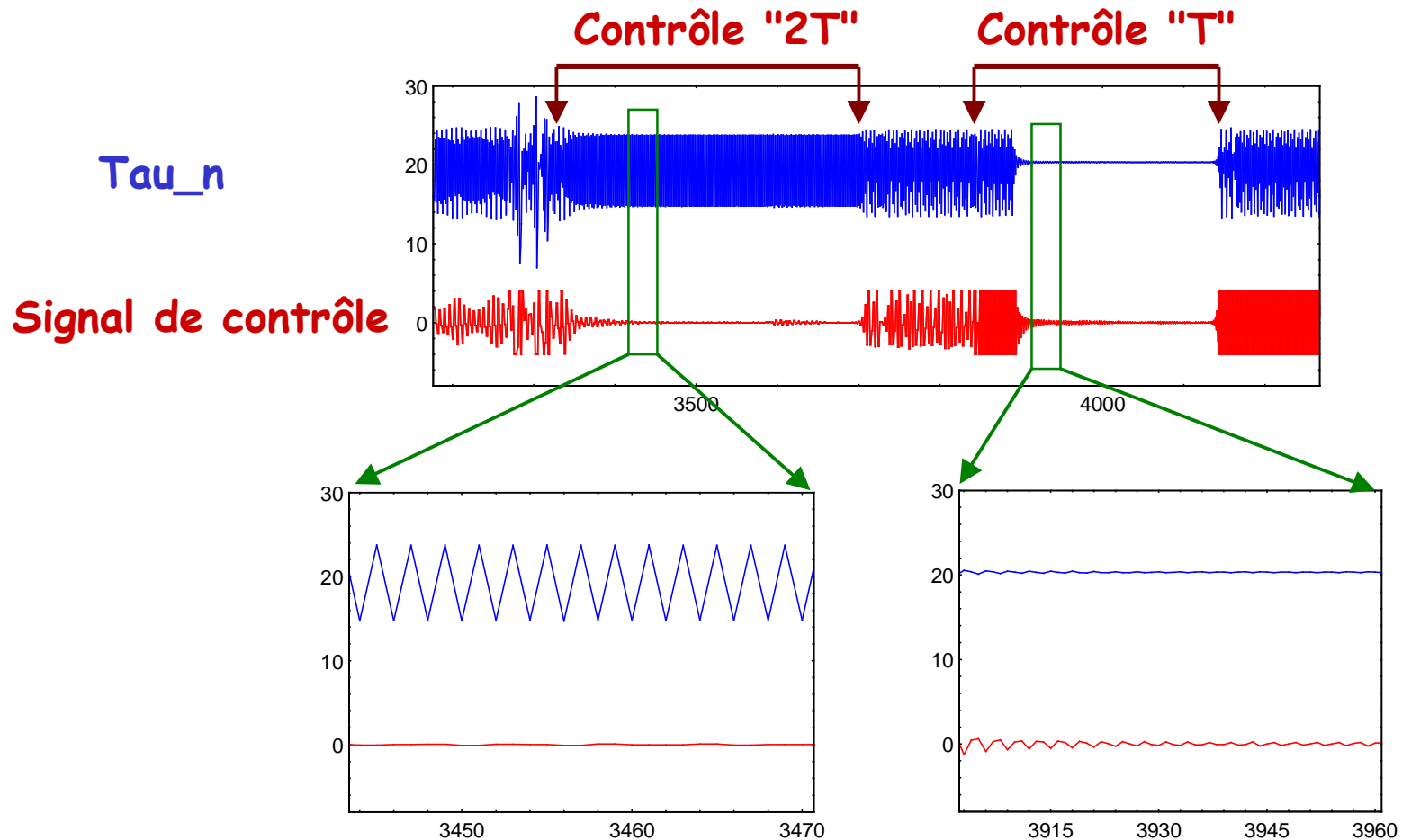
# Contrôle du chaos dans l'expérience de la bille (résultat)

Stabilisation du régime de période T par une méthode "OGY simplifiée"



# Contrôle du chaos dans l'expérience de la bille

Contrôle successif du régime de période  $2T$  puis de celui de période  $T$



# Laser : stabilisation de l'orbite $2T$

D'après S. Bielawski, D. Derozier et P. Glorieux "Chaos in Optics" SPIE 2039, 239 (1993)

Laser Néodyme à fibre, Contrôle par la méthode " O G Y "

