

L'EFFET PELTIER

MERCÈ ALMUNI-CALLUL
YOUSSEF EL-FASSY FIHRY
AGUSTÍN PALACIOS-LALOY

BRÈVE INTRODUCTION HISTORIQUE

En 1820 Thomas Seebeck découvrit le phénomène du courant thermoélectrique. Celui-ci se produit dans un circuit fermé formé de plusieurs matériaux conducteurs dont les jonctions sont à des températures différentes. Vers 1834 J.C. Peltier découvrit des anomalies de température aux jonctions entre conducteurs de nature différente traversés par un courant continu. En réalité ce sont là les deux manifestations d'un même couplage thermoélectrique. Mais ni Seebeck ni Peltier furent en mesure d'expliquer ces phénomènes. Ce ne fut, d'ailleurs, qu'en 1909 que E. Altenkirch expliqua ces phénomènes thermoélectriques de manière précise. La découverte des semi-conducteurs au milieu du vingtième siècle permit d'exploiter ces phénomènes dans la pratique.

PRÉSENTATION DU PROBLÈME. PRÉMISSSES

Dans ce problème, on s'intéresse à la conduction dans un métal, et aux phénomènes de dégagement de chaleur qui lui sont associés. Plus précisément, nous tenterons de fournir une explication rigoureuse à l'effet Peltier, et cela en utilisant le formalisme et les outils de la thermodynamique des systèmes ouverts. Le lecteur pourra ainsi se rendre compte de la puissance de cette modélisation.

La première étape consiste en l'expression de la génération d'entropie $\rho\sigma$ sous la forme la plus simplifiée en tenant compte des particularités du problème considéré. Cette expression a alors la forme d'une somme de produits de deux facteurs : l'un ayant l'allure d'un *flux*, et l'autre d'un "moteur" de ce flux, qu'on appelle *force thermodynamique*, ou *affinité généralisée*.

Ensuite, et c'est la le postulat fondamentale de la thermodynamique des systèmes ouverts, on postule que ces *flux* sont fonctions des *forces* (et des variables d'état) *s'annulant avec elles*.

Enfin, le principe de Curie dans un milieu linéaire isotrope, nous permettra de simplifier encore plus cette dépendance, en la transformant en relations linéaires entre grandeurs tensorielles de même rang.

Dans toute la suite de l'exposé, nous utiliserons les conventions et notations du cours. D'autre part, nous modéliserons le conducteur métallique comme une solution à deux constituants :

- Un *solvant* : la matrice solide formée par les atomes du métal, indice X_0 , considérée comme fixe.
- Un *soluté* : les électrons de conduction, indice X_e .

Compte tenu de la nature des phénomènes qui nous intéressent (la conduction), nous utiliserons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le régime est quasi-stationnaire.
- Le champ magnétique est négligeable, et seul la force due au champs électrique intervient.
- Pas de réactions chimiques.
- Pas de viscosité.

1. EQUATIONS PHÉNOMÉNOLOGIQUES ET LOI DE OHM

Avant tout chose, nous allons transformer la formule générale donnant la génération d'entropie, sous une forme qui nous sera plus utile pour la suite.

Partons donc de l'expression la plus générale :

$$(1) \quad \rho\sigma = \psi \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_i \mathbf{J}_i \left[\frac{\mathbf{F}_i}{T} - \nabla \left(\frac{\mu_i^*}{T} \right) \right] + \sum_\lambda \frac{A_\lambda}{T} \dot{\xi}_\lambda + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\nabla_\alpha^\beta dw^\alpha}{T dx^\beta}$$

Les hypothèses introduites nous permettent d'écrire :

$$\rho\sigma = \psi \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_i \mathbf{J}_i \left[\frac{\mathbf{F}_i}{T} - \nabla \left(\frac{\mu_i^*}{T} \right) \right]$$

Que l'on regroupe différemment, en développant $\nabla \left(\frac{\mu_i^*}{T} \right)$, et $\mathbf{J}_i \equiv \rho_i(w_i - w)$:

$$\rho\sigma = \left(\psi - \sum_i \mu_i^* \mathbf{J}_i \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_i \frac{\rho_i w_i}{T} \cdot (\mathbf{F}_i - \nabla \mu_i^*) - \frac{w}{T} \cdot \sum_i \rho_i (\mathbf{F}_i - \nabla \mu_i^*)$$

Posons ensuite

$$(2) \quad \mathbf{J}_q \equiv \psi - \sum_i \mu_i^* \mathbf{J}_i$$

On aboutit alors à l'équation

$$(3) \quad \rho\sigma = \mathbf{J}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \sum_i \frac{\rho_i w_i}{T} \cdot (\mathbf{F}_i - \nabla \mu_i^*) - \frac{w}{T} \cdot \sum_i \rho_i (\mathbf{F}_i - \nabla \mu_i^*)$$

Avant de continuer, nous allons démontrer une identité tout à fait générale.

