Etude de l'angle alpha permettant un saut à distance maximale en balançoire

La fonction qui utilisée pour ce type de trajectoire est :

$$y = \frac{-g}{2(Vi\cos\alpha)^2}x^2 + \tan\alpha\ x + (h + L(1-\cos\alpha))$$

Or, lorsque le corps en chute libre touche le sol, alors :

$$y = 0$$

Il faut donc résoudre :

$$\frac{-g}{2(Vi\cos\alpha)^2}x^2 + \tan\alpha\, x + (h + L(1-\cos\alpha)) = 0$$

On constate qu'il s'agit d'un trinôme :

$$a = \frac{-g}{2(Vi\cos\alpha)^2}$$

$$b = \tan\alpha$$

$$c = (h + L(1-\cos\alpha))$$

$$\Delta = \tan^2\alpha - 4\left(\frac{-g}{2(Vi\cos\alpha)^2}\right)(h + L(1-\cos\alpha))$$

$$\Delta = \tan^2\alpha + \left(\frac{4g}{2(Vi\cos\alpha)^2}\right)(h + L(1-\cos\alpha))$$

La fonction est restreinte sur un intervalle de]0 ; π/2[
On constate que tous les facteurs étant positif sur cet intervalle :

$$\Delta > 0$$

L'équation admet donc deux solution, mais une seule doit être considérée : la seconde, qui correspond à la chute « après le saut ».

$$x(\alpha) = \frac{-\tan\alpha - \sqrt{\tan^2\alpha + \left(\frac{4g}{2(Vi\cos\alpha)^2}\right)(h + L(1-\cos\alpha))}}{2\left(\frac{-g}{2(Vi\cos\alpha)^2}\right)}$$

Or :

$$Vi = \sqrt{2gL(\cos\alpha - \cos\theta)}$$

Donc :

$$x(\alpha) = \frac{-\tan\alpha - \sqrt{\tan^2\alpha + \left(\frac{4g}{2(\sqrt{2gL(\cos\alpha - \cos\theta)}\cos\alpha)^2}\right)(h + L(1-\cos\alpha))}}{2\left(\frac{-g}{2(\sqrt{2gL(\cos\alpha - \cos\theta)}\cos\alpha)^2}\right)}$$

Il faut donc étudier les variations de cette fonction de x en fonction de α, pour déterminer son tableau de variations, qui donnera son maximum, correspondant à la valeur de α pour laquelle la chute a une portée maximale, en fonction de la longeure des cordes de la balançoire et de sa distance du sol.