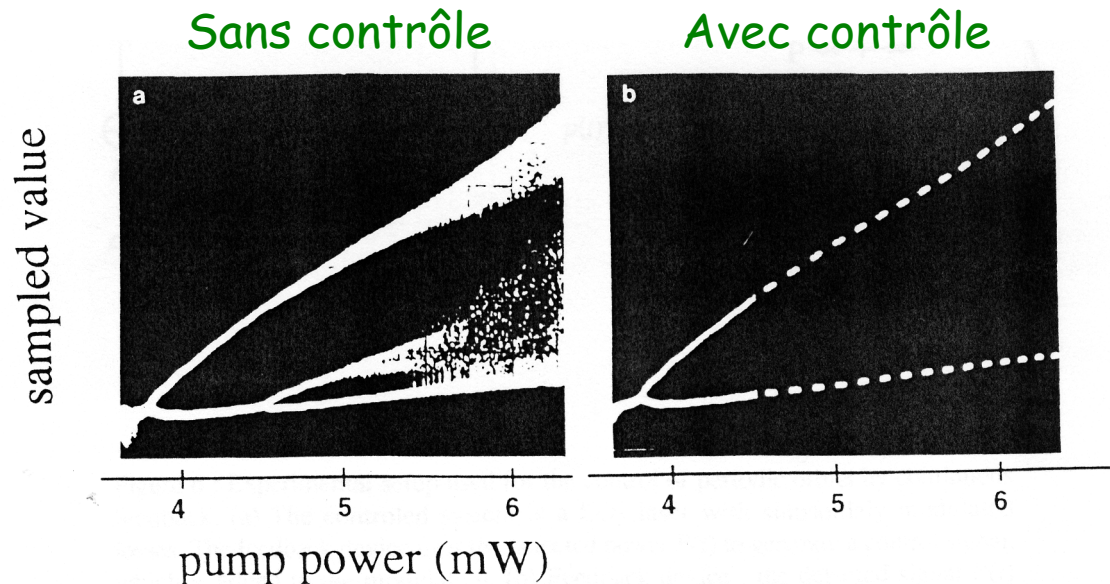
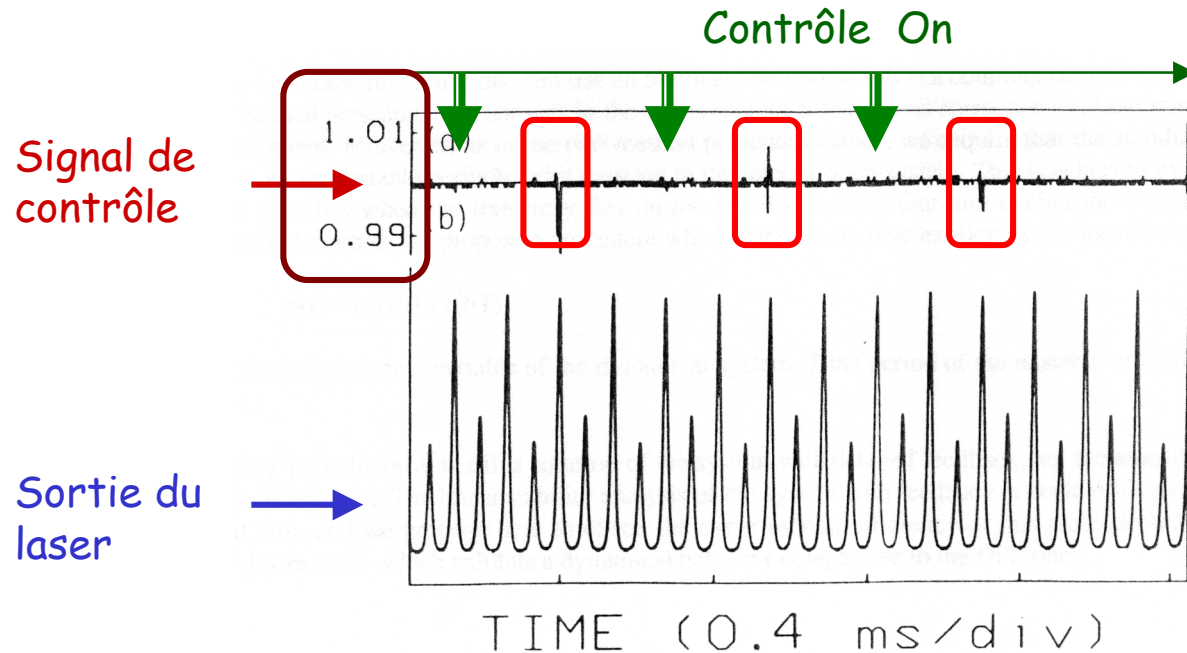


Figure 5 : Bifurcation diagrams without (a) and with (b) stabilization of the unstable  $2T$  orbit. The dashed line of (b) corresponds to samples of the unstable  $2T$  cycle. The  $2T$  stable orbit is destabilized at  $P = 4.4$  mW and the unstable orbit is embedded in the chaotic attractor for  $P > 5.6$  mW.

