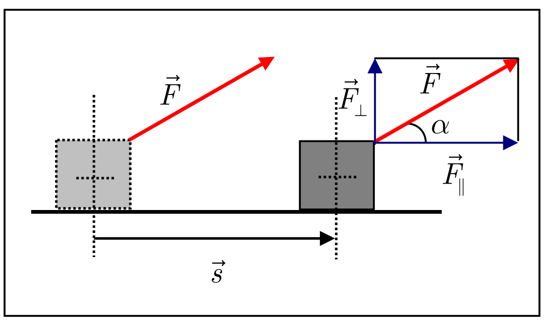
Chapitre 7 : Travail et puissance

I. Travail d'une force agissant sur un solide en translation

1. Rappel [cf. III^e]

* Lorsqu'une force déplace son point d'application, elle effectue un travail.
* Si le vecteur déplacement $\vec{s}$ a la même direction et le même sens que la force $\vec{F}$, le travail est donné par $W(\vec{F}) = F \cdot s$.
* Une force de direction perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.
* Unité de travail: $[W] = [F] \cdot [s] = 1\ \text{Nm} = 1\ \text{J}$
* ***Fatigue et travail :*** *L'effort prolongé est cause de fatigue et nous avons tendance à vouloir mesurer le travail fourni par la fatigue ressentie. En fait, fatigue et travail ne sont pas deux notions équivalentes. Ainsi, lorsqu'on tient une valise immobile à bout de bras, on éprouve très vite de la fatigue; et pourtant, on ne tire aucun bénéfice (aucun travail) de cet exercice.*

2. Travail d'une force constante oblique



Considérons une caisse traînée horizontalement par une personne au moyen d'une corde qui fait un angle α avec l'horizontale. La force constante $\vec{F}$ peut être décomposée en une composante verticale $\vec{F}_\perp$, tendant à soulever la caisse et réduire la charge au sol, et une composante horizontale $\vec{F}_\parallel$ dans la direction du vecteur déplacement $\vec{s}$, tendant à déplacer la caisse. Tout se passe comme si 2 personnes tiraient sur la caisse en même temps au moyen de 2 cordes, l'une verticalement vers le haut et l'autre horizontalement. On obtient les 2 composantes :

$$F_\perp = F \cdot \sin\alpha \quad \text{et} \quad F_\parallel = F \cdot \cos\alpha$$

Travail de chaque composante :

$$W(\vec{F}_\perp) = 0 \qquad \text{et} \qquad W(\vec{F}_\parallel) = F_\parallel \cdot s = (F\cos\alpha) \cdot s$$

Le travail de la force $\vec{F}$ est la somme des travaux des composantes :

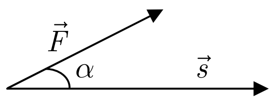
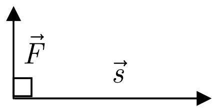
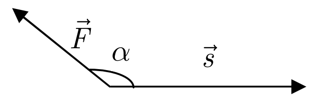
$$W(\vec{F}) = W(\vec{F}_\perp) + W(\vec{F}_\parallel) = 0 + F \cdot s \cdot \cos\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})$$

Finalement :

$$\boxed{W(\vec{F}) = Fs\cos\alpha = \vec{F} \bullet \vec{s}}$$

Le travail d'une force constante est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement.

Signe du travail

		
$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
$\cos\,\alpha > 0$	$\cos\,\alpha = 0$	$\cos\,\alpha < 0$
$W > 0$	$W = 0$	$W < 0$
Travail positif ou **moteur** La force **contribue** au mouvement	Travail nul	Travail négatif ou **résistant** La force **s'oppose** au mouvement

3. Travail d'une force variable le long du parcours

Soit une force $\vec{F}$ qui varie en direction, sens et intensité, et dont le point d'application se déplace sur une trajectoire curviligne $(\mathcal{C})$ de A vers B.

