Petits calculs de Physique

à propos

des fusées à eau

ou

Utilisation des fusées hydrodynamiques pour l'enseignement

en

mécanique des fluides

et

thermodynamique

Remerciements à Bernard de Go Mars! pour ses nombreuses relectures et ses critiques toujours constructives.

I) <u>But</u>

I.1) Logique suivie

Le but de ce texte est de montrer comment on peut <u>essayer</u> d'intéresser les élèves à l'étude de la mécanique des fluides et de la thermodynamique à travers une expérience : le lancement d'une fusée hydrodynamique.

Dans la logique que j'ai choisie (ce n'est pas la seule possible) le lancement est une expérience de cours, ou plutôt dans la cour.

Ensuite l'expérience sert de support tout au long de l'année à un certain nombre de calculs qui sont des applications directes du cours.

I.2) Construction

Il faut donc construire une base et une (au moins) fusée. Pour ceci, je vous conseille d'utiliser l'Internet. Il suffit de rentrer "fusée à eau" dans votre moteur de recherche préféré.

En français, les sites de Techno-challenge, Planète Science, Go Mars! et Alain Juge sont très utiles (ce ne sont pas les seuls).

Pour la théorie, en anglais, le site de Dean Wheeler est très bien, mais il dépasse largement le cadre de cette étude. Certaines vidéos prises avec une caméra à haute vitesse sont très intéressantes.

<u>Attention</u> ! Le risque d'explosion n'est pas négligeable. <u>Prendre toutes les précautions nécessaires</u>.

En particulier et de manière **non exhaustive** :

- Tester en pression les fusées avant le départ. Tester la fusée terminée, les colles pouvant détériorer la bouteille. Le test se réalise avec une bouteille pleine d'eau et à une pression légèrement supérieure à la pression d'utilisation.
- Prévoir sur la base de lancement un système qui permet d'avorter le tir en faisant chuter la pression (très utile pour les tests).
- Prévoir un écran entre le pas de tir et les spectateurs, qui doivent être placés à plus de 10 m.
- Placer les spectateurs dans un lieu où ils ne risquent pas de recevoir le projectile quand il retombe (en cas d'impossibilité utiliser un casque).
- Ne pas réutiliser une fusée qui a subit un choc violent.

I.3) Avertissements

Ce texte s'adresse à : - des enseignants de physique qui ont à traiter ces sujets au niveau BTS (BTS CIRA, Chimie, ROC, TPIL(?), etc....) ou premières et terminales STL (partie mécanique des fluides).

- **toute personne intéressée par les fusées à eau**.

Le but de ce texte **<u>n'est pas</u>** : d'étudier la trajectoire, ou de modéliser cette trajectoire.

Ce texte n'a ni été relu, ni officiellement approuvé par l'inspection de sciences physiques et chimiques pures et appliquées.

Toutes les expériences sont pratiquées à vos risques et périls ...

I.4) Applications numériques

Les applications numériques sont réalisées avec les données que j'ai collectées. Je vous encourage donc à refaire les calculs en utilisant vos propres données, ce qui reste un des buts de ce texte.

Dans les applications numériques, pour plus de clarté, les données sont inscrites à la place de la lettre qui leur correspond.

En cas de doute, toujours utiliser les unités du système international.

II) Rappels de mécanique

Le départ de la fusée est l'occasion de rappels de mécanique du solide qui sont une base nécessaire pour la suite.

On peut citer les notions de :

- force
- force de contact, force à distance
- principe des interactions réciproques (on ne parle plus d'**action** et **réaction***)
- poids
- forces de frottements
- etc...

***** Ne pas y voir de question politique, il s'agit plutôt d'un débat du type : "l'oeuf ou la poule"   ;-) ....

III) Statique des fluides

Ce premier chapitre constitue l'étude de la phase avant lancement

III.1) Pression interne

a) Pression

La lecture de la pression sur la base de départ est le prétexte d'une discussion à propos des notions de pression absolue, relative et différentielle.

Rappels : - Pression absolue : pression par rapport au vide, notée p_{abs} ou p(abs).

- Pression relative : pression par rapport à l'atmosphère, notée p_{rel} ou p(rel).

on a : $\mathbf{p_{abs} = p_{rel} + p°}$ (si p° est la pression atmosphérique).

- Pression différentielle : différence de pression entre deux points, notée Δp.

Remarque : la pression est notée p (en minuscule), P est utilisé pour le poids (ou la puissance).

Il est aussi possible de se poser des questions sur les unités de pression.

Rappels : La seule unité de pression légale est le Pascal. 1 Pa = 1 N/m^2.

Il existe d'autres unités : - le bar : 1 bar = 1.10^5 Pa
- l'atmosphère : 1 atm = $1{,}01325.10^5$ Pa
- le kgforce par cm^2 : 1 kgf/cm^2 = $0{,}981\ .10^5$ Pa
- le mm de mercure : 1 mmHg = 133,3 Pa
- le mètre de colonne d'eau : 1 mCE = 9810 Pa
- le pound per square inch : 1 PSI = $6{,}89.10^3$ Pa

Noter que l'on a : 1.10^5 Pa = 1 bar ≈ 1 atm ≈ 1 kgf/cm^2.

Dans notre cas, on peut lire la pression relative qui est de 6 bars. On en déduit que la pression interne est de 7 bars.

b) influence de l'eau

Vu la disposition du manomètre on peut se poser la question suivante : la pression mesurée est-elle représentative de la pression au niveau du goulot ?