# Laser : stabilisation de l'orbite 4T

Laser Néodyme à fibre, Contrôle par la méthode " O G Y "



Signal de contrôle faible ( $< 1\%$ )

Contrôle appliqué toutes les 8 périodes seulement

# Un contrôle "en aveugle"

La méthode OGY (comme la plupart des autres) **ne nécessite pratiquement aucune connaissance du fonctionnement du système lui même.**

- La mesure d'une variable caractéristique à des intervalles de temps réguliers suffit pour construire l'attracteur.
- Les orbites instables peuvent être repérées dans l'attracteur mesuré.
- Le déplacement des orbites avec le paramètre de contrôle peut aussi être mesuré en répétant l'opération pour une valeur différente.

⇒ Intérêt d'une approche globale des phénomènes chaotiques

La richesse du chaos

Contrôle et maîtrise

# La richesse du chaos : le contrôle

## Contrôle d'orbites instables :

Pour un système donné, dans un régime de fonctionnement chaotique, l'attracteur étrange contient une infinité d'orbites instables

- ↳ - une infinité de modes de fonctionnement possibles,
- stabilisés par des interventions minimales
- sans modifications des paramètres principaux

Par opposition, pour modifier le fonctionnement d'un système linéaire il faut des modifications des paramètres de contrôle du même ordre de grandeur (*exemple: pendule entretenu*)

↳ Richesse et souplesse du fonctionnement chaotique contrôlé

# La richesse du chaos : la maîtrise

Pour les techniques classiques, le contrôle ne devient efficace que lorsque le système passe spontanément au voisinage de l'orbite désirée.

↳ Difficultés pour le début de la stabilisation et pour la transition entre deux orbites quelconques.

La maîtrise du chaos vers un but donné (*targetting*) consiste à créer une trajectoire artificielle en sautant d'une orbite à l'autre.

