

# Concours CASTing 2011

## Épreuve de mécanique

Durée 1h30

Sans calculatrice

Le candidat traitera deux exercices parmi les trois proposés dans le sujet. Dans le cas où les trois exercices seraient traités partiellement, seuls deux seront corrigés.

### 1 Exercice 1 : Mécanique des fluides - dépôt d'un film de liquide protecteur sur un barreau cylindrique.

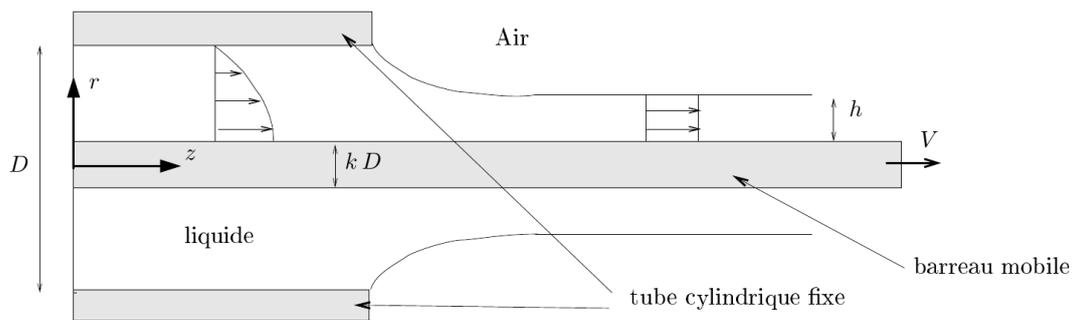


FIGURE 1: Schéma de principe

On considère le procédé décrit figure 1 qui consiste à déposer un liquide protecteur sur un barreau cylindrique. Ce barreau, de diamètre  $kD$  ( $k < 1$ ) se déplace horizontalement suivant l'axe  $z$  à vitesse constante  $V$  au centre d'un tube cylindrique de diamètre intérieur  $D$ . On s'intéresse à l'écoulement du fluide entre le barreau et la paroi du tube.

**OBJECTIF : estimer le débit de fluide, l'épaisseur de la couche de fluide à la sortie du tube et la force nécessaire pour faire avancer le barreau.**

On suppose le fluide newtonien incompressible, de viscosité  $\mu$  de masse volumique  $\rho$ , supposées constantes.

#### 1.1 Démarche et équations générales

- Proposer en quelques lignes une démarche permettant de faire ces estimations.
- Rappeler les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien incompressible dans le cas général.

## 1.2 Simplification du problème et résolution

On utilise dans la suite le repère cylindrique dont l'axe  $z$  est confondu avec l'axe central du barreau (voir figure 1) et on s'intéresse à **l'écoulement à l'intérieur du tube suffisamment en amont de la sortie pour que cette dernière n'ait pas d'influence**. Pour simplifier les équations générales, on fait les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est permanent et invariant suivant l'axe  $\vec{e}_z$ ,
- la vitesse dans l'écoulement est parallèle à l'axe  $\vec{e}_z$  et respecte une symétrie de révolution.
- les effets de la pesanteur sont négligés et la pression est uniforme (indépendante des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ ).

Moyennant ces hypothèses, la vitesse  $\vec{v}$  et la pression  $p$  peuvent s'écrire dans le repère cylindrique :

$$\vec{v}(r, \theta, z, t) = v_z(r) \vec{e}_z, \quad p(r, \theta, z, t) = p_0$$

- En introduisant ces hypothèses, simplifier les équations de conservation générales et établir l'équation que doit vérifier la composante axiale de la vitesse  $v_z(r)$  (on pourra s'aider du formulaire donnée en annexe).
- Préciser les conditions aux limites que doit vérifier  $v_z(r)$ .
- En déduire l'expression suivante :