On sait que dans un fluide de masse volumique ρ, entre deux points A et B séparés par une hauteur h (B plus bas que A) on a :

$$\mathbf{p_B = p_A + \rho \cdot g \cdot h}$$

(la pression augmente quand on descend)

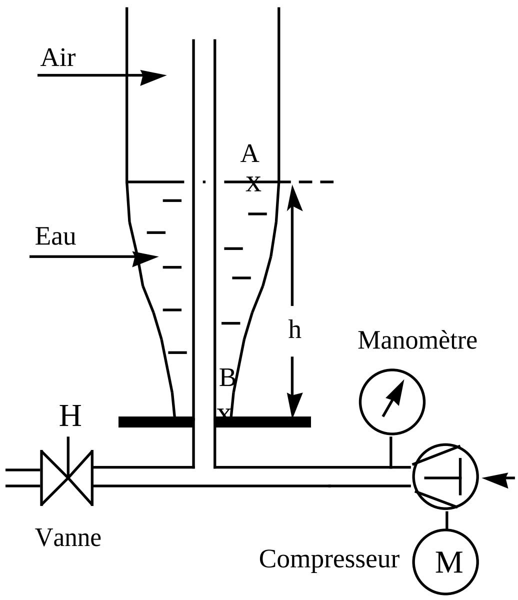
Entre le manomètre et le point A, on peut dire que la pression ne varie pas car la masse volumique du gaz (même comprimé) est très faible. Soit : $p_A = 7.10^5$ Pa.

Entre A et B la différence de pression est : $\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$

A.N : $\Delta \mathbf{p} = 1.10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}12 = \mathbf{1{,}12.10^3\ Pa}$

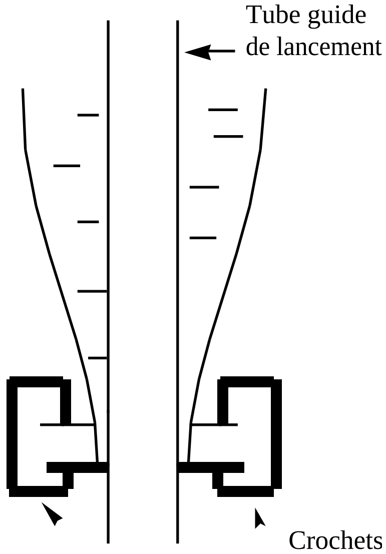
Soit un écart relatif : $\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{1{,}12.10^3}{7.10^5} = 0{,}16\ \%$

Cet écart est bien inférieur à la précision du manomètre.



On peut donc conclure que vu les faibles différences d'altitudes, il sera possible de négliger les variations de pression. La pression est donc considérée comme identique dans tout le dispositif (ou uniforme).

III.2) Force pour retenir la bouteille



Une fois la bouteille sous pression, on peut se demander quelle est la force nécessaire pour la retenir.

Il faut savoir que la force de pression appliquée sur une paroi de forme quelconque suivant une direction donnée est :

$$\mathbf{F = \Delta p \cdot S'}$$

avec :

Δp = la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur (en Pa)

S' = la projection de la surface entre l'intérieur et l'extérieur sur un plan perpendiculaire à la direction de la force que l'on veut calculer.

Cette formule entraîne une grande simplification (sinon il aurait fallu intégrer vectoriellement sur la surface réelle, en la divisant en surfaces infiniment petites ... impossible à calculer sans ordinateur), mais elle n'est valable que si la différence de pression est la même en tout point.

On a vu précédemment que les pressions pouvaient être considérées comme uniformes sur tout le dispositif, la formule est donc applicable.

Ici, S' est la surface du goulot. On a :

$$F = \Delta p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

A.N : $\mathbf{F} = 6.10^5 \cdot \dfrac{\pi \cdot \left(21{,}7.10^{-3}\right)^2}{4} = \mathbf{222\ N} = 22{,}2\ \text{daN} = 22{,}6\ \text{kgf}$

Rappel : 1 kgf = 1 kilogrammeforce = 9,81 N. Le kgf est une ancienne unité qui correspond au poids d'une masse de 1 kg sur terre.
Souvent appelée improprement kilogramme ou même kilo (horreur, kilo signifiant 1000 ...). Il est préférable d'utiliser le daN qui à 2% prés donne la même valeur.

Remarque : Le départ de la bouteille s'effectue au moyen du tube guide. On peut considérer qu'il n'y a pas d'eau qui s'échappe tant que la fusée n'a pas quitté la rampe de lancement. La fusée commence donc son ascension seulement sous l'action des forces de pression (c'est ce que l'on nomme couramment l'**effet piston**).

Quel est le diamètre minimum du goulot pour avoir un départ dans ces conditions si la masse totale de la fusée, à cet instant, est de 240 g ?

La masse de la fusée est m = 0,240 kg donc son poids est P = m.g = 2,35 N. La force de pression (F) devra donc être supérieure à 2,35 N.

De la formule précédente on tire : $d_{min} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot F}{\pi \cdot \Delta p}}$

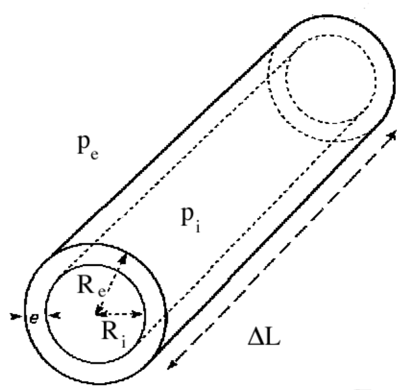
A.N : $d_{min} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 2{,}35}{\pi \cdot 6.10^5}} = 2{,}2$ mm

Remarque 2 : Toujours pour l'effet piston, quelle est l'accélération initiale pour d = 21,7 mm (fusée à goulot plein) ?

L'application de la relation fondamentale de la dynamique $\left(\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}\right)$ donne :

$a = \dfrac{F}{m} - g = \dfrac{222}{0{,}240} - 9{,}81 = 915\ \text{m.s}^{-2} = 93\ g$ (éviter les expériences embarquées !)

III.3) Pression maximale admissible

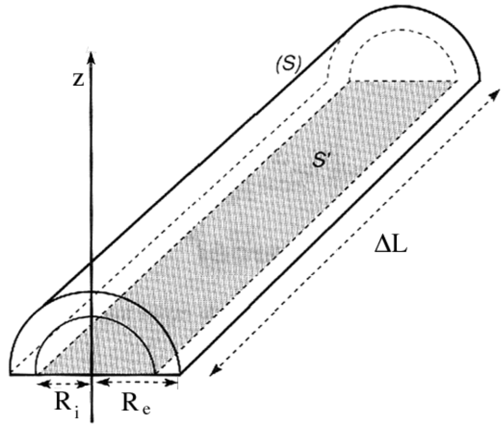


Soit une portion cylindrique de la fusée de longueur ΔL, de rayon intérieur R_i, de rayon extérieur R_e. L'épaisseur du tuyau est:

$$\mathbf{e = R_e - R_i}$$

La fusée contient un fluide dont la pression est p_i. A l'extérieur, la pression de l'air est p_e.

