

# Concours CASTing 2012

## Épreuve de mécanique

Durée 1h30

Sans calculatrice

Le candidat traitera deux exercices parmi les trois proposés dans le sujet. Dans le cas où les trois exercices seraient traités partiellement, seuls deux seront corrigés.

### Exercice 1 : Mécanique des fluides

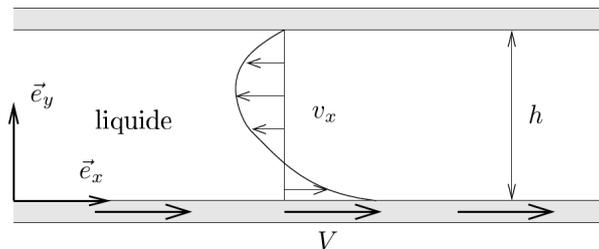


FIGURE 1: Problème considéré

On considère le problème décrit figure 1 : il s'agit d'étudier l'écoulement entre deux plaques planes de dimensions infinies (suivant les axes  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ ), distantes de  $h$ . La plaque supérieure est fixe et la plaque inférieure se déplace à une vitesse uniforme  $V$  suivant l'axe  $\vec{e}_x$ . On appelle  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées d'un point  $M$  dans le repère fixe  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On fait les hypothèses suivantes :

- le fluide est newtonien incompressible, de viscosité  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$ , supposées constantes,
- l'écoulement est permanent,
- la vitesse est indépendante de  $z$  et parallèle à l'axe  $\vec{e}_x$  en tout point :  $\vec{v} = v_x(x, y) \vec{e}_x$ ,
- les forces de volume (et donc la pesanteur) sont négligées.

#### 1. Détermination du champ de vitesse

- Rappeler les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (équations de Navier Stokes) pour un fluide newtonien incompressible dans le cas général.
- En utilisant les hypothèses énoncées et l'équation de conservation de la masse, montrer que la composante  $v_x$  de la vitesse ne dépend que de  $y$ .
- En utilisant les hypothèses énoncées et l'équation de conservation de la quantité de mouvement, montrer que la pression  $p$  ne dépend que de  $x$ .

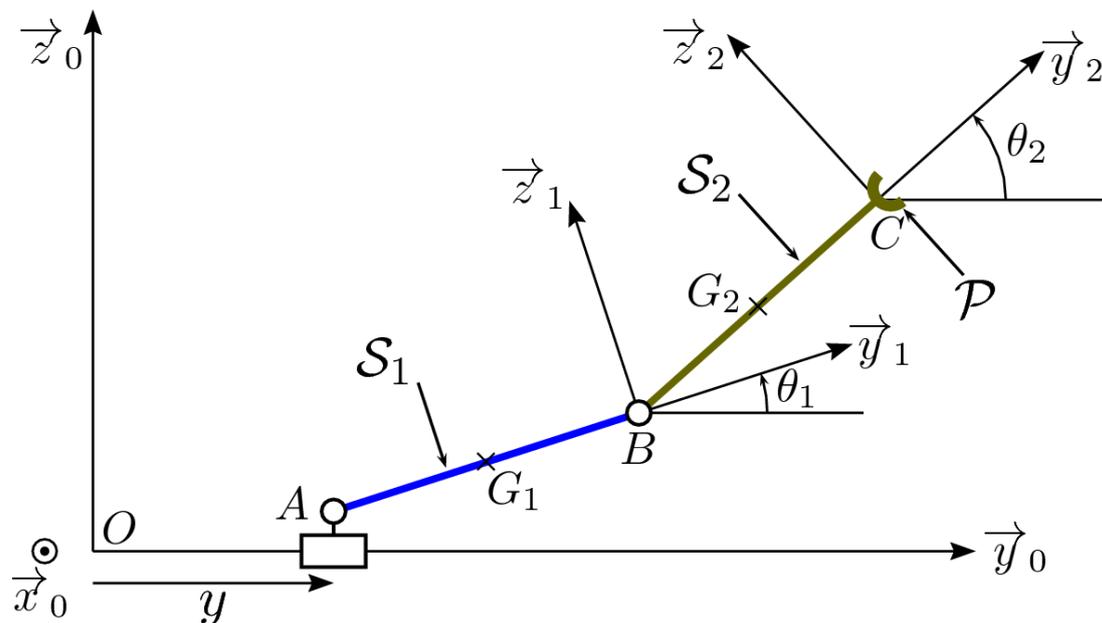
- d) En utilisant l'équation différentielle que doit vérifier la composante  $v_x$  de la vitesse, montrer que la dérivée de la pression  $\frac{dp}{dx}$  est nécessairement constante (dans l'espace et dans le temps).
- e) Préciser les conditions aux limites que doit vérifier  $v_x$ .
- f) En déduire l'expression de  $v_x$  en fonction de  $\mu, h, V, y$  et  $\frac{dp}{dx}$ .