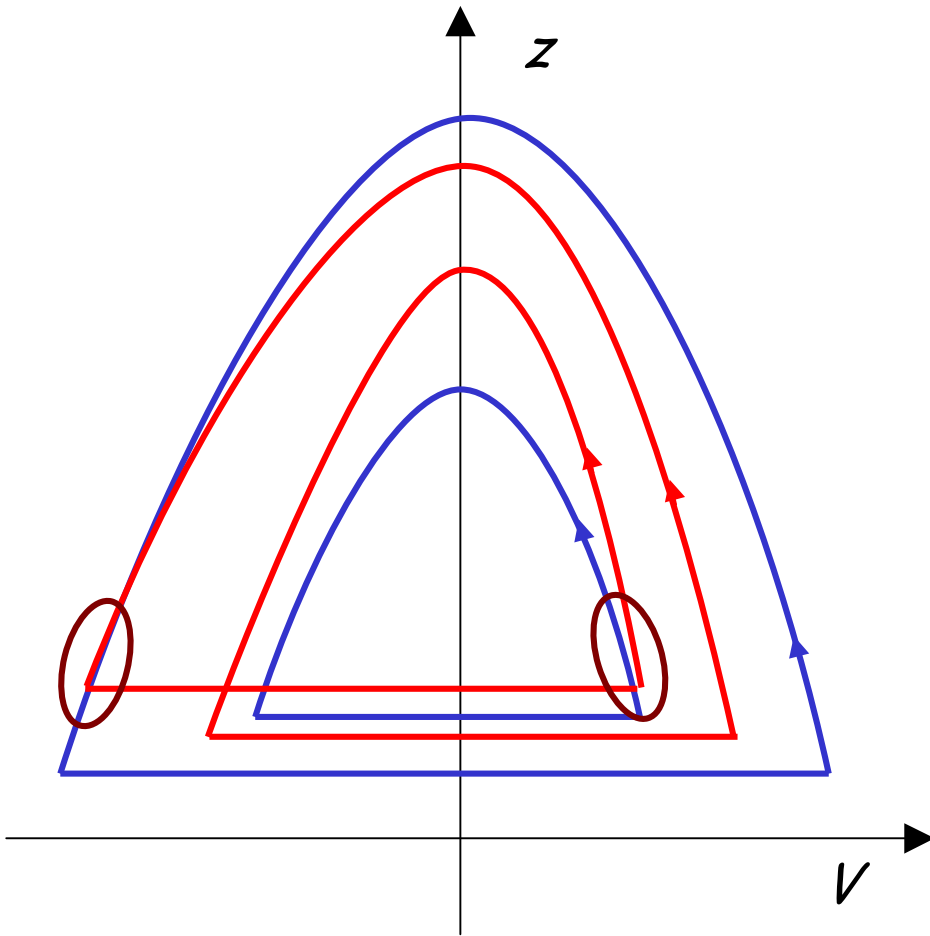
↳ On peut amener le système

- où on veut (dans les limites de l'attracteur étrange)
- sans modification des paramètres principaux
- avec simplement de petits coups de pouce sur un paramètre de régulation



# Maîtrise d'une trajectoire : exemple

Exemple imagé : expérience de la bille



Systeme stabilisé sur une orbite de période  $T$

On veut passer à l'orbite  $2T$  simple (un rebond normal toutes les deux périodes)

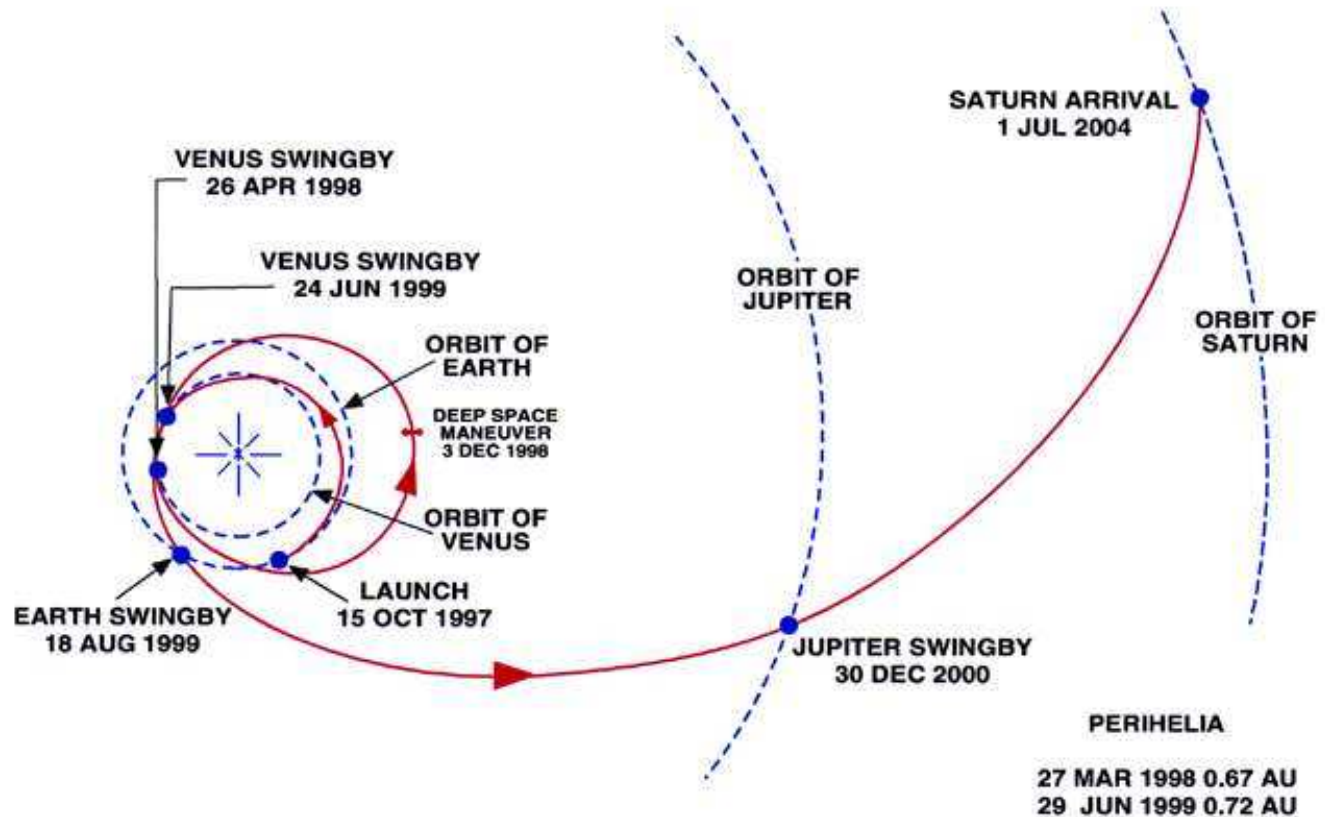
On choisit une orbite (ou une succession) qui s'approche des deux trajectoires.

