Quelle est la forme la plus générale du principe fondamentale de la dynamique, $\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{d\vec{v}}}{\mathbf{dt}}$ ou $\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d(m \cdot \vec{v})}}{\mathbf{dt}}$?

Deux trains sont en accélération et placés côte à côte. Il vont dans la même direction et dans le même sens. Le train n°1 est soumis à une seule force, sa force d'entrainement F qui est constante. Le train n°2 ajuste sa puissance pour rester, **à tout instant**, à la même vitesse $v(t)$ que le train n°1. Le train n°1 est initialement de masse m_0 et sa vitesse $v(t)$ est exprimée dans le référentiel terrestre.

Parmi les nombreux wagons, il y a des citernes. On decide de transférer le contenue d'une citerne du train n°2 vers une citerne vide du train n°1 avec une débit massique D_m constant et perpendiculaire au mouvement.

On choisie d'étudier le train n°1. Donnez l'expression de l'accélération du train n°1 au cours du temps lors du transfert du contenue de la citerne. L'instant $t = 0$ correspond au début du transfert, à cet instant la masse du train n°1 vaut $m_1(t = 0) = m_0$.

Réponse :

Système d'étude : Train °1 (masse $m_1(t)$, vitesse $v(t)$)
Référentiel d'étude : Terrestre

On a $m_1(t) = m_0 + D_m \cdot t$ et on note $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

On applique le principe fondamental de la dynamique :

- Si $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$:

$$\boxed{a(t) = \frac{F}{m_0 + D_m \cdot t}} \tag{1}$$

- Si $F = \frac{d(m \cdot v)}{dt}$:

$$F = m_0 \cdot a(t) + D_m \cdot \frac{d(v(t) \cdot t)}{dt} \text{ avec } \frac{d(v(t) \cdot t)}{dt} = a(t) \cdot t + v(t)$$

$$\boxed{a(t) = \frac{F - D_m \cdot v(t)}{m_0 + D_m \cdot t}} \tag{2}$$

Commentaires :

On constate que la relation (2) dépend de la vitesse $v(t)$ du train. Autrement dit, selon cette relation l'accélération du train $a(t)$ n'est pas la même selon le choix du référentiel d'étude supposé galiléen. En réalité, c'est la relation (1) qui répond au problème.

Pour que la 2[e] relation soit valide, il faut supposer que la masse $D_m \cdot t$ ajoutée au train n°1 soit initialement au repos dans le référentiel d'étude. Mais dans notre cas, la masse ajoutée au train n°1 est initialement au repos dans le référentiel du train. Lorsque la masse ajoutée n'est pas au repos dans le référentiel du train, il faut considérer un effet supplémentaire, celui lié à l'entrainement de la masse ajoutée à la vitesse du train. Cette effet peut être modélisé par une force supplémentaire de la forme suivante : $F' = D_m \cdot (v_0 - v(t))$ où v_0 est la vitesse initiale de la masse ajoutée dans le référentiel d'étude. Pour obtenir ce dernier resultat, on oriente les forces F et F' et les vitesses $v(t)$ et v_0 dans le même sens.

En prenant $F + F' = m \cdot \frac{dv}{dt}$ et si $v_0 = 0$ alors on obtient :

$$a(t) = \frac{F - D_m \cdot v(t)}{m_0 + D_m \cdot t}$$

Dans cette situation $\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d(m \cdot \vec{v})}}{\mathbf{dt}}$ est un cas particulier de $\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{d\vec{v}}}{\mathbf{dt}}$.

Est-ce vrai de façon générale ?