## 2. Analyse du résultat

- a) Calculer le débit de fluide (par unité de longueur suivant  $z$ ) au travers d'une section  $x = x_0$  de normale  $\vec{e}_x$ . Est-il toujours positif ?
- b) Calculer le tenseur des contraintes dans le fluide en fonction de la pression  $p$  et de la vitesse  $v_x$ .
- c) En déduire la densité surfacique de force exercée par le fluide sur la paroi en  $y = 0$ . Décomposer cette densité surfacique en une composante normale et une composante tangentielle à la paroi. La composante tangentielle est-elle toujours orientée dans le sens opposé à la vitesse ? Interpréter le résultat.
- d) Discuter les différents types de profils de vitesse que l'on peut rencontrer suivant les valeurs de  $V, h, \mu$  et  $\frac{dp}{dx}$ . Que se passe-t-il si la pression est uniforme (constante dans l'espace) ? Que se passe-t-il si la vitesse  $V$  est nulle ? Quel est le signe de  $\frac{dp}{dx}$  si on a un profil de vitesse tel que celui présenté figure 1 ?

## Exercice 2 : Dynamique du solide

Un robot de manutention TRR (Translation - Rotation - Rotation) est un système matériel :  $\Sigma$  constitué de deux bras  $S_1$  et  $S_2$  ainsi que d'une pince  $\mathcal{P}$ .



Chaque bras  $S_i$  est modélisé par une tige de masse  $3m$  et de longueur  $2a$ . On note  $G_i$  son centre de masse,  $G_i$  étant situé au milieu de  $S_i$ . La pince  $\mathcal{P}$  est assimilée à un solide ponctuel situé au niveau de l'extrémité  $C$  du bras  $S_2$ . **La masse de cette pince est négligée dans toute l'étude.** Toutes les liaisons entre les solides sont des liaisons parfaites.

Le repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  étant lié au bâti, on paramètre les mouvements du système matériel  $\Sigma$  dans le plan  $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  de la façon suivante :

- le bras  $\mathcal{S}_1$  possède deux degrés de liberté
  - une translation selon la direction  $\vec{y}_0$  caractérisée par la variable  $y$  avec

$$\vec{OA} = y \vec{y}_0$$

où  $A$  est une des extrémités du bras  $\mathcal{S}_1$  ;

- une rotation autour de l'axe  $(A, \vec{x}_0)$  définie par  $\theta_1$  avec

$$\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

- le bras  $\mathcal{S}_2$  est en rotation par rapport au solide  $\mathcal{S}_1$  autour de l'axe  $(B, \vec{x}_0)$  ; cette rotation est définie par la variable  $\theta_2$  avec

$$\theta_2 = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$$

Le champ de pesanteur est défini par  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ . Pour assurer la translation de l'ensemble suivant la direction  $\vec{y}_0$  ainsi que les deux rotations, trois actionneurs permettent d'imposer les efforts moteurs suivants :

- un effort moteur sur le bras  $\mathcal{S}_1$  caractérisé au point  $A$  par ;  $\vec{F}_{01} = F_{01} \vec{y}_0$
- un couple moteur sur le bras  $\mathcal{S}_1$  ;  $\vec{\Gamma}_{01} = \Gamma_{01} \vec{x}_0$
- un couple moteur exercé par le bras  $\mathcal{S}_1$  sur le bras  $\mathcal{S}_2$  ;  $\vec{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} \vec{x}_0$

∴

### Questions Préliminaires :

#### 1. Inconnues dues aux efforts de liaison

Dans le cadre d'une modélisation plane où les composantes des résultantes des efforts sont dans le plan  $(\vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et celles des moments des efforts selon la direction  $\vec{x}_0$ , caractérisez les efforts de liaison, c'est à dire les propriétés satisfaites par :

- $\{\vec{R}_{01}, \vec{M}_{01}(A)\}$  résultante et moment au point  $A$  des efforts qu'exerce le bâti sur le solide  $\mathcal{S}_1$
- $\{\vec{R}_{12}, \vec{M}_{12}(B)\}$  résultante et moment au point  $B$  des efforts qu'exerce le solide  $\mathcal{S}_1$  sur le solide  $\mathcal{S}_2$

#### 2. Bilan Inconnues - équations

- Déduisez-en le bilan inconnues équations fournies par le Principe Fondamental de la Dynamique.
- Que pouvez-vous en conclure ?