Travail élémentaire

Décomposons la trajectoire $(\mathcal{C})$ en n déplacements infiniment petits (n entier). Considérons le i$^{\text{ème}}$ déplacement MN (très petit) de la force étudiée.
Le vecteur déplacement $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\delta s_i}$ représente un vecteur infiniment petit.
Lors de ce déplacement, la force $\vec{F}$, notée $\vec{F}_i$, demeure pratiquement constante en direction, sens et intensité. Le travail est infiniment petit : on parle dès lors du **travail élémentaire** de la force $\vec{F}$.
Pour le i$^{\text{ème}}$ déplacement infinitésimal, le travail élémentaire devient :

$$\delta W_i = \delta W(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \bullet \overrightarrow{\delta s_i} = F_i \cdot \delta s_i \cdot \cos\alpha_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \sphericalangle(\vec{F}_i, \overrightarrow{\delta s_i})$$

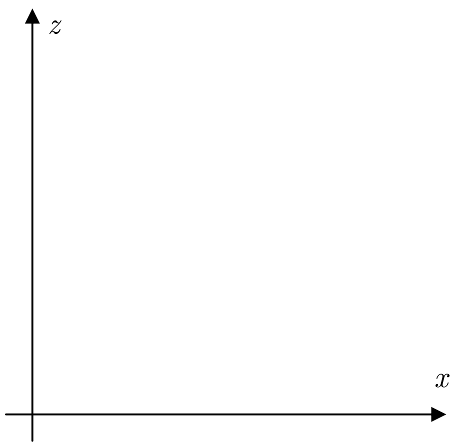
Le travail élémentaire d'une force est le travail de cette force pour un déplacement infiniment petit de son point d'application.

Travail de la force $\vec{F}$ sur le trajet AB le long de la courbe ($\mathcal{C}$)

Ce travail représente la somme des travaux élémentaires :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \bullet \overrightarrow{\delta s_i}$$

4. Travail du poids d'un corps



Calculons le travail des forces de pesanteur s'appliquant, par exemple, sur un alpiniste de masse m dont le centre d'inertie G descend d'un point A d'altitude z_A vers un point B d'altitude z_B.

Décomposons la courbe décrite par G en n déplacements élémentaires $\overrightarrow{\delta s_i}$.

Le travail élémentaire du poids $\vec{P}$, correspondant au ième déplacement, a pour expression :

$$\delta W_i = \vec{P} \bullet \overrightarrow{\delta s_i}$$

D'où pour le travail le long du chemin AB :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{P}) &= \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{P} \bullet \overrightarrow{\delta s_i} = \sum_{i=1}^{n} P \cdot \delta s_i \cdot \cos \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} P \cdot \delta h_i \\ &= P \cdot \delta h_1 + \cdots + P \cdot \delta h_n \\ &= P \cdot (\delta h_1 + \cdots + \delta h_n) \\ &= P \cdot (z_A - z_B) \\ &= mg(z_A - z_B) > 0 \end{aligned}$$

Conclusion:

Lorsque l'alpiniste **descend** de A vers B ($z_A > z_B$), le **travail** de son poids est positif, c'est-à-dire **moteur**.

Lorsqu'il **grimpe** de A vers un point B plus élevé ($z_A < z_B$), le **travail** du poids est **résistant** et par suite négatif; comme alors z_A - $z_B < 0$, on peut encore écrire

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) < 0 .$$

Si l'axe Oz est orienté vers les altitudes croissantes, le travail du poids s'exprime par

$$W_{AB}(\vec{P}) = -mg\Delta z \text{ avec } \Delta z = z_{final} - z_{initial} = z_B - z_A$$

Remarques: ** L'expression du travail du poids montre que ce travail ne dépend que de la variation d'altitude et non du chemin suivi.*
** Une force dont le travail est indépendant du chemin suivi, lorsque son point d'application se déplace entre 2 points quelconques donnés A et B, est appelée **force conservative**.*

