**Contrôle du 20 Juin 2011**
**FLSI456 Mécanique du Solide et des Fluides**
**Durée : 2h**
**1 Page Recto-Verso autorisée, calculette non autorisée.**

L'appréciation de votre travail tiendra compte de la clarté et de la lisibilité de vos réponses aux différentes questions. Nous attendons de vous une rédaction claire et synthétique qui, en aucun cas, ne pourra se borner à une suite d'expressions mathématiques sans justification.

## SUJET 1 : Mécanique des solides

Soit $\mathcal{R}_0$, $(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ le repère galiléen de référence. On étudie le mouvement dans le plan $(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ d'un système matériel constitué de deux solides reliés par un ressort de torsion. L'accélération de la pesanteur est désignée par $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{y_0}$.
Le solide (1), de masse $m_1$, est animé d'un mouvement de translation de direction $\overrightarrow{x_0}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$. On note son centre de gravité $G_1$ et on positionne ce point par :

$$\overrightarrow{OG_1} = x(t)\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{y_0} \text{ où } h \text{ est constant.}$$

$A$ est un point de (1) tel que : $\overrightarrow{G_1A} = b\overrightarrow{y_0}$ où $b$ est constant. (1) est en contact en deux points avec la droite $(O;\overrightarrow{x_0})$. On note $I$ et $J$ les deux points de contact et l'on a :

$$\overrightarrow{IG_1} = a\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{y_0}\,;\ \overrightarrow{JG_1} = -a\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{y_0} \text{ où } a \text{ est constant.}$$

Ce contact est ponctuel, avec frottement. On notera $T_1$ la composante suivant $\overrightarrow{x_0}$ de la résultante de l'action de $\mathcal{R}_0$ sur le solide (1) au point $I$ et par $T_2$ celle de l'action de $\mathcal{R}_0$ sur le solide (1) au point $J$. On notera $N_1$ la composante suivant $\overrightarrow{y_0}$ de la résultante de l'action de $\mathcal{R}_0$ sur le solide (1) au point $I$ et par $N_2$ celle de l'action de $\mathcal{R}_0$ sur le solide (1) au point $J$.

Le solide (2) est une tige homogène d'extrémités $A$ et $B$, de longueur $2L$ et de masse $m_2$. (2) est en liaison pivot parfaite d'axe $(A;\overrightarrow{z_0})$ avec le solide (1). On note $G_2$ le centre de gravité de (2) et l'on pose :

$$\overrightarrow{AG_2} = L\overrightarrow{x} \text{ où } L \text{ est constant.}$$

Le repère $(A;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z_0})$ est lié à (2) et est déduit par une rotation d'angle $\theta(t)$ du repère $(A;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$.
La matrice d'inertie de (2) est donnée par :

$$\mathcal{I}(A,(2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x},-,-)}$$

On rappelle que pour une barre de longueur $2L$, $K = \frac{4}{3}m_2L^2$. Un ressort de torsion (Ress), de masse négligeable et d'inertie négligeable, est placé entre les solides (1) et (2) de telle sorte que l'action de ce ressort sur (2) soit caractérisée par un torseur-couple :

$$\{Ress \to (2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{M}(A, Ress \to (2) = -C\theta\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}$$ où $C$ est la raideur constante de torsion du ressort.

**Question 1** Donner l'expression du taux de rotation noté $\overrightarrow{\Omega}(2/\mathcal{R}_0)$, de (2) par rapport à $\mathcal{R}_0$ et les vitesses $\overrightarrow{V}(G_1/\mathcal{R}_0)$, $\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}_0)$ et $\overrightarrow{V}(G_2/\mathcal{R}_0)$.

**Question 2** Calculer les vitesses de glissement en $I$ et $J$ de (1) par rapport à $\mathcal{R}_0$.

**Question 3** Calculer $\overrightarrow{\Gamma}(G_1/\mathcal{R}_0)$ et $\overrightarrow{\Gamma}(G_2/\mathcal{R}_0)$. Exprimer ces deux vecteurs dans la base $B_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

**Question 4** En utilisant le théorème de Koenig, calculer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(A \in (2)/\mathcal{R}_0)$. Calculer le moment dynamique $\overrightarrow{\delta}(A \in (2)/\mathcal{R}_0)$.

**Question 5** En utilisant le théorème de Koenig, calculer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(A \in (1)/\mathcal{R}_0)$. Calculer le moment dynamique $\overrightarrow{\delta}(A \in (1)/\mathcal{R}_0)$.

**Question 6** Enumérer et caractériser sous forme de torseurs les actions mécaniques exercées sur le solide (2).

**Question 7** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au solide (2) et en déduire 3 équations scalaires.

**Question 8** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au ressort (Ress) et, en tenant compte de la remarque sur la masse et l'inertie du ressort, en déduire sous forme de torseurs, l'action exercée par le ressort sur le solide (1).