Concrètement, le problème est de pouvoir déterminer la pression maximale que le matériau constituant cette portion de la fusée peut supporter.



On choisit une direction (z) coïncidant avec un des diamètres du tuyau.

La norme de la force de pression résultante F_i, due au fluide intérieur est :

$$F_i = p_i \,.\, S'$$

S' étant la projection de la surface S sur un plan perpendiculaire à z.

Or, S est la surface d'un demi-cylindre de longueur ΔL et de rayon R_i. S' est donc un rectangle de longueur ΔL et de largeur $2.R_i$. Il vient :

$$\mathbf{F_i = p_i \,.\, 2.R_i \,.\, \Delta L}$$

De façon semblable, on obtient pour la norme de la force de pression F_e due à l'air extérieur :

$$F_e = p_e \,.\, S'' \qquad \text{avec :} \quad S'' = 2\, R_e \,.\, \Delta L$$

soit :

$$\mathbf{F_e = p_e \,.\, 2.R_e \,.\, \Delta L}$$

La force qui tend à séparer les deux demi-cylindres est donc :

$$F = F_i - F_e$$

$$\Rightarrow \qquad F = p_i \,.\, 2.R_i \,.\, \Delta L \;-\; p_e \,.\, 2.R_e \,.\, \Delta L$$

Or e est petit, on peut donc poser que : $R_i \approx R_e$, ce qui donne :

$$F = 2\, R_e \,.\, \Delta L \,.\, (p_i - p_e)$$

$$\mathbf{F = 2\, R_e \,.\, \Delta L \,.\, \Delta p}$$

<u>Remarque</u> : La direction z a été choisie arbitrairement suivant un diamètre quelconque de la fusée. Il est évident que les forces de pression se développent suivant tous les diamètres de la bouteille et que l'éclatement, s'il se produit, n'aura pas lieu suivant un plan déterminé. La fusée, si elle éclate, ne sera pas proprement découpé en deux demi-cylindres !

Mais, le matériau qui constitue la fusée a une certaine résistance mécanique. Soit R_m la force de cohésion par unité de surface de ce matériau. C'est une contrainte qui a la même dimension qu'une pression (force/surface) et on peut écrire, par analogie avec les résultats précédents, pour la force de résistance T, du tuyau :

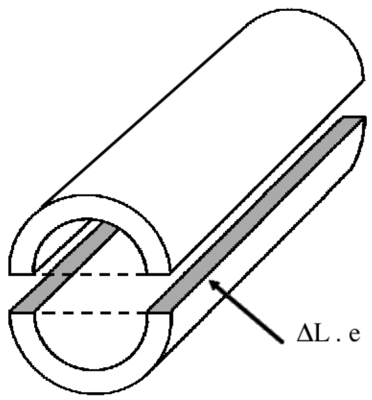
$$T = R_m \,.\, S'''$$

où S''' désigne la projection de la surface du matériau sur un plan perpendiculaire à la direction z.

$$S''' = 2 \,.\, \Delta L \,.\, e$$

soit :

$$\mathbf{T = R_m \,.\, 2 \,.\, \Delta L \,.\, e}$$



La rupture se produira si :

$$F \geq T$$

A la limite :

$$2\ R_e\ .\ \Delta L\ .\ \Delta p_{max} = R_m\ .\ 2\ .\ \Delta L\ .\ e$$

soit :

$$\Delta \mathbf{p}_{\mathbf{max}} = \frac{\mathbf{R_m\ .\ e}}{\mathbf{R_e}}$$

Vu la géométrie complexe de la bouteille, se pose la question de savoir quelles valeurs de e et R_e utiliser. Ce sont celles qui vont donner le Δp_{max} le plus faible, c.à.d : **e** le plus petit et/ou $\mathbf{R_e}$ le plus grand.
Par chance, l'épaisseur est la plus faible sur la section de plus grand rayon, c'est donc cet endroit là qu'il faut considérer.

A.N. :

$$\Delta \mathbf{p}_{\mathbf{max}} = \frac{60,9.10^6\ .\ 0,40.10^{-3}}{33.10^{-3}} = \mathbf{7,38.10^5\ Pa}$$

Remarque : La valeur de R_m est très variable, suivant les données des fabriquants elle varie de 60 MPa pour du PETE pur, jusqu'à plus de 190 MPa pour du PETE additionné de fibre de verre (jusqu'à 30%) et autres ... Toute la gamme entre les deux étant disponible. Des tests de traction ont donc été réalisés (voir **note 1** à la fin du texte).

Pour ceux qui peuvent mesurer l'épaisseur d'une bouteille, la valeur de l'épaisseur prise à 0,4 mm pour la Badoit est peut-être un peu grande. D'autre mesures m'ont montré qu'elle variait de 0,35 à 0,40 mm. Mais comme c'est la valeur que j'ai rentrée dans la machine de traction, les résultats sont cohérents avec cette épaisseur et il faut la garder dans les calculs.

Remarque 2 : Il semble que, expérimentalement, des valeurs de l'ordre de 12 à 14 bars soient couramment admises par les internautes. Ce qui donne un écart assez important par rapport à la théorie.

Quelques explications possibles :

- les tests de traction on été effectués sur des portions aplaties, ce qui entraîne des contraintes internes supplémentaires.
- les bouteilles sacrifiés pour les tests on passé un an dans mon garage.
- le calcul est effectué pour une partie cylindrique infinie, ici, une partie des efforts peut se reporter sur les extrémités qui sont plus solides (c'est moins vrai pour une bouteille de Coca dont la partie cylindrique est plus longue).