II. Puissance d'une force agissant sur un solide en translation

1. Rappel

La puissance est le quotient du travail W par le temps Δt mis pour effectuer ce travail :

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} \qquad \text{unité : } [\mathcal{P}] = \frac{[W]}{[\Delta t]} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}$$

2. Puissance moyenne

Lorsque la force varie, on peut définir sa puissance moyenne

$$\mathcal{P}_{moy} = \frac{W_{AB}(\vec{F})}{\Delta t_{AB}} \ .$$

$W_{AB}(\vec{F})$ est le travail de la force $\vec{F}$ sur le trajet AB et Δt_{AB} est le temps mis pour effectuer ce travail.

3. Puissance instantanée

* A l'instant t_i le point d'application de la force $\vec{F}_i$ est en M; à l'instant infiniment voisin $t_i + \delta t_i$, il se trouve en N.

* Travail élémentaire sur le déplacement $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\delta s_i}$:

$$\delta W_i = \vec{F}_i \bullet \overrightarrow{\delta s_i}$$

* Puissance instantanée de $\vec{F}_i$ à l'instant t_i:

$$\mathcal{P}_i = \frac{\delta W_i}{\delta t_i} = \frac{\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i}}{\delta t_i} = \frac{F_i \cdot \delta s_i \cdot \cos\alpha_i}{\delta t_i} = F_i \cdot v_i \cdot \cos\alpha_i$$

car $\dfrac{\delta s_i}{\delta t_i} = v_i$ est la vitesse (instantanée) de déplacement du point d'application. Or $\vec{v}_i$ est colinéaire à $\overrightarrow{\delta s_i}$ et de même sens, donc

$$\sphericalangle(\vec{F}_i, \vec{v}_i) = \sphericalangle(\vec{F}_i, \overrightarrow{\delta s_i}) = \alpha_i$$

et par suite

$$\mathcal{P}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

D'une façon générale : La puissance instantanée de la force $\vec{F}$ dont le point d'application est animé d'une vitesse (instantanée) $\vec{v}$ est

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \bullet \vec{v}}$$

III. Rendement

Lorsqu'on soulève un corps, deux forces au moins sont en cause :

- la force **motrice** qui provoque ce mouvement ;
- la force **résistante** qui s'y oppose.

Dans l'exemple d'un haltérophile, la force motrice est sa force musculaire, la force résistante est le poids de l'haltère.
Le point d'application de chacune de ces forces se déplace durant l'opération ; les deux accomplissent donc un travail qui est respectivement un **travail moteur** (ou **fourni**) et un **travail résistant**.
On appelle **travail utile** W_u la part du travail fourni qui compense le travail (négatif) du poids.

- Dans le **cas idéal** où le déplacement s'effectue très lentement et sans frottements, il y a égalité entre travail fourni W_f et travail utile W_u :

  $$W_f = W_u$$

  Dans ce cas, le travail se transmet intégralement. On dit qu'il y a **conservation du travail**. C'est un cas particulier de la loi de conservation de l'énergie. (voir plus loin)

- Dans le **cas réel** où des frottements accompagnent le déplacement, il faudra fournir plus de travail pour obtenir le même résultat :

  $$W_f > W_u$$

  Le surplus de travail fourni est alors transformé en chaleur.

  On appelle **rendement** η de l'opération le rapport du travail utile au travail fourni : $\boxed{\eta = \dfrac{W_u}{W_f}}$

  Dans le cas idéal $\eta = 1$; dans le cas réel $0 < \eta < 1$. On exprime le rendement souvent en %.