**Question 9** Enumérer et caractériser sous forme de torseurs les actions mécaniques exercées sur le solide (1).

**Question 10** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au solide (1) et en déduire 3 équations scalaires.

**Question 11** On suppose maintenant que le mouvement est tel que la condition $\overrightarrow{V}(G_1/\mathcal{R}_0).\overrightarrow{x_0} > 0$ est vérifiée. Dans ce cas on a les relations suivantes : $T_1 < 0$, $T_2 < 0$ et $T_1 = -fN_1$, $T_2 = -fN_2$, où $f$ est le coefficient de frottement. Ecrire le système de huit équations à résoudre permettant de déterminer les huit inconnues.

**Question 12** On suppose maintenant que $f = 0$. Distinguer des équations précédentes,compte tenu de l'hypothèse $f = 0$, les deux équations du mouvement.

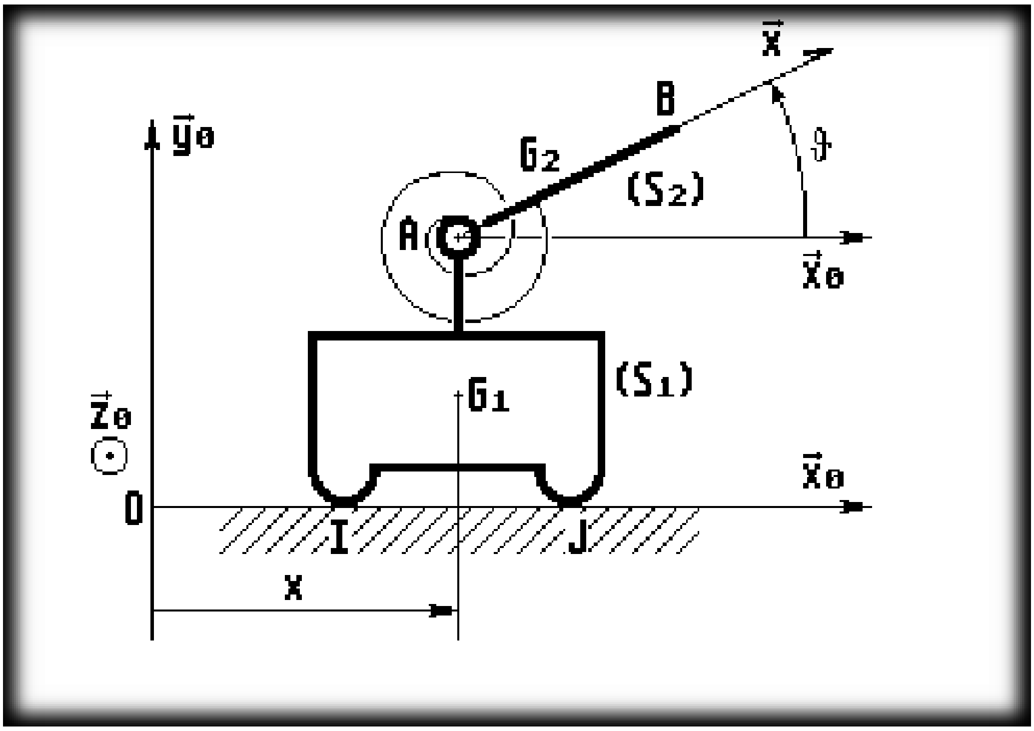


Figure 1

**SUJET 2 : Mécanique des fluides**

Une porte en forme de "T" permet de fermer un canal. Cette porte de hauteur $2h$ possède une largeur $b$ sur sa moitié inférieure et une largeur $2b$ sur sa moitié supérieure.
Cette porte retient sur un de ses côtés un liquide de masse volumique $\rho$ dont la surface libre, débouchant à l'air à la pression $p_a$, est à la même hauteur que le haut de la porte. L'autre côté de la porte débouche à l'air à la pression $p_a$.
On note $O$ un point situé sur la base de la porte et $M$ un point quelconque de la porte. On notera $z$ la coordonnée suivant $\overrightarrow{z}$ du point $M$ et l'accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{z}$.

**Question 1** Donner l'expression de la pression $p$ en un point $M$ de la porte situé du côté du liquide.

**Question 2** Calculer analytiquement la pression au point $O$.

**Question 3** Exprimer le vecteur force élémentaire $d\overrightarrow{F_l}$ exercée par le liquide sur un élément de surface $dS$ de la porte. Exprimer le vecteur force élémentaire $d\overrightarrow{F_a}$ exercée par l'air sur un élément de surface $dS$ de la porte. En déduire l'élément de force $d\overrightarrow{F}$ exercée par le liquide et l'air (force effective) sur un élément de surface $dS$ de la porte.

**Question 4** En déduire le torseur $\{d\mathcal{T}\}$ d'action effective (liquide et air) élémentaire sur un élément de surface $dS$ de la porte. On donnera les éléments de réduction de ce torseur en $M$ et et en $O$.

**Question 5** En intégrant sur toute la surface de la porte, donner l'expression du torseur d'action effective globale $\{\mathcal{T}\}$. On donnera les éléments de réduction de ce torseur en $O$.