Pour poser un peu plus clairement mon problème, je cherche une forme d'épaisseur constante, noté *l*, l'étude peut donc être faite en 2D, dans le plan (y,z) par exemple.

D'autre part, je cherche un balourd, donc un déséquilibrage, je propose donc de ne pas mettre de matière pour le z<0.

Le moment d'inertie suivant l'axe $(O;\vec{x})$, noté Δ, est donné par :

$$I(S/\Delta) = \int_{M\in S} (y^2 + z^2)\,\rho dM = \iiint_{M\in S} (y^2 + z^2)\rho dxdydz$$

Je propose de noté f la fonction strictement positive donnant le contour du profil de la forme dans le cadran (y>0, z>0), ainsi, dans ce cadran, la forme est définie par y=f(z).

Par symétrie de la forme physique, dans le cadran (y<0, z>0), y=-f(z).

Ainsi,

$$I(S/\Delta) = \int_{x=0}^{l} \int_{z=0}^{z_{max}} \int_{y=-f(z)}^{f(z)} (y^2 + z^2)\rho dxdydz$$

$$I(S/\Delta) = l\rho \int_{z=0}^{z_{max}} \int_{y=-f(z)}^{f(z)} (y^2 + z^2)dydz = l\rho \int_{z=0}^{z_{max}} \left(\int_{y=-f(z)}^{f(z)} y^2 dy + z^2 \int_{y=-f(z)}^{f(z)} dy \right) dz$$

$$I(S/\Delta) = l\rho \int_{z=0}^{z_{max}} \left(\frac{2}{3}\big(f(z)\big)^3 + 2z^2 f(z) \right) dz$$

Je cherche donc à minimiser cette inertie, pour cela, j'utilise le principe des variations d'Euler-Lagrange.

Notons $L\left(z; f(z); \frac{df}{dz}(z)\right) = \frac{2}{3}\big(f(z)\big)^3 + 2z^2 f(z)$

Ainsi, cette inertie est extrême pour $\frac{\partial L}{\partial f} = 0$, soit donc, pour L=cste.

Posons K cette constante, qui sera à déterminer à l'aide du balourd recherché.

Ainsi, l'inertie est extrême pour $\frac{2}{3}\big(f(z)\big)^3 + 2z^2 f(z) = K$

La forme, dans le cadran (y>0 ; z>0) est donc donnée par :

$$\frac{2}{3}y^3 + 2z^2 y = K$$

$$z = \sqrt{\frac{K}{2y} - \frac{y^2}{3}}$$

Physiquement, pas de sens de trouver une divergence en y=0…