Remarques :

a) Le travail à fournir dans le cas idéal représente le travail minimum nécessaire à l'opération souhaitée.

b) Comme pour une durée Δt on a $W_f = \mathcal{P}_f \cdot \Delta t$ et $W_u = \mathcal{P}_u \cdot \Delta t$, où $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_u$ désignent respectivement les puissances fournie et utile, il vient également

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_f}}$$

IV. Exercices

1. Automobile

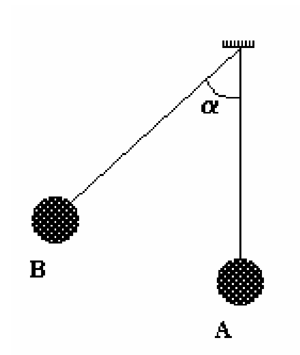
Une automobile de masse 1100 kg roule à vitesse constante sur un tronçon rectiligne horizontal de 2 km, puis monte une pente de 8 % pendant 1500 m. On supposera que les forces de frottement qui s'opposent au déplacement gardent une valeur constante de 1850 N tout au long du trajet.

a) Calculer le travail du poids sur le trajet complet.

b) Calculer le travail de la force de frottement sur le trajet complet.

2. Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une boule de masse 50 g accrochée au bout d'un fil de longueur 30 cm, de masse négligeable. La boule reçoit en A une impulsion qui la fait remonter jusqu'en B, de telle manière que le pendule fait alors un angle $\alpha = 30°$ avec la verticale.



a) Calculer le travail du poids de la boule entre A et B.

b) Quel est le travail entre A et B de la force exercée par le fil sur la boule ? Motiver !

c) Quel serait le travail du poids de la boule, si le pendule faisait un tour complet ? Expliquer !

3. Machine soulevant une caisse

Calculer la puissance moyenne fournie par une machine qui soulève une caisse de 500 kg à une hauteur de 20 m en 60 s.

[1,63 kW]

4. Voiture remontant une pente

Une voiture de 1000 kg monte une pente de 3 % à 20 m/s. Calculer la puissance développée par le moteur, si on ne tient pas compte des frottements.

[5,9 kW]

5. Turbine

De l'eau coule d'un réservoir avec un débit de 3000 kg/min vers une turbine qui se trouve 120 m plus bas. Si le rendement de la turbine est de 80 %, calculer la puissance fournie par la turbine.

[47 kW]

6. Voiture

Une voiture de masse 1,5 t roule à la vitesse constante de 108 km/h sur un sol horizontal.

a) Faire le bilan des forces qu'elle subit et préciser quelles forces font un travail moteur, lesquelles un travail résistant, lesquelles un travail nul.

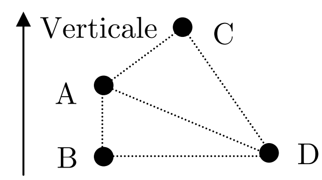
b) La force de frottement vaut 1800 N. Calculer le travail du poids et de la force motrice sur un trajet de 10 km.

c) Calculer la puissance de la voiture.

d) Reprendre les points a), b) et c) en supposant que la voiture monte un col de pente constante de 12 %.

COMPREHENSION

1 Un corps est déplacé dans le champ de pesanteur de la Terre d'un point A vers un point D selon trois trajets différents (voir figure). Lequel des travaux $W_{A\to D}(\vec{P})$; $W_{A\to B\to D}(\vec{P})$; $W_{A\to C\to D}(\vec{P})$ est le plus grand ? Justifier la réponse !



2 Commenter les affirmations suivantes et les redresser, s'il y a lieu !

1) Si un chariot est soumis à une force résultante constante, alors sa puissance est constante.
2) Le poids effectue toujours un travail résistant.
3) Lorsqu'une force ne travaille pas, on peut en conclure que son point d'application ne se déplace pas.
4) On laisse tomber deux objets du sommet de la Tour Eiffel. Le premier est lancé vers le bas avec une vitesse initiale verticale, le deuxième tombe sans vitesse initiale. Les travaux des forces qui s'appliquent sur les objets en chute sont alors différents. On néglige le frottement de l'air et la poussée d'Archimède.

3 Une force $\vec{F}$ constante de norme $F = 12$ N agit sur un corps qui se déplace de A vers B suivant un demi-cercle de rayon $r = 1$ m. Calculer le travail de cette force.