Pour une phase donnée quelconque à c constituants, on a toujours l'égalité

$$(4) \quad \rho s \nabla T = \nabla p - \sum_{i=1}^c \rho_i \nabla \mu_i^*$$

Preuve En effet, l'égalité de Gibbs-Duhem (page 61) pour cette phase s'écrit

$$V dp - S dT - \sum_{i=1}^c n_i d\mu_i^* = 0$$

Il suffit alors de diviser cette formule par la masse m de la phase, et de passer à l'égalité des vecteurs gradients (puisqu'on a $dF = \nabla_x F \cdot dx$)

Ensuite, rappelons que l'équation de la dynamique s'écrit pour notre modèle, de la manière la plus générale :

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \sum_i \rho_i \mathbf{F}_i - \nabla p + \nabla \cdot \mathbb{V}$$

Soit, avec nos hypothèses :

$$(5) \quad \nabla p = \sum_i \rho_i \mathbf{F}_i$$

Injectons alors les égalités (5) et (4) dans l'équation (3). On obtient alors la forme simplifiée suivante :

$$\rho \sigma = \mathbf{J}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \sum_i \frac{\rho_i w_i}{T} \cdot (\mathbf{F}_i - \nabla \mu_i^*) - \rho s w \cdot \frac{\nabla T}{T}$$

Que l'on regroupe sous la forme :

$$(6) \quad \rho \sigma = -\mathbf{J}_s \cdot \frac{\nabla T}{T} + \sum_i \frac{\rho_i w_i}{T} \cdot (\mathbf{F}_i - \nabla \mu_i^*)$$

$$(7) \quad \text{où } \mathbf{J}_s \equiv \frac{\mathbf{J}_q}{T} + \rho s w$$

Plaçons nous maintenant dans le référentiel dans lequel les atomes du métal sont fixes ($w_0 = 0$), explicitons les sommes sur i , et introduisons le champ électrique :

$$(8) \quad \mathbf{J}_q = \psi - \mu_e^* \mathbf{J}_e$$

$$(9) \quad \mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{J}_q}{T} + \rho s w$$

$$(10) \quad \mathbf{F}_e = z_e \mathbf{E}$$

$$(11) \quad \text{d'où } \rho \sigma = -\mathbf{J}_s \cdot \frac{\nabla T}{T} + \frac{\rho_e w_e}{T} \cdot (z_e \mathbf{E} - \nabla \mu_e^*)$$

Le postulat fondamental en milieu isotrope linéaire, et les relations de symétrie d'Onsager nous permettent alors d'aboutir au système (en intégrant les $\frac{1}{T}$ dans les coefficients) :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_s &= -L_0 \nabla T + L(z_e \mathbf{E} - \nabla \mu_e^*) \\ \rho_e z_e w_e &= -L z_e \nabla T + L_1 z_e (z_e \mathbf{E} - \nabla \mu_e^*)\end{aligned}$$

Traditionnellement, on écrit ces relations sous la forme :

$$(12) \quad \mathbf{J}_s = \frac{-\lambda}{T} \nabla T + \frac{\pi}{T} \mathbf{j}$$

$$(13) \quad \mathbf{E} = \frac{\nabla \mu_e^*}{z_e} - \eta \nabla T + \frac{1}{\gamma} \mathbf{j}$$

Nous appellerons dorénavant ces expressions relations phénoménologiques. En outre, on a posé :

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \rho_e z_e w_e \\ \eta &= -\frac{L}{z_e L_1} \\ \gamma &= z_e^2 L_1 \\ \lambda &= T L_0 - T \frac{L^2}{L_1} \\ \pi &= \frac{T L}{z_e L_1} = -T \eta\end{aligned}$$

Dans cette expression finale de \mathbf{E} , on voit très clairement le couplage de trois phénomènes de nature différente : le premier terme correspond à un effet *chimique*, le second à un effet *thermoélectrique*, et le dernier n'est rien d'autre que l'expression de la *loi d'Ohm*.