$$v_z(r) = V \frac{\ln(2r/D)}{\ln k}$$

## 1.3 Exploitation des résultats

- Calculer le débit de fluide au travers d'une section (indication : intégration par partie).
- Suffisamment loin après la sortie du tube, on suppose que le film de liquide est d'épaisseur  $h$  constante et se déplace à vitesse  $V$  du barreau. Calculer l'épaisseur  $h$  en supposant  $h \ll kD$ .
- En reprenant l'expression de la vitesse donnée à la question 1.3-c), calculer les composantes du tenseur des contraintes dans le fluide en fonction de  $k$ ,  $p_0$ ,  $V$ ,  $\mu$  et  $r$  entre le tube et le barreau.
- Calculer la contrainte de cisaillement (orientée suivant  $z$ ) exercée par le fluide sur le barreau et en déduire la force par unité de longueur à exercer sur le barreau pour assurer une vitesse de déplacement  $V$ .

## 2 Exercice 2 : Dynamique du solide

On considère le dispositif représenté sur la figure 2. Ce dernier est constitué d'un bâti (0) supposé lié au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ainsi que d'un engrenage (solide (2)) qui roule sans glisser sur le bâti au point  $J$ . Soit  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$  le repère, tel que le point C (appartenant à l'axe de rotation de (2)) soit sur l'axe  $(O, \vec{z}_1)$ , et on pose  $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . Soit  $\mathcal{R}_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_0, \vec{z}_2)$  le repère lié à (2), et on pose  $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ . Enfin, on suppose que  $\beta = 0$  lorsque  $\alpha = 0$ .

Le problème est considéré comme étant plan. On désigne par  $\vec{g} = g \vec{z}_0$  l'accélération de la pesanteur. Le centre de gravité du solide (2) est supposé localisé au point  $C$ , et sa masse est notée  $m$ . Le moment d'inertie de (2) selon l'axe  $(C, \vec{y}_0)$  est noté  $I$ . Le rayon de la partie cylindrique de (2) roulant sur (0) est noté  $r$ , tandis que celui de la portée dans laquelle a lieu le mouvement est noté  $R$ . Enfin, on note  $f$  le coefficient de frottement au contact entre (0) et (2).

En écartant l'engrenage de sa position d'équilibre, on obtient un mouvement oscillatoire. L'objectif est d'étudier ce mouvement.

