Méthode simplificatrice : **Le tableau de Karnaugh**

I. Introduction :

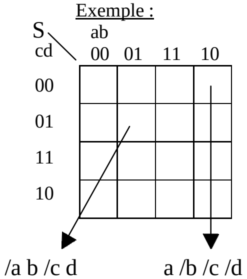
On a pu s'apercevoir (cours sur la logique booléenne) que la méthode de simplification d'équations consistant à effectuer des mises en facteur successives devenait vite très longue et fastidieuse dès que le nombre de variables devenait important.
La méthode du tableau de Karnaugh va nous permettre d'effectuer des simplifications beaucoup plus rapidement sans avoir à écrire de longues équations.

II. Le tableau de Karnaugh

- C'est un tableau de 2^n cases, n étant le nombre de variables.
- Sur les lignes et colonnes, on place l'état des variables d'entrée codées en binaire réfléchi (code Gray)
- Dans chacune des cases, on place l'état de la sortie pour les combinaisons d'entrée correspondante.

Dans l'exemple ci-contre, le nombre de variable est de **4** puisque le Tableau contient **2^4 = 16 cases.**

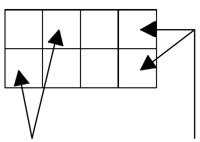
Exemple :



> ✍ Donner, à partir de sa table de vérité, le tableau de Karnaugh d'une porte OU à 3 entrées.
> ✍ Construire les tableaux de Karnaugh correspondant aux fonctions logiques suivantes :
> S1 = /a b + c ; S2 = /a b + c /d ; S3 = a /b c + /d + cd

III. Simplification d'équations à partir du tableau de Karnaugh

La méthode consiste à mettre en évidence, par un procédé graphique, tous les termes d'une fonction logique qui ne diffèrent que par l'état d'une seule variable (termes dits adjacents). Si une fonction logique dépend de **Ne** variables d'entrée, on aura 2^{Ne} produits possibles (principe de la table de vérité).
Pour cela on réalise des groupements de cases adjacentes. Ces groupements de cases doivent être de taille maximale (nombre de cases max.) et égale à un multiple de 2^n. On cesse d'effectuer les groupements lorsque tous les « 1 » appartiennent au moins à l'un d'eux.



cases non-adjacentes cases adjacentes

4	2	2	4
3	1	1	3
3	1	1	3
4	2	2	4

Les cases portant le même chiffre sont des exemples de cases adjacentes → regroupement possible.

Remarques :

- Une ou plusieurs cases peuvent être communes à plusieurs groupements,
- Pour extraire l'équation de la fonction logique, on ne retient que les variables dont l'état ne change pas à l'intérieur d'un groupement et on effectue la somme logique (OU logique) de toutes les expressions trouvées,
- Le regroupement de 6 cases est **<u>impossible.</u>**

> ✍ Simplifier les équations S1, S2 et S3 déterminées précédemment et proposer les logigrammes correspondants.

Exemples de regroupements possibles :

	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	0	0	0	1

	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Exemples de regroupements impossibles ou redondants :

	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	0	0
10	1	0	1	0

	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

> Résumé de la méthode :
> ① On détermine le nombre de variables d'entrée afin de connaître la taille des tableaux.
> ② On détermine le nombre de variables de sortie afin de définir le nombre de tableaux à effectuer.
> ③ Affecter aux différents produits de l'équation non simplifiée une case du tableau en respectant le code Gray.
> ④ Introduire la fonction logique dans le tableau en positionnant à « 1 » les cases qui valident la fonction de sortie.
> ⑤ Effectuer les groupements de cases adjacentes.
> ⑥ Sortir la fonction simplifiée en éliminant la ou les variables d'entrée qui changent d'état.

IV. Applications

a. Sortir l'équation simplifiée des tableaux suivants :

	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	1

	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

Introduire les équations suivantes dans un tableau de Karnaugh et les simplifier :

F1 = /abc + c/b/a + /bc/a + /c/ab
F2 = ab + /ba
F3 = /d/cba + /dcb/a + /dc/ba + /d/cba
F4 = dca + /bc/a + /ca

c. Simplifier la table de vérité suivante et donner le logigramme :

c	b	a	S	F	H
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0