2. EXPRESSION INTÉGRALE DU DEUXIÈME PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE POUR LE FIL EN RÉGIME STATIONNAIRE

Une fois obtenues les relations phénoménologiques qui peuvent être utilisées pour modéliser les systèmes dont nous nous occupons, nous allons chercher à en tirer une expression intégrale du deuxième principe de la thermodynamique qui leur soit propre. Cette expression sera à la base de toute l'étude subséquente.

Dans un barreau parcouru par un courant :

$$(14) \quad \frac{DS}{Dt} = \underbrace{\int_{\text{paroi lat.}} -\frac{\mathbf{J}_q}{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A \cup B} -(\mathbf{J}_s - \rho_s \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA}_{\frac{D_e S}{Dt}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \rho \sigma d^3x}_{\frac{D_i S}{Dt}}$$

De par les relations phénoménologiques 12 et 12 on a :

$$(15) \quad \frac{D_e S}{Dt} = \underbrace{\int_{\text{paroi lat.}} \frac{\psi}{T} \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{chaleur echangee}} + \underbrace{\int_{AUB} \left(\frac{\lambda}{T} \nabla T - \frac{\pi}{T} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dA + \int_{AUB} \rho_{sw} \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{liee au courant}}$$

$$(16) \quad \frac{D_i S}{Dt} = \int_{\mathcal{D}} \lambda \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{j^2}{\gamma} \frac{1}{T} d^3 x$$

D'autre part la definition de la dérivée de transport est :

$$(17) \quad \frac{DS}{Dt} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{\partial s}{\partial t} d^3 x + \int_{AUB} \rho_{sw} \cdot \mathbf{n} dA$$

Et nous savons aussi qu'en régime stationnaire :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

En combinant les expressions développées de 14 et 17 nous obtenons l'expression du deuxième principe pour les systèmes qui nous intéressent, expression qui sera à la base de toute notre étude postérieure :

$$(18) \quad \boxed{\int_{\text{paroi lat.}} \frac{\psi}{T} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{AUB} \left(\frac{\lambda}{T} \nabla T - \frac{\pi}{T} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{D}} \lambda \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{j^2}{\gamma} \frac{1}{T} d^3 x}$$

Si la temperature est constante on peut aussi en déduire l'expression du flux total de chaleur échangé à travers la paroi latérale :

$$(19) \quad \dot{Q}_{AB} = \int_{\text{paroi lat.}} \psi \cdot \mathbf{n} dA = \int_{AUB} -\pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{D}} \frac{j^2}{\gamma} d^3 x$$

3. RÉOLUTION DU FLUX DE CHALEUR À TEMPERATURE UNIFORME. RAISON D'ÊTRE DES INTERFACES

Nous avons brièvement vu dans l'introduction historique que l'effet Peltier ne pouvait se produire qu'en présence de deux matériaux différents. Nous fournissons maintenant la justification thermodynamique de ce fait en nous limitant à la situation la plus simple : celle où les barreaux ont une temperature uniforme.

L'hypothèse de tranches (toute grandeur uniforme sur une section droite de conducteur), nous permet de poser $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \hat{\mathbf{x}}$. D'autre part pour un conducteur à T constante $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, et donc, à partir de 19, on obtient :

$$\int_{\text{paroi}} \psi \cdot \mathbf{n} dA = \int_{AUB} -\pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{D}} \frac{j^2}{\gamma} d^3 x$$

En passant à des paramètres intégraux cette expression se pose comme :

$$\dot{Q}_{AB} = RI^2 + (\pi_A - \pi_B)I$$

S'il n'y a pas de jonction dans le système, le matériau des deux extrémités du tronçon sera le même, et $\pi_A = \pi_B$ ce qui implique que le terme d'effet Peltier s'annule, et seul l'effet Joule reste present avec :

$$Q_{AB} = RI^2$$

Ceci explique donc la nécessité au moins d'une jonction pour que des effets d'inversion thermique puissent se produire.

4. PROFIL DE TEMPERATURE DES BARREAUX N ET P

Nous allons maintenant aborder l'étude du profil de temperatures des barreaux n et p. Celle-ci devrait nous permettre de poser les bases pour une étude des flux de chaleur dans le système, étude que nous mènerons dans les sections suivantes.