**Note : Tous les paramètres géométriques, ainsi que la masse  $m$  de (2) sont supposés connus.**

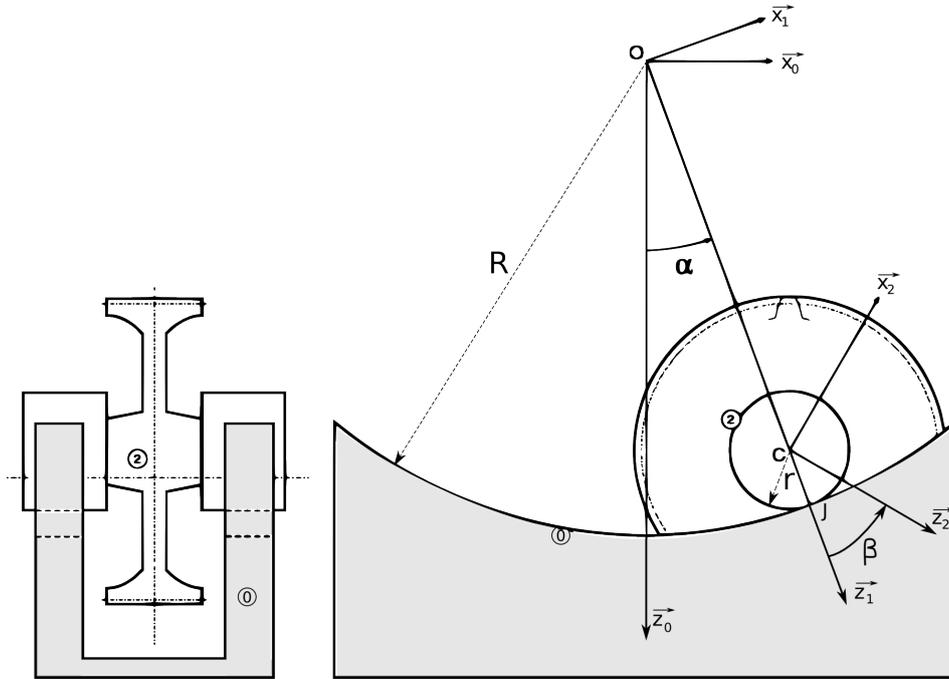


FIGURE 2: Dispositif expérimental

### Questions Préliminaires :

1. Quelle est l'unité de  $I$ ? Expliquer sa signification physique.
2. Les paramètres cinématiques introduits pour décrire le mouvement du système sont-ils indépendants? (justifier)

### Cinématique :

3. Calculer la vitesse du point  $C$  du solide (2) dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  :  $\vec{V}(C, 2/\mathcal{R}_0)$
4. Calculer la vitesse du point  $J$  du solide (2) dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  :  $\vec{V}(J, 2/\mathcal{R}_0)$
5. Quelle est la relation liant  $\alpha(t)$  à  $\beta(t)$ ?
6. Calculer l'accélération du point  $C$  :  $\vec{\Gamma}(C, 2/\mathcal{R}_0)$ ;

### Schématisation des efforts - mise en équation du problème :

On cherche à déterminer l'équation du mouvement de (2) par application du principe fondamental de la dynamique.

7. Caractériser le torseur des actions transmissibles par la liaison entre (0) et (2)
8. Faire le bilan des équations et des inconnues du problème
9. Écrire **sans les développer** les équations du PFD appliqué à (2).
10. Sachant que l'on s'intéresse à l'équation du mouvement, quelle(s) équation(s) du PFD choisissez-vous de développer? (justifier)

### Équations de la mécanique :

11. Calculer le moment dynamique de (2) au point  $C$  :  $\vec{\delta}(C, 2/\mathcal{R}_0)$ ;

12. En déduire le moment dynamique de (2) au point  $J : \vec{\delta}(J, 2/\mathcal{R}_0)$  ;
13. En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement oscillant de (2) ;
14. En supposant que  $\alpha$  reste petit au cours du mouvement, déterminer l'équation du mouvement de (2) ;  
En déduire la période des oscillations.
15. On mesure expérimentalement la période  $T$  des oscillations de (2) : quelle grandeur peut-on en déduire ?

### Équations de Lagrange :

16. Exprimer l'énergie cinétique de (2) ;
17. Expliquer **sans développer les équations** comment obtenir l'équation du mouvement à partir des équations de Lagrange ;
18. Expliquer **sans développer les équations** comment obtenir l'expression de l'effort normal de (0) sur (2) à partir des équations de Lagrange ;

## 3 Exercice 3 : Résistance des matériaux

On considère la poutre console de longueur  $L$  présentée sur la figure 3. Cette dernière est encastree en  $x = 0$ , soumise à un effort réparti  $\vec{f} = -f\vec{y}$  ainsi qu'un effort ponctuel à son extrémité  $\vec{F} = F\vec{x}$ . Le matériau constituant la poutre est supposé élastique-linéaire de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . De plus, le moment quadratique de la section de la poutre selon la direction  $\vec{z}$  est noté  $I$ .

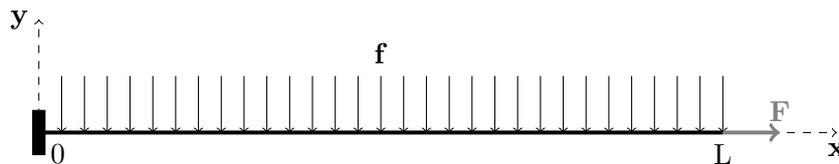


FIGURE 3: Poutre console

### Questions préliminaires

1. Définir le tenseur de cohésion et expliciter ses éléments de réduction ;
2. Quelles sont les composantes non nulles de ce tenseur (justifier) ?
3. Donner les équations locales que vérifient ces composantes ;
4. Donner les lois de comportement liant les composantes du tenseur de cohésion aux champs cinématiques ;
5. Préciser les conditions limites (efforts et déplacements) ;
6. Quelles sont les unités de  $E$  et  $\nu$  ? On précisera la plage d'évolution de  $\nu$  ;
7. Donner l'unité de  $I$  ;

### Résolution du problème

8. On choisit de résoudre le problème en considérant les sollicitations  $\vec{f}$  et  $\vec{F}$  séparément. Justifier cette démarche.
9. Déterminer l'évolution de l'effort normal sur la poutre en fonction de l'abscisse  $x$ . Tracer le diagramme correspondant.