#### 3. Indiquez sur un schéma les changements de base permettant de passer de la base fixe $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base liée à chaque solide.

### Objectifs :

On souhaite obtenir les lois de commande (ou équations du mouvement) de ce robot, c'est-à-dire les relations entre les inconnues cinématiques ainsi que leurs dérivées par rapport au temps et les efforts moteurs  $F_{01}$ ,  $\Gamma_{01}$  et  $\Gamma_{12}$ .

## Application du PFD :

4. Ecriture des équations du mouvement sous forme vectorielle :

*Indication* : pour cette question, **les calculs des termes liés aux quantités d'accélération ne sont pas à développer** ; il faut expliciter les relations qui permettront d'obtenir les différentes équations du mouvement du robot, c'est-à-dire les équations différentielles reliant les inconnues cinématiques (et leurs dérivées par rapport au temps) aux efforts  $F_{01}$ ,  $\Gamma_{01}$  et  $\Gamma_{12}$ .

a) Bilan des efforts sur le système complet constitué par les deux bras :

- Faites le bilan des efforts extérieurs qui s'exercent sur le système constitué par les deux bras ;
- Quelles équations ne faisant pas intervenir les inconnues dues aux efforts de liaison peut-on écrire ?

b) Bilan des efforts sur le bras  $\mathcal{S}_1$  :

- Faites le bilan des efforts extérieurs qui s'exercent sur le bras  $\mathcal{S}_1$  ;
- Quelles équations ne faisant pas intervenir les inconnues dues aux efforts de liaison peut-on écrire ?

c) Bilan des efforts sur le bras  $\mathcal{S}_2$  :

- Faites le bilan des efforts extérieurs qui s'exercent sur le bras  $\mathcal{S}_2$  ;
- Quelles équations ne faisant pas intervenir les inconnues dues aux efforts de liaison peut-on écrire ?

## Application des équations de Lagrange :

5. On considère le paramétrage  $y$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

a) Ce paramétrage en  $y$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respecte-t-il les liaisons (cinématiquement admissible) ?

b) Ce paramétrage en  $y$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  permettra-t-il d'obtenir les trois lois de commande ? Justifiez votre réponse.

6. Travail virtuel des efforts ne dérivant pas d'un potentiel

Donnez l'expression du travail virtuel des efforts ne dérivant pas d'un potentiel, c'est-à-dire le travail virtuel des efforts moteurs et des efforts de liaison.

7. Pour le paramétrage retenu en  $y$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , combien d'équations de LAGRANGE peut-on écrire ?

8. Parmi ces équations, écrivez celles qui permettent d'obtenir  $F_{01}$  et  $\Gamma_{12}$  (**sans les développer**).

9. Selon vous, quelles équations issues du Principe Fondamental de la Dynamique permettent de retrouver  $F_{01}$  et  $\Gamma_{12}$  ? Attention, il ne vous est pas demandé de développer les calculs pour répondre à cette question

10. Déterminez les composantes sur la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  des grandeurs suivantes :

$$\vec{\Omega}_{1/0}, \vec{v}(G_1 \in 1/0), \vec{\Omega}_{2/0}, \vec{v}(G_2 \in 2/0).$$

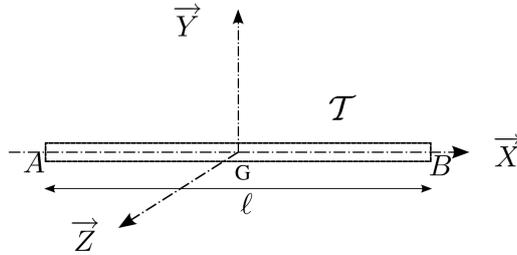
11. Déterminez l'énergie cinétique du solide  $\mathcal{S}_1$ .