Remarque 3 : On peut aussi se poser la question de savoir si la bouteille ne vas pas se rompre perpendiculairement à l'axe considéré précédemment.

Dans ce cas on a : $\mathbf{F = \pi\ .\ R_e^2 .\ \Delta p}$

et

$\mathbf{T = R_m\ .\ 2\ .\ \pi\ .\ R_e\ .\ e}$

soit :

$$\Delta \mathbf{p}_{\mathbf{max}}\mathbf{(2)} = \frac{\mathbf{2\ .\ R_m\ .\ e}}{\mathbf{R_e}}$$

Ce qui correspond au double de la valeur précédente ... pas de risque de ce côté là.

IV) Dynamique des fluides

Étudions à présent la partie couramment appelée "propulsion hydraulique".

IV.1) Vitesse d'éjection de l'eau

Pour calculer la vitesse d'éjection du fluide on utilise l'équation de Bernouilli appliquée entre deux points 1 et 2, p, v et z étant respectivement les pressions, vitesses et altitudes du fluide aux points 1 et 2 :

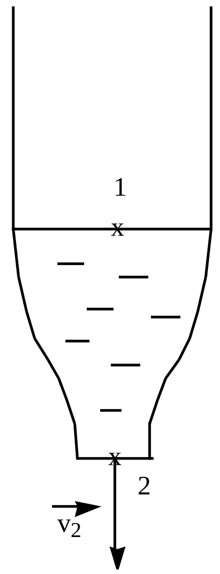
$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + z_2$$

Rappel :

Cette équation est valable pour les fluides parfaits (sans viscosité), incompressibles, pour un écoulement irrotationnel et stationnaire (ne dépendant pas du temps) (**voir note 2**).

Ce qui donne :

$$\frac{v_2^2}{2 \cdot g} - \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_1 - z_2$$



La section du goulot étant considérablement plus petite que celle du corps de la bouteille, on a $v_2 >> v_1$ (sauf à la fin de la propulsion).
De plus, les termes qui dépendent de l'altitude sont négligeables (voir le III.1.b) :

$$\mathbf{v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}}$$

A.N : $\mathbf{v_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot (7.10^5 - 1.10^5)}{1.10^3}}$ = **34,6 m.s^{-1}** = 124 km.h^{-1}

Remarque 1 : quand la bouteille se vide, la pression diminue, donc la vitesse d'éjection diminue. De plus, vers la fin, v_1 n'est plus négligeable ...

Remarque 2 : on a pas considéré les pertes de charge, c.à.d. les pertes par frottements dans le liquide et entre le liquide et les parois de la bouteille.

Remarque 3 : l'éjection de l'air qui est encore comprimé à la fin ne peut pas se calculer avec l'équation de Bernouilli, cette équation étant limitée aux fluides incompressibles. Néanmoins elle peut s'appliquer, en approximation, si la vitesse du fluide compressible n'est pas trop proche de la vitesse du son dans ce même fluide

IV.2) Poussée

Pour calculer la poussée on peut utiliser le Théorème d'Euler (ce n'est pas la seule possibilité, mais je fais en fonction du programme de BTS CIRA...).

a) Théorème d'Euler

La résultante de toutes les forces extérieures s'appliquant à une masse m de fluide est égale à la différence des quantités de mouvement qui entrent et qui sortent, par unité de temps, d'une enveloppe fermée Σ.

b) Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une masse m ayant une vitesse $\vec{v}$ est la grandeur :

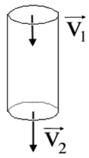
$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$$

c) Enveloppe

La surface Σ doit :
- être fermée
- être entièrement dans le fluide
- ne pas couper de solide.

d) Application à un tube de courant

Si on considère un tube de courant, on nomme son entrée 1 et sa sortie 2,



Alors, on peut écrire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{dt}$$

On note dm la masse de fluide qui entre et qui sort du tube de courant pendant le temps dt (cette quantité est la même en entrée et sortie car il n'y a pas d'accumulation de matière dans le tube de courant).

D'où :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{dm \,.\, \vec{v}_2 - dm \,.\, \vec{v}_1}{dt}$$

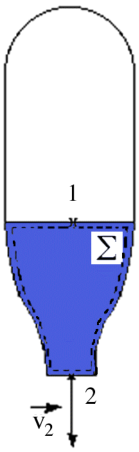
$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \,.\, dm}{dt}$$

Or $\frac{dm}{dt}$ est le débit massique sur le tube de courant, que l'on va noter dQ_m. Ce qui donne :

$$\sum \vec{F}_{ext} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \,.\, dQ_m$$

e) Calcul de la poussée

La surface Σ considérée est une surface qui contient toute l'eau présente dans la bouteille :



On peut écrire que :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{\Sigma} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \,.\, dQ_m$$

On considère que la vitesse d'éjection du fluide est uniforme sur la section de sortie et que v_1 est très petit par rapport à v_2.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{v}_2 \,.\, \int_{\Sigma} dQ_m$$

Ce qui donne, en projection sur l'axe des z, orienté positivement vers le haut :

$$\sum F_{ext} = - v_2 \,.\, Q_m$$

où Q_m est le débit massique de fluide éjecté.

Le terme $\sum \vec{F}_{ext}$ correspond à la force que l'extérieur applique sur le fluide, soit ici $\vec{F}'$ la force de la fusée sur le fluide plus la force de pression du gaz extérieur sur le fluide:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}' + p° \,.\, S \,.\, \vec{k}$$

où : S est la surface de sortie et $\vec{k}$ le vecteur unitaire de l'axe de z.

En projection sur l'axe des z orienté positivement vers le haut :

$$F' = -v_2 \,.\, Q_m - p° \,.\, S$$

Remarque 1 : le signe - provient du fait que l'on a calculé la force appliquée sur le fluide.

Remarque 2 : Généralement, la valeur prise pour la poussée est : $v_2 \,.\, Q_m$.

Le terme qui dépend de la pression n'est pas négligé ... il est oublié ! En fait il est intégré dans le bilan des forces, au travers des forces de pression appliquées par l'atmosphère sur la fusée, dont la résultante totale est la poussée d'Archimède qui elle est négligeable dans notre cas (**voir note 3**).