On saute sur cette orbite quand elle est proche, on se laisse conduire par le système

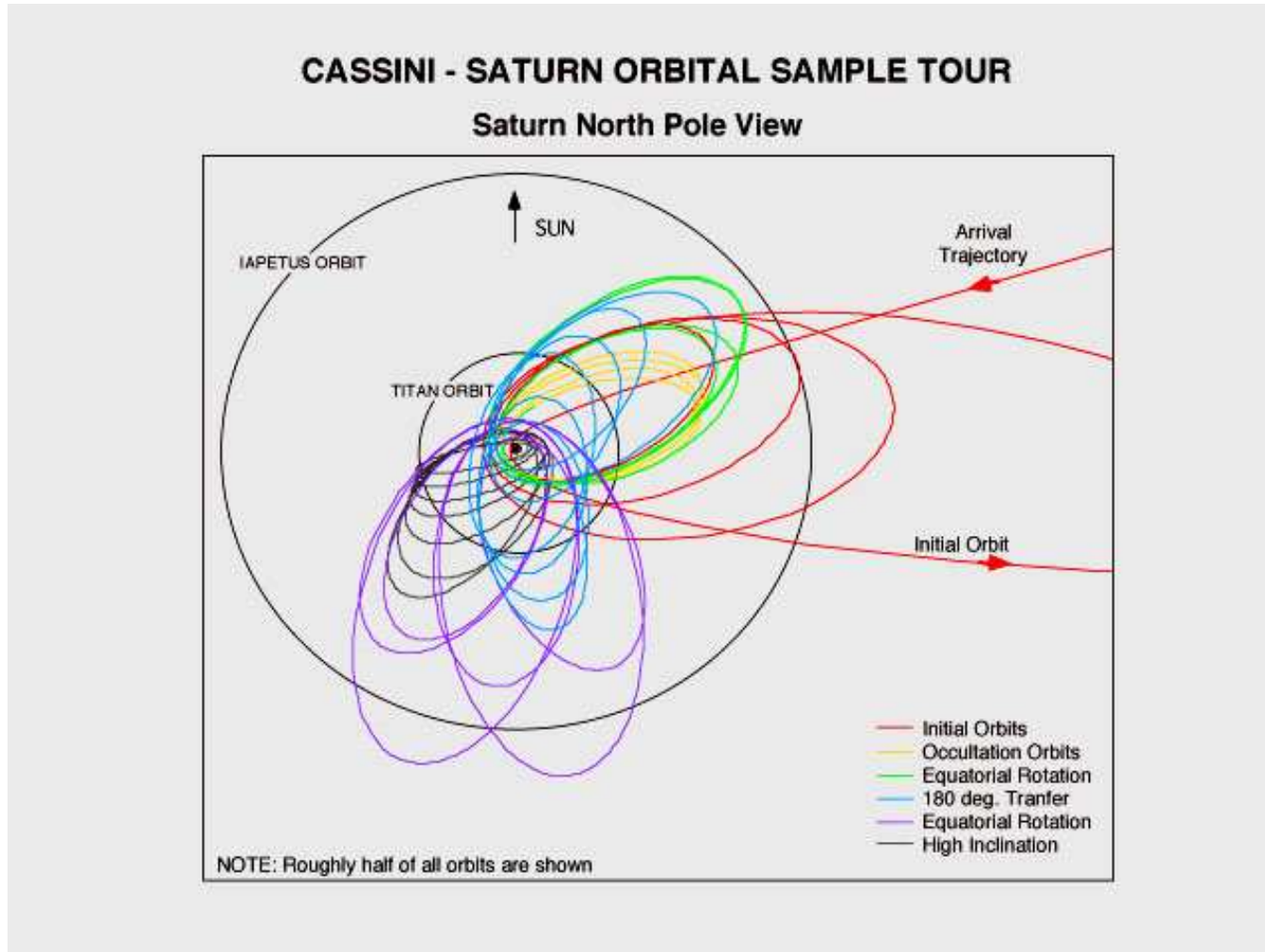
On saute à nouveau au bon moment sur l'orbite  $2T$

# Cassini Huygens

## CASSINI INTERPLANETARY TRAJECTORY



# Cassini Huygens





# Les fractals

Un fractal est un objet qui garde le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on le regarde.