À partir de l'expression trouvée en 18 il est aisé de trouver l'equation différentielle de la temperature le long du cable. Pour cela il suffit d'appliquer cette expression à un volume infinitésimal. Plus concrètement, par l'hypothèse de tranches, nous considérerons seule la variation sur l'axe x et analyserons donc un volume $A dx$, où A est l'aire de la section droite de conducteur. Le terme calculé aux extrémités de ce volume, se ramène alors à un différentiel :

$$\frac{\dot{q}}{T} dx = d \left(\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{\pi}{T} j_x \right) \cdot A + \lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \cdot A dx + \frac{j^2}{\gamma} \frac{1}{T} \cdot A dx$$

En developpant ce differentiel, l'expression se simplifie et on obtient :

$$(20) \quad \frac{\dot{q}}{A} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \eta' T j + \frac{j^2}{\gamma}$$

On pourrait exprimer cette equation différentielle en termes du flux longitudinal de chaleur (flux d'entropie multiplié par temperature) $\lambda \frac{dT}{dx} + \eta T j$ (ce qui nous permettrait ultérieurement de simplifier les choses, de par la continuité de ce flux que nous démontrerons). On aurait alors :

$$\frac{\dot{q}}{A} = \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} + \eta T j \right) - \eta j + \frac{j^2}{\gamma}$$

En considérant η localement constante, nous pourrions intégrer facilement cette equation. Malheureusement nous disposons de conditions de contour uniquement sur la temperature, et non pas sur sa dérivée, ce qui complique notablement la résolution du problème de Cauchy. Nous préférons donc poser l'equation directement sur la temperature, tout en prenant la condition equivalente $\eta' = 0$.

L'equation 20 s'écrit alors :

$$(21) \quad \frac{\dot{q}}{A} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{j^2}{\gamma}$$

Qui se réduit pour des barreaux isolés thermiquement à :

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{j^2}{\gamma}$$

Dont l'intégration donne :

$$(22) \quad T(x) = T(0) - \frac{j^2 x^2}{2\gamma\lambda} + k_1 x$$

$$(23) \quad T'(x) = \frac{j^2 x}{\gamma\lambda} + k_1$$

Où k_1 se détermine à partir de la deuxième condition de contour $T(l)$:

$$k_1 = \frac{T(l) - T(0)}{l} + \frac{j^2 l}{2\gamma\lambda}$$

Finalement il serait bon de justifier théoriquement la validité de l'hypothèse qui nous a fait négliger la variation de η avec x (ou avec la température, ce qui revient de même). Ceci peut se faire dans le cadre de la physique des semiconducteurs ¹.

Le courant de diffusion, en considérant les effets d'une diffusion non homogène, est :

$$(24) \quad J_n = q\mu_n n \mathcal{E} + q \frac{d(D_n n)}{dx}$$

Et la densité électronique n peut être mise en relation avec le niveau de Fermi et le bord de la bande de conduction :

$$(25) \quad n = N_c \exp \frac{E_F - E_c}{kT}$$

Ce qui permet de développer 24 comme :

$$(26) \quad J_n = \mu_n n \left(\frac{dE_c}{dx} + k \frac{dT}{dx} + \frac{kT}{\mu_n} \frac{d\mu_n}{dx} + \frac{kT}{N_c} \frac{dN_c}{dx} + kT \frac{d\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right)}{dx} \right)$$

Hormis E_c Toutes les grandeurs dont on observe la variation selon x ont une variation qui est régie par celle de la température. On postule donc que le courant peut s'écrire :

$$(27) \quad J_n = \mu_n n \left(\frac{dE_c}{dx} - q\eta \frac{dT}{dx} \right)$$

Où, η peut s'écrire, pour les matériaux n et p, respectivement :

¹Ce développement est absolument similaire à Bart Van Zeghbroeck. *Principles of semiconductor devices*. Consultable en ligne sur <http://ece-www.colorado.edu/~bart/book>

$$(28) \quad \eta_n = -\frac{k}{q} \left(\frac{5}{2} - s + \ln \frac{N_c}{n} \right) \quad \eta_p = \frac{k}{q} \left(\frac{5}{2} - s + \ln \frac{N_v}{p} \right)$$

Expressions où s est l'exposant de la proportionnalité $\mu \propto T^{-s}$.