L'expression que l'on peut prendre pour la poussée est donc bien :

$$\mathbf{F = v_2 \,.\, Q_m}$$

De ce que l'on vient de démontrer, on tire :

$$\left.\begin{array}{l} F = v_2 \,.\, Q_m \\ Q_m = \rho \,.\, Q_v \\ Q_v = S \,.\, v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{F = \rho \,.\, S \,.\, v_2^2}$$

A.N. : Dans les conditions du départ,

$$\mathbf{F} = 1.10^3 \,.\, \frac{\pi \,.\, \left(21{,}7.10^{-3}\right)^2}{4} \,.\, 34{,}6^2 = 443 \text{ N} = \mathbf{44{,}3 \text{ daN}}$$

Cette valeur montre bien qu'il ne vaut mieux pas se trouver sur la route de la fusée juste au moment du départ !

Remarque : En reprenant ce que l'on a dit dans la remarque 2 du III.2 (page §), l'accélération au début de la propulsion hydraulique est :

$$a = \frac{F}{m} - g = \frac{443}{0{,}240} - 9{,}81 = 1836 \text{ m.s}^{-2} = 187 \text{ g } \mathbf{!!}$$

V) Thermodynamique

V.1) Gaz parfait

a) quantité de gaz

Il est possible de calculer la quantité de gaz enfermé dans la fusée avant le départ.

L'équation d'état des gaz parfaits nous donne :

$$p \,.\, V = n \,.\, R \,.\, T$$

soit :

$$n = \frac{p \,.\, V}{R \,.\, T}$$

<u>A.N.</u> : $\mathbf{n} = \dfrac{7.10^5 \;.\; 0{,}33.10^{-3}}{8{,}314 \;.\; (25 + 273{,}15)} = \mathbf{9{,}3.10^{-2}\ mol}$

<u>Attention</u> : V en m^3 et T en K.

<u>Rappel</u> : La lettre T (t majuscule) désigne la température en K

La lettre t (t minuscule) désigne la température en °C

Comme la lettre t désigne aussi le temps, pour éviter certaines confusions on désigne aussi la température en °C par la lettre θ (thêta).

On a la relation : $T = \theta + 273{,}15$.

Il est aussi possible de savoir quel volume de gaz ces $9{,}3.10^{-2}$ mol représentent à température et pression ambiantes :

$$\mathbf{V} = \frac{n \,.\, R \,.\, T_0}{p_0} = \frac{9{,}3.10^{-2} \;.\; 8{,}314 \;.\; (273{,}15 + 25)}{1{,}013.10^5} = \mathbf{2{,}3\ L}$$

b) masse volumique du gaz

On a :

$$\left.\begin{array}{l} p \,.\, V = n \,.\, R \,.\, T \\ n = \dfrac{m}{M} \end{array}\right\} \Rightarrow p \,.\, V = \frac{m}{M} \,.\, R \,.\, T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{V} = \frac{M}{R} \,.\, \frac{p}{T}$$

Si on pose : $r = \dfrac{R}{M}$ et $\rho = \dfrac{m}{V}$, alors :

$$\rho = \frac{p}{r \,.\, T}$$

<u>A.N.</u> : $r = \dfrac{8{,}314}{29.10^{-3}} = 286{,}7\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ (avec $M = 29.10^{-3}\ kg.mol^{-1}$ = masse molaire moyenne de l'air).

$$\rho = \frac{7.10^5}{286{,}7 \;.\; (273{,}15 + 25)} = \mathbf{8{,}2\ kg.m^{-3}}$$

La masse d'air dans la fusée est donc : $m = \rho \,.\, V = 8{,}2 \,.\, 0{,}33.10^{-3} = 2{,}7.10^{-3}$ kg

Ce qui représente 1,1% de la masse de départ (négligeable) et 3,8% de la masse à vide de la fusée.

<u>Remarque</u> : il est plus facile de calculer la masse avec la relation : $m = n \,.\, M$.

V.2) Changement d'état.

a) vapeur en équilibre avec l'eau liquide

L'équilibre liquide-vapeur ne dépend que de la température. En clair, la pression de la vapeur d'eau en équilibre avec le liquide ne dépend que de la température (et pas de la pression totale au dessus du liquide).

Cette pression est la pression de saturation (p_{sat}).

Dans les tables, on trouve : $p_{sat,\ H_2O,\ 25°C} = 3,168.10^3$ Pa

L'air contenu dans la bouteille est un mélange de gaz parfait et on peut donc considérer que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait, seul dans l'enceinte à la pression $p_{sat,\ H_2O,\ 25°C}$.

On peut calculer la quantité d'eau contenue dans le gaz :

$$n(H_2O) = \frac{p_{sat,\ H_2O,\ 25°C} \cdot V}{R \cdot T}$$

A.N. : $\mathbf{n(H_2O)} = \dfrac{3,168.10^3 \ . \ 0,33.10^{-3}}{8,314 \ . \ (273,15 + 25)} = \mathbf{4,2.10^{-4}\ mol}$

ce qui représente une masse de : **m** = n . M = $4,2.10^{-4}$. 18 = **7,6 mg**

b) chaleur dégagée

Au cours de la détente du gaz, la température baisse considérablement (voir plus bas). Il s'ensuit que la pression de saturation devient presque nulle, la vapeur d'eau se condense et donne au système une certaine quantité de chaleur.

Cette quantité de chaleur est :

$$Q = n \cdot L(vap, H_20)$$

où : - n est la quantité d'eau condensée (en mol)
- L(vap, H_20) est la chaleur latente de vaporisation de l'eau (en $J.mol^{-1}$)

Il est aussi possible d'utiliser :

$$Q = m \cdot l(vap, H_20)$$

où : - m est la masse d'eau condensée (en kg)
- l(vap, H_20) est la chaleur latente de vaporisation de l'eau (en $J.kg^{-1}$)

A.N. : Les tables donnent, à 25°C : l(vap, H_20) = 2442 $J.g^{-1}$.