Exemples: les arbres, le dessin de la côte de la Bretagne, l'ensemble de Mandelbrot...

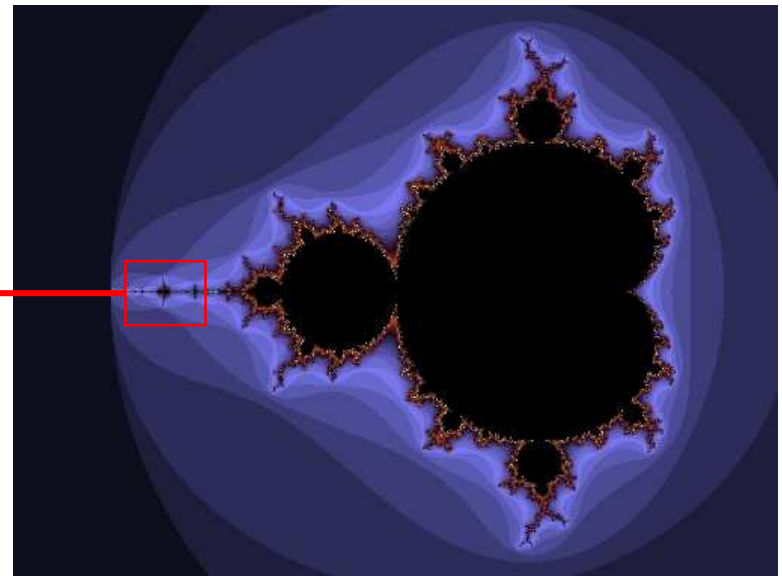
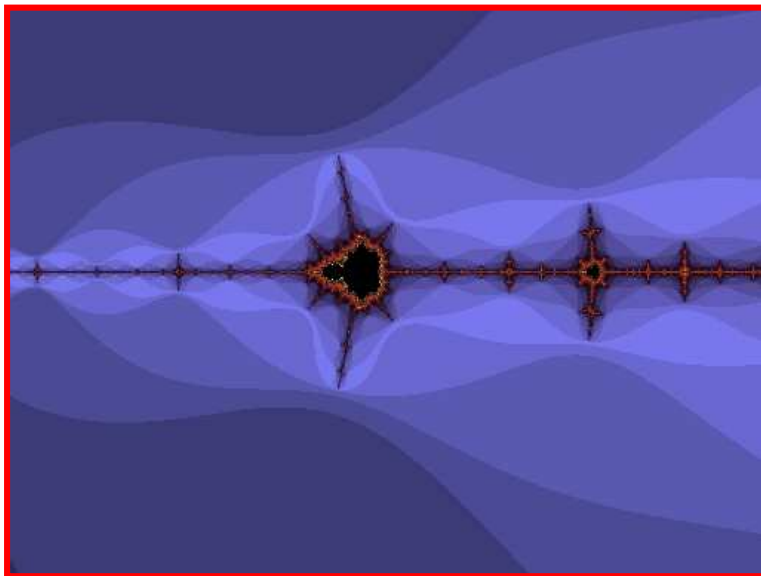
# Ensemble de Mandelbrot

Itération dans le plan complexe :  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$

