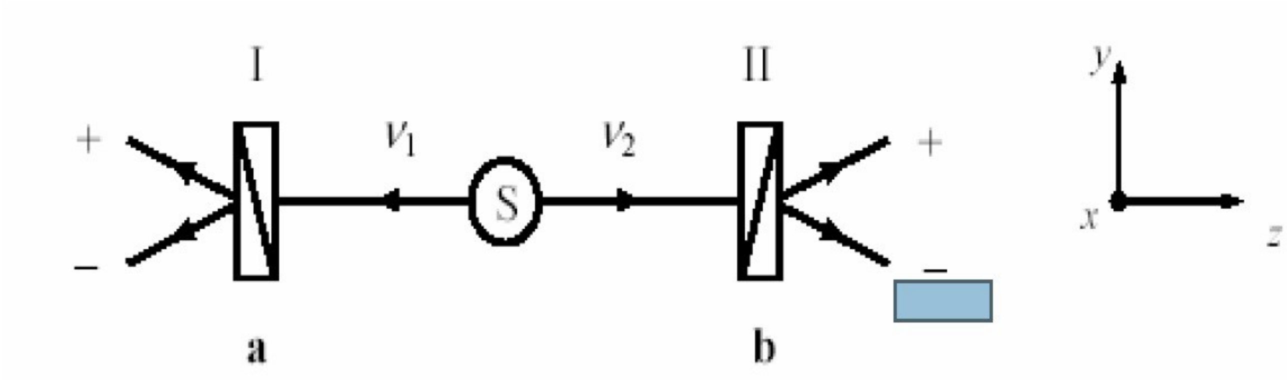
Coefficient de corrélation pour une expérience d'Aspect classique

On considère l'expérience d'Aspect dans laquelle on mesure classiquement la puissance transmise derrière les polariseurs I et II dont les orientations sont a et b. On modélise les photons intriqués par 2 trains d'onde plane polarisés rectilignement de manière aléatoire.



On veut calculer le coefficient de corrélation entre ces 2 mesures en fonction de a et b, et le comparer avec le même coefficient calculé grâce à la mécanique quantique.

Le coefficient de corrélation entre les mesures x_i et y_i est $C = \dfrac{\sum_N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_N (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_N (y_i - \bar{y})^2}}$

Les x_i et y_i étant les puissances transmises sont de la forme :

$$x_i = E_0{}^2 \cos^2(\lambda_i - \theta_1) \ , \ y_i = E_0{}^2 \cos^2(\lambda_i - \theta_2)$$

Les λ_i représentent les angles de polarisation des photons intriqués. Ils varient de 0 à 2π et sont équiprobables.

Donc : $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{E_0{}^2}{2}$

On peut réécrire C de la manière suivante, avec N étant le nombre de photons détectés :

$$C = \frac{\frac{1}{N}\sum_N \left(E_0{}^2 \cos^2(\lambda_i - \theta_1) - \frac{E_0{}^2}{2}\right)\left(E_0{}^2 \cos^2(\lambda_i - \theta_2) - \frac{E_0{}^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_N \left(E_0{}^2 \cos^2(\lambda_i - \theta_1) - \frac{E_0{}^2}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_N \left(E_0{}^2 \cos^2(\lambda_i - \theta_2) - \frac{E_0{}^2}{2}\right)^2}}$$ soit encore :

$$C = \frac{\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(\lambda-\theta_1)-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2(\lambda-\theta_2)-\frac{1}{2}\right)\frac{d\lambda}{2\pi}}{\sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(\lambda-\theta_1)-\frac{1}{2}\right)^2\frac{d\lambda}{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(\lambda-\theta_2)-\frac{1}{2}\right)^2\frac{d\lambda}{2\pi}}} = \frac{a}{bc}$$

Les nombres a, b et c sont les valeurs moyennes de certaines fonctions lorsqu'on fait varier λ .

Il est donc facile de voir que b=c.

Calculons b. il s'agit de la racine carré de la moyenne de la fonction $f(\lambda) = \left(\cos^2(\lambda-\theta_1)-\frac{1}{2}\right)^2$

$$f(\lambda) = \left(\cos^2(\lambda-\theta_1)-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\cos 2(\lambda-\theta_1)+1\right)-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cos 2(\lambda-\theta_1)\right)^2 = \frac{1}{4}\cos^2 2(\lambda-\theta_1)$$

Or la moyenne du carré de la fonction cosinus est $\frac{1}{2}$. On en déduit b et c. Le dénominateur de C est donc égal à $\frac{1}{8}$

Calculons maintenant le numérateur a. Il s'agit de la moyenne de la fonction

$$g(\lambda) = \left(\cos^2(\lambda-\theta_1)-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2(\lambda-\theta_2)-\frac{1}{2}\right) = \left(\cos(\lambda-\theta_1)\cos(\lambda-\theta_2)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\cos^2(\lambda-\theta_1)+\cos^2(\lambda-\theta_2)\right)+\frac{1}{4}$$

En utilisant les relations de trigonométrie on obtient :

$$g(\lambda) = \left(\frac{\cos(2\lambda-\theta_1-\theta_1)+\cos(\theta_1-\theta_2)}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\cos^2(\lambda-\theta_1)+\cos^2(\lambda-\theta_2)\right)+\frac{1}{4} \qquad \text{soit :}$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{4}\left(\cos^2(2\lambda-\theta_1-\theta_1)+2\cos(2\lambda-\theta_1-\theta_1)\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos^2(\theta_1-\theta_2)\right)-\frac{1}{2}\left(\cos^2(\lambda-\theta_1)+\cos^2(\lambda-\theta_2)\right)+\frac{1}{4}$$

Or la moyenne d'une fonction cosinus est nulle. La valeur moyenne de $g(\lambda)$ est donc :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+0+\cos^2(\theta_1-\theta_2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cos^2(\theta_1-\theta_2)-\frac{1}{8}$$

On a donc $C=8\left(\frac{1}{4}\cos^2(\theta_1-\theta_2)\right)-\frac{1}{8}=2\cos^2(\theta_1-\theta_2)-1$ soit

$$C=\cos 2(\theta_1-\theta_2)$$

C a exactement la même expression que celui calculé grâce à la mécanique quantique.

Dans ce modèle classique, les inégalités de Bell sont donc aussi violées.