Q = $7,6.10^{-3}$. 2442 = **18,5 J**

Remarque : ce calcul ne tient pas compte de l'énergie cédée par l'eau quand elle se refroidit (termes en Q = m.c.ΔT).
Il ne tient pas compte du fait qu'il est possible d'obtenir des grains de glace, vu les très faibles températures théoriquement atteintes (de l'ordre de -20°C).

Remarque 2 : la quantité de chaleur produite est loin d'être négligeable si on la compare aux 89 J données par la détente du gaz (voir plus bas). Il y aura donc une influence sur la propulsion , mais ceci dépasse largement le cadre de notre étude.

V.3) Détente adiabatique

Rappel : Le terme adiabatique désigne une transformation thermodynamique d'un système sans échange de chaleur avec l'extérieur.

Dans le cas du gaz parfait on démontre la loi de Laplace :

$$\mathbf{p \cdot V^{\gamma} = cste}$$

avec : $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ (= 1,4 pour l'air)

En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits (p . V = n . R . T) on montre qu'on peut aussi s'écrire :

$$T \cdot V^{\gamma - 1} = cste'$$

ou

$$T \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cste''$$

Avec ces formules, il est possible d'étudier la détente du gaz contenu dans la bouteille pendant qu'il pousse l'eau vers l'extérieur.

L'état initial (noté 1) est définit par : T_1 = 298 K, $p_1 = 7.10^5$ Pa, V_1 = 33 cL

L'état "final" (noté 2) est définit par T_2, p_2, V_2 = 50 cL (on étudie ici la détente du gaz quand il pousse l'eau : la propulsion hydraulique, le gaz continuant à se détendre après).

On calcule la pression "finale" :

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$$

A.N. : $$\mathbf{p_2} = 7.10^5 \cdot \left(\frac{33}{50}\right)^{1,4} = \mathbf{3,9.10^5\ Pa}$$

Et aussi la température "finale" :

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}$$

A.N. : $$\mathbf{T_2} = 298 \cdot \left(\frac{33}{50}\right)^{0,4} = \mathbf{252\ K} = -21°C$$

Quelques lignes de calculs permettent de démontrer que le travail échangé avec l'extérieur ($W_{1\to 2}$), lors de cette transformation est :

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{1-\gamma} \cdot p_1 . V_1 \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]$$

ou

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{1-\gamma} \cdot p_1 . V_1 \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right]$$

ou

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{1-\gamma} \cdot p_1 . V_1 \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} - 1\right]$$

A.N. $$\mathbf{W_{1\to 2}} = \frac{1}{1-1,4} \cdot 7.10^5 \cdot 33.10^{-5} \cdot \left[\left(\frac{33}{50}\right)^{1,4-1} - 1\right] = \mathbf{-89\ J}$$

Le signe moins signifie que du travail a été cédé à l'extérieur.

Question : Calculer T_3, V_3 et $W_{1\to 3}$ si l'état 3 correspond au gaz quand il se retrouve à pression atmosphérique.

V.4) Détente isotherme

Rappel : Le terme isotherme désigne une transformation thermodynamique d'un système à température constante.

Une détente à température constante implique un échange de chaleur avec l'extérieur. Du fait de la très grande rapidité de la détente, dans le cas qui nous intéresse, il est clair que la détente sera plutôt adiabatique qu'isotherme.

Mais ceci ne doit pas nous empêcher de l'étudier ...

a) pression finale

L'état initial est le même que précédemment : $T_1 = 298$ K, $p_1 = 7.10^5$ Pa, $V_1 = 33$ cL

L'état final est : $T_2 = 298$ K, p_2, $V_2 = 50$ cL

De l'équation des gaz parfaits on tire :

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2}$$

A.N. : $\mathbf{p_2} = 7.10^5 \cdot \frac{33}{50} = \mathbf{4{,}62.10^5\ Pa}$

b) Travail échangé

Le travail est : $W_{1\to 2} = p_1 . V_1 . \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

ou

$$W_{1\to 2} = p_1 . V_1 . \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

A.N. : $\mathbf{W}_{1\to 2} = 7.10^5 . \ 33.10^{-5} . \ln\left(\frac{33}{50}\right) = \mathbf{-\ 96\ J}$

On constate qu'une détente isotherme permettrait de récupérer environ 8% d'énergie en plus.

Dans la pratique, seule une partie de ces 8% peuvent être récupérés au moyen d'un échangeur thermique. De plus la brièveté de la propulsion rend l'efficacité d'un tel dispositif assez illusoire. Sans compter l'alourdissement prévisible de la fusée.

Données et notations utilisées pour les calculs

Bouteille de Badoit 50 cL

Diamètre du goulot : d = 21,7 mm

Diamètre maximal de la bouteille : D = 66 mm $\Rightarrow$ $R_e = 33.10^{-3}$ m

Epaisseur du PETE : e = 0,40 mm

Fusée

Masse à vide : m_0 = 70 g

Masse de départ : m = 240 g

Pression interne : 6 bars(rel) = 7.10^5 Pa(abs)

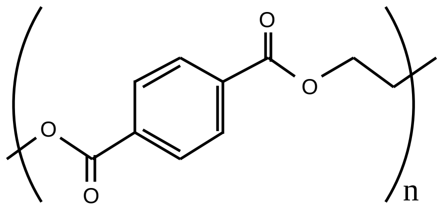
Volume total : V_2 = 50 cL

Volume d'eau : V = 17 cL

Volume de gaz : V_1 = 33 cL

<u>Remarque</u> :