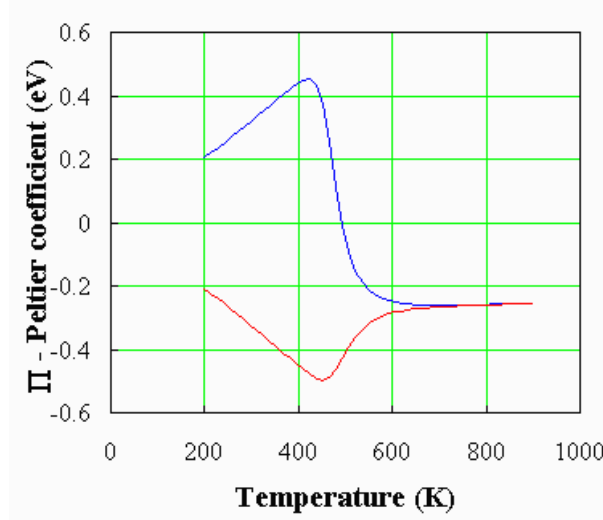


FIG. 1. Coefficients thermoélectriques η_p (courbe supérieure) et η_n (courbe inférieure) en fonction de la température.

En effectuant une étude sur ces expressions on peut retrouver pour le Silicium un profil de variation tel que celui de la figure 1. On y voit comment en dehors de la zone avoisinant les $500^\circ K$ $\eta' \leq 1.5 \cdot 10^{-3} eV/^\circ K$, ce qui justifie amplement notre approximation. En outre nous observons comment au dessous de $500^\circ K$ $\eta_p > 0 > \eta_n$, ce qui nous sera de grand utilité plus tard.

5. CONTINUITÉ DU FLUX D'ENTROPIE

Avant de poursuivre, nous allons démontrer un résultat dont nous allons avoir besoin pour analyser le flux de chaleur qui traverse une jonction : la continuité de la fonction $\lambda \frac{dT}{dx} + \eta T j$ au passage de celle-ci.

Pour cela, considérons un volume cylindrique \mathcal{D} (les conducteurs sont supposés filiformes) s'étendant de part et d'autre de la jonction, d'aire latérale \mathcal{L} , et de sections transverses A et B d'aire égale A . On supposera, par convention, que l'axe de révolution du cylindre est porté par l'axe Ox .

En utilisant l'expression :

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{\partial s}{\partial t} d^3x + \int_{A \cup B} \rho s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA$$

Que l'hypothèse des tranches transforme en :

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{\partial s}{\partial t} d^3x - \mathcal{A}(\rho_A s_A \mathbf{w}_A \cdot \mathbf{e}_x) + \mathcal{A}(\rho_B s_B \mathbf{w}_B \cdot \mathbf{e}_x)$$

La continuité de ρ , s , $\frac{\partial s}{\partial t}$ et w montre que lorsqu'on fait tendre l'aire latérale de \mathcal{D} vers 0, $\frac{DS}{Dt}$ tend aussi vers 0 (en fait, il suffit que ces fonctions restent bornées).

Utilisons maintenant ce resultat en exprimant $\frac{DS}{Dt}$ sous la forme obtenue précédemment en utilisant les relations phénoménologiques :

$$\frac{DS}{Dt} = \int_{\mathcal{L}} -\frac{\psi}{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A \cup B} \left(\frac{\lambda}{T} \nabla T - \frac{\pi}{T} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A \cup B} \rho s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{D}} \lambda \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\mathbf{j}^2}{\gamma T} d^3x$$

En supposant que \mathbf{j} , T et ∇T restent bornés (ce qui n'est pas une hypothèse forte), on peut ensuite réutiliser ici encore l'argument sur les variations de ρ , s , $\frac{\partial s}{\partial t}$ et de w , pour obtenir finalement :

$$\lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \int_{A \cup B} \left(\frac{\lambda}{T} \nabla T - \frac{\pi}{T} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Soit, d'après l'hypothèses des tranches, et en remarquant que $\nabla T \cdot \mathbf{e}_x = \frac{dT}{dx}$:

$$\lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{\pi}{T} \mathbf{j}_x \right) \Big|_B - \left(\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{\pi}{T} \mathbf{j}_x \right) \Big|_A = 0$$

Ce qui n'est rien d'autre que la continuité de la fonction $\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} + \eta \mathbf{j}_x$ sur la jonction. Il suffit ensuite de multiplier par la fonction continue T pour obtenir le resultat annoncé.