10. Déterminer l'évolution de l'effort tranchant et du moment de flexion en fonction de l'abscisse  $x$ . Tracer les diagrammes correspondants.
11. Déterminer l'expression du déplacement du point d'abscisse  $x = L$ .

### Étude des résultats

12. Parmi les sections présentées sur la figure 4, laquelle minimisera le déplacement à l'extrémité? (justifier votre réponse)
13. Représenter graphiquement l'évolution de la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  sur la section  $B$  de la poutre;
14. Quelle serait cette évolution dans le cas d'une poutre circulaire?
15. La poutre est réalisée en béton. Le module d'Young du béton est très faible en traction. Que pensez-vous de l'influence de  $\vec{F}$  sur la durabilité de la structure?

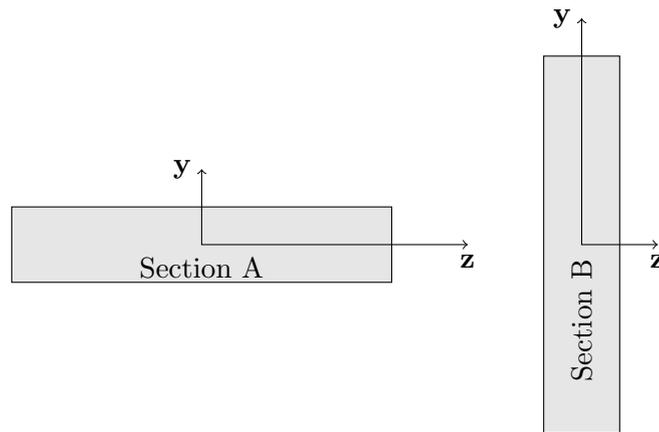


FIGURE 4: Deux sections.

### Annexe : formulaire pour les coordonnées sphériques

Gradient d'un champ scalaire  $p(r, \theta, z)$  :

$$\mathbf{grad}p = \partial_r p \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta p \vec{e}_\theta + \partial_z p \vec{e}_z$$

Gradient, divergence et laplacien d'un champ vectoriel  $\vec{v} = v_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$  :

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{grad} \vec{v})_{ij}] &= \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}} \\
 \operatorname{div} \vec{v} &= \partial_r v_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) + \partial_z v_z \\
 \Delta \vec{v} &= \left( \partial_{rr} v_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta - v_r) + \frac{1}{r} \partial_r v_r + \partial_{zz} v_r \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + \left( \partial_{rr} v_\theta + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r - v_\theta) + \frac{1}{r} \partial_r v_\theta + \partial_{zz} v_\theta \right) \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left( \partial_{rr} v_z + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \frac{1}{r} \partial_r v_z + \partial_{zz} v_z \right) \vec{e}_z \\
 &= \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta) + \partial_{zz} v_r \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r) + \partial_{zz} v_\theta \right) \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \partial_{zz} v_z \right) \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Divergence d'un champ tensoriel du second ordre symétrique  $\sigma$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{div} \sigma &= \left( \partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_{r\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \partial_z \sigma_{rz} \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + \left( \partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + 2 \sigma_{r\theta}) + \partial_z \sigma_{\theta z} \right) \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left( \partial_r \sigma_{rz} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_{\theta z} + \sigma_{rz}) + \partial_z \sigma_{zz} \right) \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Element de surface d'une section :  $r dr d\theta$

●●●● FIN ●●●●