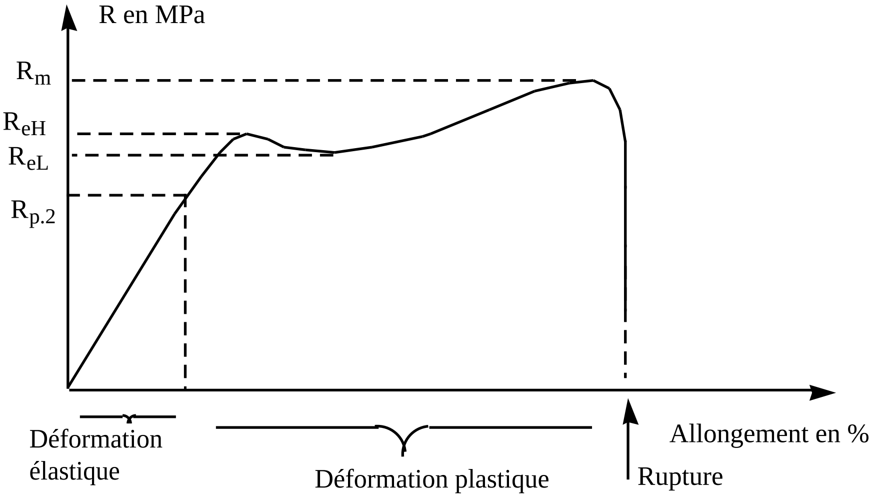
PETE = PolyEthylèneTEréphtalate = PET = PETP = Tergal =



Ce composé n'a rien à voir avec le polyéthylène (PE), pour ceux qui s'étonnent de pouvoir le coller alors que les tubes des colles indiquent qu'elles ne fonctionnent pas avec le PE (ni avec le polypropylène (PP)).

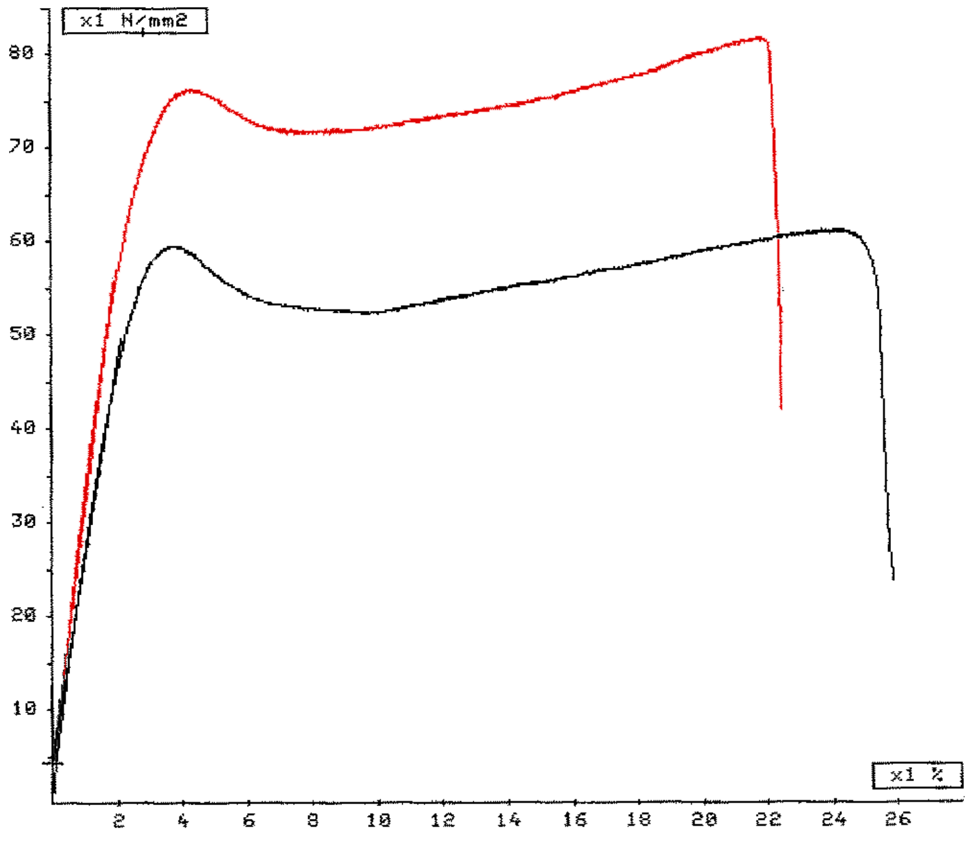
Note 1 : Essai en traction du PETE

Les courbes d'essais en traction du PETE ont l'allure suivante :



$R_{p.2}$ est la résistance mécanique maximale pour rester dans la zone de déformation élastique (le matériau reprend sa forme quand la contrainte cesse).

R_m est la résistance mécanique maximale. Si on applique des contraintes supérieures à $R_{p.2}$, la déformation est plastique : la matériau ne retrouve pas sa forme d'origine quand la contrainte cesse.



Courbe rouge : Bouteille de Coca-Cola, bande de 50 mm par 0,34 mm soit 17 mm^2. Vitesse de traction 5mm/mn.

$R_{p.2}$ = 57,8 MPa R_{eH} = 76,1 MPa R_{eL} = 71,5 MPa R_m = 81,6 MPa

Courbe noire : Bouteille de Badoit, bande de 40 mm par 0,40 mm soit 16 mm^2. Vitesse de traction 5mm/mn.

$R_{p.2}$ = 48,6 MPa R_{eH} = 58,9 MPa R_{eL} = 51,6 MPa R_m = 60,9 MPa

Note 2 : A propos de l'équation de Bernouilli.

Dans son texte, **Modeling the Thrust Phase**(Version 0.6), page 10, Dean Wheeler propose d'utiliser l'équation de Bernoulli sous la forme :

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right).dz + \Delta\left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + (a+g)\ .\ z\right] = 0$$

Où l'intégrale et la différence (Δ) sont calculées entre deux points (j'ai utilisé mes notations, dans l'original v la vitesse du fluide est notée u).

Nous appliquerons cette équation entre deux point : la sortie (z = 0) et l'interface liquide gaz (z = H(t)), ce qui donne :

$$\int_0^{H(t)} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) dz + \frac{v_{H(t)}^2 - v_{sortie}^2}{2} + \frac{p_{H(t)} - p_{sortie}}{\rho} + (a+g)\ .\ H(t) = 0$$

Cette équation s'applique à condition d'avoir un fluide incompressible et parfait en écoulement irrotationnel. Mais à la différence de la forme originelle de l'équation de Bernouilli, elle permet de traiter les écoulements non permanents (on dit aussi transitoires). De plus, elle tient compte du mouvement de la fusée.