6. FLUX DE CHALEUR DANS LE BARREAUX DE CUIVRE. COMPARAISON DES EFFETS IMPLIQUÉS

Une fois connus le profil de temperature des barreaux n et p, et un invariant sur les jonctions, nous sommes en mesure d'aborder l'étude du flux total de chaleur qui est extrait du barreau Cu froid et de celui qui est injecté dans le barreau Cu chaud. Pour cela nous analyserons les divers apports à partir de l'expression du deuxième principe de la thermodynamique trouvée en 18, en réduisant celle-ci à une forme adaptée.

Dans les barreaux de cuivre la temperature est constante et égale à celle de la source froide ou chaude, sauf aux extrémités. En reprenant l'expression du deuxième principe trouvée en 18, dans ce cas-ci nous arrivons, en annulant les termes en ∇T sauf quand on est aux extrémités du barreau, à :

$$(29) \quad \dot{Q} = AT_f \left(\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} + \eta j \right) \Big|_p^n + RI^2$$

Expression où l'hypothèse de tranches nous a permis de passer aux paramètres intégraux, en faisant $A \cdot j = I$ et $\frac{l}{A \cdot \gamma} = R$ (l étant la longueur du barreau et A sa section).

Nous avons donc trois termes : conductivité thermique, effet Peltier et effet Joule. L'ensemble conductivité et Peltier suivent un profil continu le long de tout le système, qui est celui du flux de chaleur dont nous avons démontré la continuité en 5. De par cette continuité, la valeur de ce flux est fixé aux extrémités du barreau de cuivre par les barreaux n et p adjacents.

On peut donc immédiatement trouver l'expression du flux de chaleur évacué par le barreau de cuivre froid :

$$(30) \quad \dot{Q}_{froid} = IT_f(\eta_n - \eta_p) + A(\lambda_n T'_n + \lambda_p T'_p) + RI^2$$

Où on à effectué un changement de signe sur $T'(x)$ du fait que x represente ici l'elongation du barreau froid, et non pas, comme dans l'expression antérieure, le déplacement le long du système.

La dérivée de la temperature sur les extrêmes des barreaux à été déterminée en 22 :

$$T' = \frac{T_c - T_f}{l} + \frac{j^2 l}{2\gamma_{semi}\lambda}$$

Où nous avons négligé la difference entre la mobilité d'électrons et de trous en prenant un γ_{semi} pour les deux semiconducteurs. Ceux-ci, d'autre part, ont des propriétés thermiques (mais non électriques ou thermoélectriques) similaires. On peut donc écrire approximativement :

$$A(\lambda_n T'_n + \lambda_p T'_p) = 2A\lambda T'$$

Ce qui donne finalement (en changeant les signes pour avoir le flux de chaleur sortant) :

$$(31) \quad -\dot{Q}_{froid} = IT_f(\eta_p - \eta_n) - \frac{2A\lambda}{l}(T_c - T_f) - \frac{R_{semi}I^2}{2} - RI^2$$

Nous observons que par le fait que $\eta_p > 0$ et $\eta_n < 0$ le premier terme (effet Peltier) est toujours positif et permet donc d'évacuer de la chaleur du barreau.

Pour les barreaux chauds, par contre, nous avons :

$$(32) \quad \dot{Q}_{chaud} = IT_c(\eta_p - \eta_n) + \frac{2A\lambda}{l}(T_c - T_f) + \frac{R_{semi}I^2}{2} + RI^2$$

L'inversion dans l'ordre des semiconducteurs permet donc à l'effet Peltier de toujours apporter de la chaleur au barreau chaud puisque selon ce qui à été vu plus haut $\eta_p - \eta_n > 0$.

Par rapport à ce premier effet nous avons deux autres effets parasites représentés respectivement par les deux derniers termes (Joule) et le termes intermédiaire (diffusion) :

- L'effet Joule apporte une chaleur parasite de par la resistance des conducteurs. Celui-ci est un **effet dissymétrique** pour autant qu'il modère la quantité de chaleur totale qu'il est possible d'évacuer de la source froide, tandis qu'il renforce celle apportée à la source chaude. En termes d'ingénierie il n'est pas favorable au sens où l'effet Peltier s'utilise en général pour

refroidir (pour chauffer, un dispositif à effet Joule réaliserait la même fonction avec un gain quadratique), et donc son apparition gêne l'obtention de l'effet voulu.