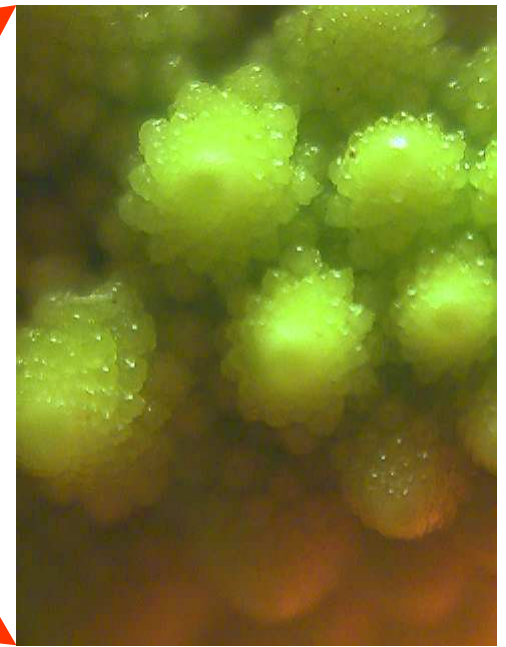
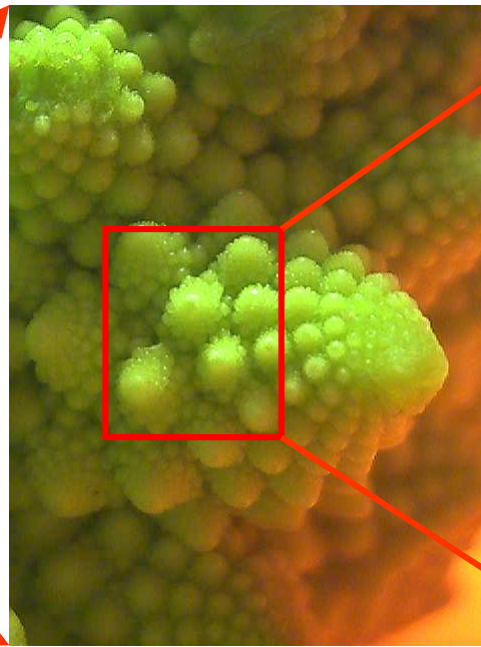
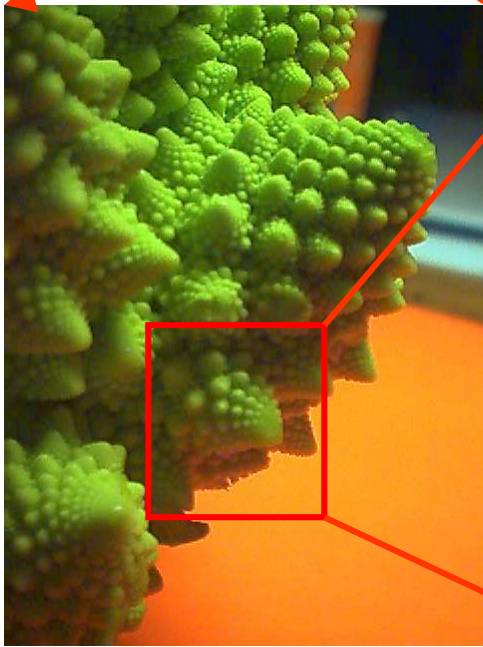
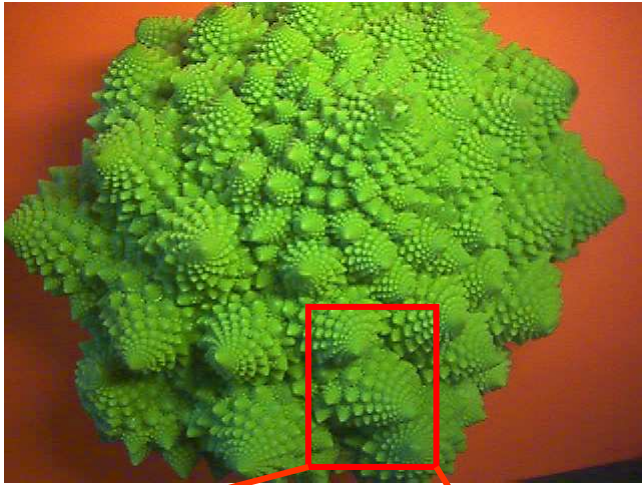
On note avec un code de couleurs dans le plan complexe la vitesse avec laquelle la suite diverge (noir si elle converge)

Programme Xaos : <http://xaos.sourceforge.net/>

<http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php>



# Brocoli "Romanesco"

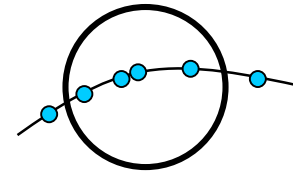


# Dimension fractale - une des définitions

Mesure de la dimension d'un ensemble de points dans le plan :

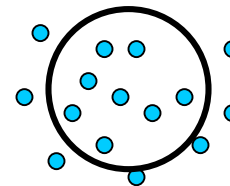
- on prend un point au hasard
- on compte le nombre des points  $N$  dans un cercle de rayon  $R$  autour du point
- on regarde comment varie  $N$  quand le rayon  $R$  augmente

Points répartis au hasard sur une ligne :



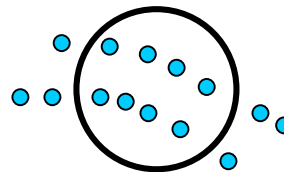
$$N = K * R^1$$

Points répartis au hasard dans le plan :



$$N = K * R^2$$

Points sur un fractal :