On constate qu'elle est nettement plus compliquée que celle utilisée dans le corps du texte (et en plus elle n'est pas au programme ...). Cette complexité provient de l'introduction de termes qui dépendent du temps (en particulier le terme en $\partial v / \partial t$) et du terme (**a** + g) qui est lié à un problème de référentiel.

La question est : est-il possible de passer de cette équation à l'équation classiquement utilisée pour les régimes stationnaires par des approximations raisonnables ?

a) Le premier terme sera forcement grand au départ, puisque l'eau a initialement une vitesse nulle. Assez rapidement, on peut supposer qu'il sera faible (les simulateurs confirment cet état de fait).

b) Les deuxièmes et troisièmes termes sont identiques.

c) Le quatrième terme est négligeable dans l'équation "classique", l'est-il ici aussi ?

Au départ la partie $\frac{p_{H(t)} - p_{sortie}}{\rho}$ = $\Delta p/\rho$ a une valeur de 600 $m^2.s^{-2}$. Si les autres termes représentent moins de 10% de cette valeur je vais pouvoir les négliger (cette limite à 10% est arbitraire, elle dépend des erreurs de mesures, à vous de réduire cette limite en fonction de vos performances métrologiques).
Quelle est la valeur de l'accélération (a') si le terme (a'+g).H(t) atteint 10% de $\Delta p/\rho$ (soit 60 $m^2.s^{-2}$) ?

Un calcul simple donne : $a' = \frac{60}{H(t)} - g$.
Au départ H(0) = 0,12 m soit a' = 490 $m.s^{-2} \approx 50$ g.

Or expérimentalement les accélérations sont supérieures à cette valeur pour des fusées à plein goulot....

Conclusion : dans ces conditions, l'approximation que nous avons opéré en utilisant la formule de Bernouilli ne semble pas justifiée.

Néanmoins, certains auteurs utilisent l'équation des écoulements permanents et semblent obtenir de bons résultats (SIAM REVIEW, Vol.42,No.4,pp.719 –726, Hydrodynamics of a Water Rocket, Joseph M.Prusa.).

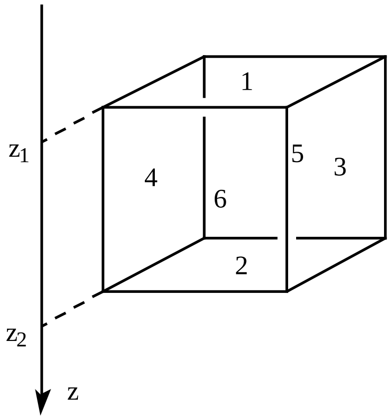
De plus, avec des fusées à tuyère réduite, le débit massique étant moins grand, donc l'accélération moins grande, le dernier terme peut devenir négligeable.

Par exemple, pour une fusée de masse initiale 250 g et un diamètre de sortie réduit à 10 mm, la poussée calculée est de 94 N, soit une accélération au départ de 376 $m.s^{-2} \approx 38$ g.

Là, l'approximation reste raisonnable (à 8% prés quand même).

Note 3 : A propos de la poussée d'Archimède

On considère un cube totalement immergé dans un fluide homogène :



On cherche à calculer la résultante des forces de pression appliquées à ce cube.

La pression est donnée par la formule : $p = p° + \rho \,.\, g \,.\, z$

On note a, l'arrête du cube et S la surface d'une des faces.

Il est évident les forces appliquées sur les faces 3 et 4 puis 5 et 6 vont s'annuler. Seules les faces 1 et 2 sont à considérer.

Si on note z_1 l'altitude de la face 1 et p_1 la pression correspondante alors on a :

$$F_1 = p_1 \,.\, S = (p° + \rho \,.\, g \,.\, z_1) \,.\, S$$

De la même façon on a :

$$F_2 = -(p° + \rho \,.\, g \,.\, z_2) \,.\, S$$

D'où :

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ &= (p° + \rho \,.\, g \,.\, z_1) \,.\, S - (p° + \rho \,.\, g \,.\, z_2) \,.\, S \\ &= \rho \,.\, g \,.\, (z_1 - z_2) \,.\, S \end{aligned}$$

or : $(z_1 - z_2) = -a$

et : $a \,.\, S = V$: le volume du cube.

Donc :

$$\mathbf{F} = -\rho \,.\, \mathbf{V} \,.\, \mathbf{g}$$

le signe moins indique que la poussée se fait vers le haut car l'axe de Z est orienté positivement vers le bas.

Le terme $\rho.V$ étant égal à la masse de fluide déplacé, on retrouve donc la poussé d'Archimède :

Tout corps plongé dans un fluide reçoit une poussée verticale, de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé.

Remarque : ce résultat est généralisable à n'importe quelle forme (il suffit de découper votre solide en cubes infiniment petits et d'intégrer sur le volume du solide... ou de faire la démonstration autrement).

Le rapport avec notre problème ?

Question que l'on est en droit de se poser ! Dans le calcul de la poussée on a vu apparaître un terme p°.S. Ceci correspond à la poussée de bas en haut subit par le fluide du fait de la pression atmosphérique (face 2 du cube).

Mais en même temps, la pression exerce une force sur la partie supérieure de la fusée (face 1). Et la résultante des deux est la poussée d'Archimède.

En clair, ceci montre qu'il vaut mieux "oublier" le terme en p°.S de la poussée intrinsèque, et l'intégrer plus simplement dans la poussée d'Archimède.

Remarque pour finir d'embrouiller tout le monde : si la fusée était propulsée dans un tuyau vide (p = 0) devant elle et à pression atmosphérique derrière alors il faudrait tenir compte de ce p°.S.

Références

Mécanique des fluides, M.Hanauer, ed. Bréal, ISBN 2 85394 465 4, 1991

Mécanique des fluides appliquée, Régis Joulié, ed. ellipses, ISBN 2 7298 6768 6, 1998

SIAM REVIEW, Vol.42,No.4,pp.719 –726, Hydrodynamics of a Water Rocket, Joseph M.Prusa.