- L'effet de diffusion thermique s'oppose à l'effet Peltier au sens où il tend à transférer de la chaleur de la source chaude à la froide. C'est donc un **effet de sens inverse** à l'effet Peltier.

D'autre part, il est clair que ces effets ne peuvent être éliminés ni même fortement atténués, puisque pour le premier, il dépend quadratiquement du même courant qui permet l'effet Peltier, et pour le deuxième, il est intrinsèque à tout corps, et normalement d'autant plus fort qu'un corps est conducteur (conductivité thermique et électrique étant dépendantes de la mobilité des constituants de la matière, et donc fortement liées).

7. PERFORMANCE DE L'EFFET PELTIER

Une fois calculés les flux de chaleur extraits et injectés dans une cellule à effet Peltier, nous allons nous intéresser à la quantité effective d'énergie qui lui est nécessaire pour fonctionner. Un certain ratio entre les deux devrait pouvoir mesurer l'efficacité de la cellule, ou, ce qui revient au même (puisque les deux quantités sont accumulables), celle du dispositif tout entier.

Le calcul de la puissance consommée par une cellule demande d'abord qu'on calcule la différence de potentiel qui existe entre ses extrêmes. L'intensité étant connue, il sera immédiat d'en déduire la puissance consommée.

Pour calculer cette différence de potentiel sur l'ensemble barreau n - barreau Cu chaud - barreau p - barreau Cu froid, on utilise la définition la ddp en fonction du champ électrique. En appliquant la relation phénoménologique pour le champ électrique trouvée en 12 à l'ensemble de la cellule on a :

$$(33) \quad ddp = \int_{cel.} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{cel.} \left(\nabla \left(\frac{\mu^*_e}{z_e} \right) - \eta \nabla T + \frac{1}{\gamma} \mathbf{j} \right) \cdot d\mathbf{l}$$

Cette intégrale peut se décomposer en 8 parties correspondants à chacun des barreaux ou jonctions. Sur les barreaux, l'homogénéité du matériau implique que le terme lié au potentiel chimique s'annule. Sur les jonctions, ce sera les deux autres termes qui s'annuleront du fait que leur température est constante (approximation par tranches), et que leur longueur est nulle (pas d'effet Joule).

Il reste donc :

$$\begin{aligned} ddp &= ddp_{jonc.} + ddp_{bar.} \\ ddp_{jonc.} &= \int_{n-Cu} \nabla \left(\frac{\mu^*_e}{z_e} \right) \cdot d\mathbf{l} + \int_{Cu-p} \nabla \left(\frac{\mu^*_e}{z_e} \right) \cdot d\mathbf{l} + \int_{p-Cu} \nabla \left(\frac{\mu^*_e}{z_e} \right) \cdot d\mathbf{l} + \int_{Cu-n} \nabla \left(\frac{\mu^*_e}{z_e} \right) \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \left[\frac{\mu^*_e}{z_e} \right]_n^{Cu} + \left[\frac{\mu^*_e}{z_e} \right]_{Cu}^n + \left[\frac{\mu^*_e}{z_e} \right]_p^{Cu} + \left[\frac{\mu^*_e}{z_e} \right]_{Cu}^p = 0 \end{aligned}$$

L'effet du potentiel chimique s'annule donc, du fait de la repetition des matériaux dans chaque cellule.

Et pour les barreaux :

$$ddp_{bar.} = \int_{bar.} \frac{1}{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bar.} -\eta \nabla T \cdot d\mathbf{l}$$

La première de ces intégrales est la différence de potentiel habituelle créée par conduction. La deuxième correspond à l'effet thermoélectrique :

$$\int_{bar.} \frac{1}{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = (2R_{semi} + 2R_{Cu})I$$

$$\int_{bar.} -\eta \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_n -\eta \nabla T \cdot d\mathbf{l} + \int_p -\eta \nabla T \cdot d\mathbf{l} = (\eta_p - \eta_n)(T_c - T_f)$$