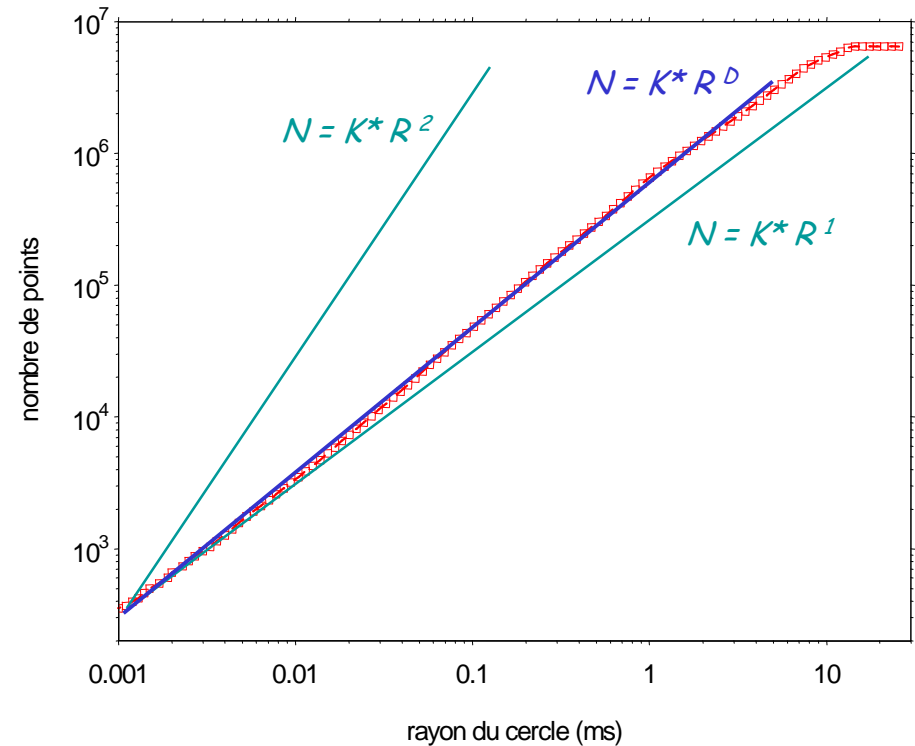
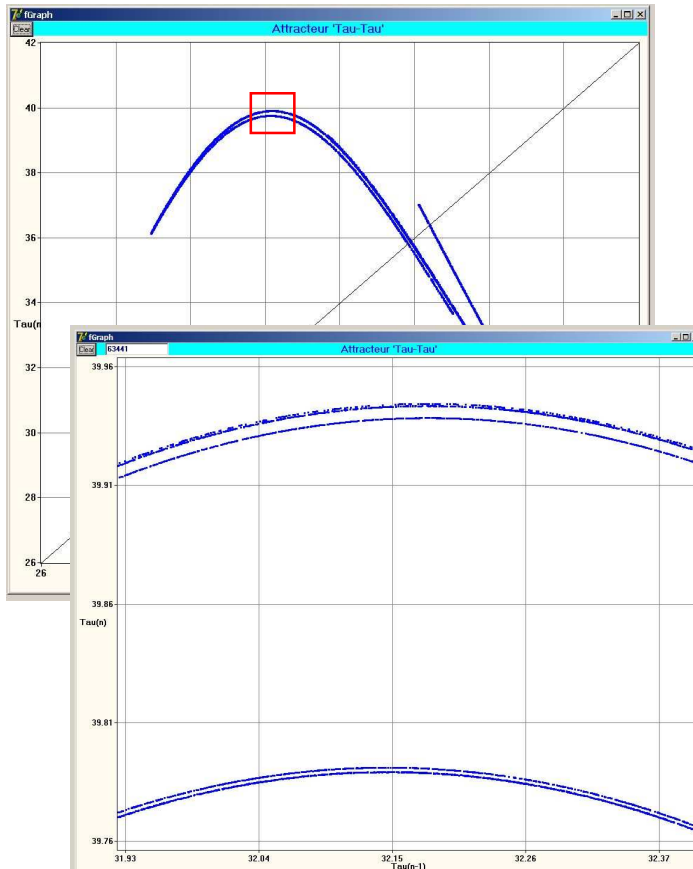
$$N = K * R^D$$

$D$  : dimension fractale,  $D$  compris entre 1 et 2



# Dimension fractale - mesure

## Dimension de la section de Poincaré "Tau-Tau"



Dimension :  $D = 1,09$