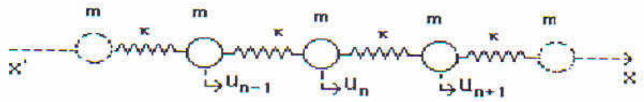
## PROBLEME

### A) Vibrations d'une chaîne linéaire infinie.

On considère une chaîne infinie de particules de masse m réparties le long d'un axe x'x, d'abscisses à l'équilibre $x_n^o = na$ ($n \in Z$). On désigne par $u_n(t)$ le déplacement de la masse n par rapport à sa position au repos. Deux masses consécutives sont supposées reliées par un ressort idéal de raideur $\kappa$.




**1)** Montrer que l'équation du mouvement de la masse n est $m\ddot{u}_n + \kappa(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) = 0$.

**2)** On considère le déplacement donné, en notation complexe, par $\tilde{u}_n = Ae^{j(\omega t - qna)}$. Calculer $\tilde{u}_{n+1}$ et $\tilde{u}_{n-1}$. En partant de l'équation du mouvement, montrer que ce déplacement est bien solution si $\omega$ et q sont reliés par la relation $\omega(q) = \sqrt{\frac{4\kappa}{m}}\left|\sin(\frac{qa}{2})\right|$, ou relation de dispersion.

**3)** En interprétant ce déplacement comme une onde progressive se propageant dans la chaîne, calculer la vitesse de phase $v_\varphi$ et la vitesse de groupe $v_g$. Donner leur limite lorsque $q \to 0$.

### B) Cas de la chaîne finie.

On considère maintenant le cas d'une chaîne limitée s'étendant de x=0 à $+\infty$, la première masse (n=0) est supposée maintenue fixe : $u_0(t)=0$, $\forall t$.

**1)** Justifier que pour $n \neq 0$ l'équation du mouvement obtenue en A1) n'est pas modifiée.

**2a)** En déduire qu'une onde harmonique de pulsation $\omega$ peut se propager dans la chaîne, soit dans le sens $x < 0$, soit en sens inverse. On notera ces deux ondes par $\tilde{u}_n^r = A_r e^{j(\omega t + q_r na)}$ et $\tilde{u}_n^i = A_i e^{j(\omega t - q_i na)}$ respectivement.

**2b)** Compte tenu de la relation de dispersion trouvée en A2), donner la relation entre $q_i$ et $q_r$.

**3)** Donner l'expression générale de l'onde totale dans la chaîne $\tilde{u}_n(t)$. En exprimant la condition aux limites sur $\tilde{u}_0(t)$, déterminer $A_r$ en fonction de $A_i$. Quelle est la nature de l'onde totale ?

### C) Limite de la chaîne continue.

On considère la limite de la répartition continue des masses. L'intervalle infinitésimal autour de x, noté $a \equiv \delta x$, contient une masse élémentaire $\delta m$, uniformément répartie avec la densité linéique de masse $\mu$. Les déplacements $u_n$, $u_{n-1}$ et $u_{n+1}$ deviennent $u(x,t)$, $u(x-\delta x,t)$ et $u(x+\delta x,t)$, fonctions continues de x et t, de même que leur dérivées par rapport au temps. Finalement, on admettra que le produit $\kappa\delta x$ tend vers une limite finie R. En effectuant un développement limité au second ordre en $\delta x$, y compris pour les dérivées par rapport à t, montrer que la nouvelle équation de propagation est identique à celle dans le fluide parfait. Préciser l'expression de la vitesse de propagation de l'onde et interpréter le résultat.

Rappel : $f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x) + \ldots$