Et donc la ddp totale est :

$$(34) \quad ddp = (2R_{semi} + 2R_{Cu})I + (\eta_p - \eta_n)(T_c - T_f)$$

D'où la puissance requise pour le fonctionnement de la cellule est, quant à elle :

$$(35) \quad \dot{W} = (2R_{semi} + 2R_{Cu})I^2 + (\eta_p - \eta_n)(T_c - T_f)I$$

À partir de cette puissance nécessaire pour le fonctionnement il est possible de définir différents coefficients d'effectivité. Celui qui nous semble plus significatif, de par le fait que l'effet Peltier soit essentiellement utilisé en réfrigération, est le ratio entre la chaleur extraite de la source froide et la puissance nécessaire au fonctionnement. Il s'écrit :

$$(36) \quad CEP = \frac{-\dot{Q}_{froid}}{\dot{W}} = \frac{IT_f(\eta_p - \eta_n) - \frac{2A\lambda}{l}(T_c - T_f) - \frac{R_{semi}I^2}{2} - RI^2}{I(2R_{semi} + 2R_{Cu}) + (\eta_p - \eta_n)(T_c - T_f)}$$

DISPOSITIFS À EFFET PELTIER. EXEMPLE PRATIQUE

Un module thermoélectrique à effet Peltier est un ensemble de cellules Peltier telle que celle analysée. Celles-ci sont connectées en parallèle thermiquement et en série électriquement entre 2 plaques de céramique (une plaque *froide* et une plaque *chaude*). La plaque *froide* est refroidie par l'absorption d'énergie due au passage des électrons d'un semi conducteur vers le suivant. Bien évidemment la plaque chaude reçoit l'énergie thermique arrachée à la plaque froide ; il est donc impératif d'évacuer cette chaleur pour qu'elle ne puisse endommager le module. Il est aussi intéressant de noter que lorsque l'on inverse le sens du courant, les fonctions des plaques sont elles aussi inversées : la plaque froide devient la chaude et inversement.

Certains semi-conducteurs, dont le Tellure de Bismuth, ont des propriétés thermoélectriques optimales pour les cellules à effet Peltier. En effet, le transit de l'énergie thermique d'une plaque à l'autre (modélisé dans notre étude par le coefficient η) se fait plus facilement à travers eux qu'avec du Silicium.

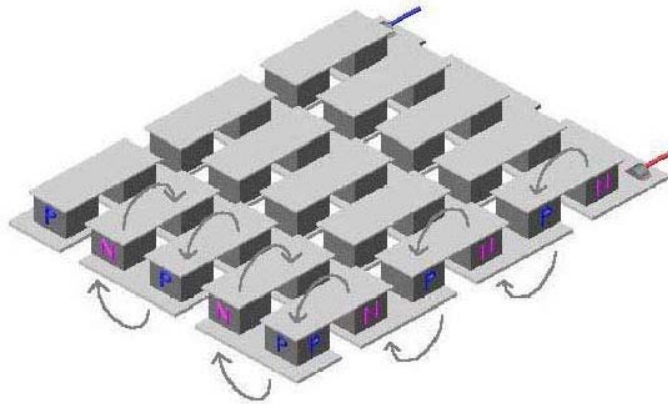


FIG. 2. Module à effet Peltier

L'avantage fondamental des dispositifs à effet Peltier est la possibilité de refroidir au dessous de la température ambiante sans utiliser de fluide réfrigérant. Ils doivent à ce fait leur importance en électronique, où l'usage d'un compresseur et d'un circuit fluide est rarement envisageable. Leur petite taille, l'absence de parties mobiles (et donc rapidement usées), et leur efficacité raisonnable leur ont conféré des nombreux usages :

- refroidissement de diodes laser
- réduction de bruit thermique dans les photo-détecteurs
- évacuation de chaleur et accélération des transitions dans les microprocesseurs
- réfrigérateurs portables pour routiers

Entre les inconvénients on peut citer leur basse efficacité (rarement plus de 65%, et bien moins pour les petits modules) et leur petite puissance réfrigérante (la chaleur pompée par un module commercial étant de l'ordre de 60-80 W au plus). On peut, toutefois, disposer ces modules en cascade, face chaude contre face froide, ce qui permet d'augmenter la quantité de chaleur extraite.

Comme illustration de ce qui a été dit et pour clore cet exposé, les pages suivantes contiennent les caractéristiques techniques de deux modules commerciaux à effet Peltier, tous deux du fabricant Marlow, bien que de taille fort différente.