12. Déterminez l'énergie potentielle du solide  $\mathcal{S}_1$ .

13. Comment procéder dans le cas où les efforts de liaison  $\vec{R}_{01}$  et  $\vec{R}_{12}$  sont recherchés ?

## Indication :

**Rappel** : on appelle tige un solide dont deux dimensions sont négligeables par rapport à la troisième. Soit  $G$  le centre de masse d'une tige homogène  $\mathcal{T}$  de longueur  $\ell$  et de masse  $m$ . On note  $A$  et  $B$  les deux extrémités de la tige  $\mathcal{T}$ .

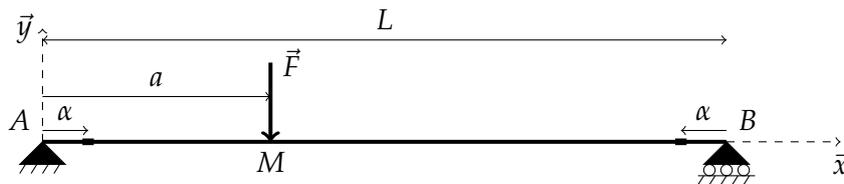


La matrice d'inertie de la tige  $\mathcal{T}$  est donnée par :

$$\mathbb{I} [G, (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}), \mathcal{T}] = \frac{m \ell^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Exercice 3 : Résistance des matériaux

On s'intéresse à la modélisation simplifiée d'un écran tactile de borne sncf. Cet écran "mono-touch" permet de localiser la zone de pression de l'utilisateur sur l'écran (position du doigt) ainsi que son intensité. Pour cela, les déformations de la plaque en verre constituant l'écran sont mesurées par des jauges de déformation. On se propose d'étudier une analogie 1D à ce principe. Considerons la poutre suivante de longueur  $L$  :



Celle-ci repose sur deux appuis rigides à ses extrémités  $A$  et  $B$  et est soumise à un effort vertical  $\vec{F} = -F\vec{y}$  au point  $M$  d'abscisse  $a$ . Le matériau constituant la poutre est supposé élastique-linéaire de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . De plus, le moment quadratique de la section de la poutre selon la direction  $\vec{z}$  est noté  $I$ . Enfin, la section de la poutre est d'épaisseur  $e$  (selon  $\vec{y}$ ) et de largeur  $b$  (selon  $\vec{z}$ ).

#### Questions préliminaires

1. Définir le torseur de cohésion et donner la définition de ses éléments de réduction ;
2. Quelles sont les composantes non nulles de ce torseur (justifier) ?
3. Donner les équations locales que vérifient ces composantes ;
4. Quelle est la conséquence de l'effort  $\vec{F}$  ponctuel sur la continuité du torseur de cohésion ?
5. Donner les lois de comportement liant les composantes du torseur de cohésion aux champs cinématiques ;
6. Préciser les conditions limites (efforts et déplacements) en  $A$  et  $B$  ;
7. Quelles sont les unités de  $E$  et  $\nu$  ? On précisera la plage d'évolution de  $\nu$  ;
8. Donner l'unité de  $I$  ;

## Résolution du problème

9. Isoler la poutre et déterminer la valeur des réactions aux extrémités (notées  $R_A$  et  $R_B$ ) en fonction de l'effort appliqué et des données géométriques;
10. Déterminer l'évolution de l'effort tranchant et du moment de flexion en fonction de l'abscisse  $x$ . Tracer les diagrammes correspondants.
11. Déterminer l'expression du déplacement du point d'abscisse  $x = a$ .

## Etude du problème

On place deux jauges de déformation sur la face inférieure de la poutre aux abscisses  $\alpha$  et  $L - \alpha$  où  $\alpha$  est un paramètre géométrique connu.

12. Quelle est l'unité de la grandeur mesurée par les jauges ? Expliquer le principe de fonctionnement d'une jauge.
13. Donner la forme du tenseur des contraintes dans la section, suffisamment loin des extrémités (dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ).
14. Pourquoi doit-on se placer suffisamment loin des extrémités ?
15. Donner la valeur de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$ , là où sont placées les jauges (en fonction de  $F$  et des données géométriques);
16. En déduire la valeur des déformations  $\varepsilon_{xx}$  mesurées;
17. Comment peut-on en déduire l'intensité de la force exercée par le doigt de l'utilisateur ainsi que sa position ?
18. En réalité, la valeur de  $\alpha$  est mal connue à cause du procédé de fabrication. Comment peut-on selon vous s'affranchir de cette incertitude ?
19. Que pensez-vous de la modélisation de l'effort par rapport à la réalité ? Quelle modélisation alternative proposeriez-vous ?