Origine Machienne de l'inertie : une enième considération

Simon G.

2014

Chapitre 1

Formulation covariante du principe de Mach

1.1 Construction de l'action

Nous nous intéressons au cas d'un particule classique de masse m et de charge e plongée dans un champ électrique classique homogène et constant $\vec{E} = (E_0, 0, 0)$.

Le problème est unidimensionnel et on décrit la dynamique du corps dans un référentiel inertiel S auquel on associe les coordonnées $x^\mu = (ct, x, y, z)$

Les conditions aux limites du problème pour la trajectoire $x(t)$ dans S sont : $x(0) = -L$ et $\dot{x}(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Le but est de trouver les équations du mouvement de ce corps dans le référentiel S, en tenant compte du principe de Mach.

Nous partons donc de l'action suivante :

$$A = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \tag{1.1}$$

où $\mathcal{L}$ est une densité Lagrangienne construite de manière manifestement invariante, et g est le déterminant de la métrique considérée (voir ci-dessous).

Nous partons d'une densité lagrangienne constituée d'un terme cinétique, un terme de potentiel dû au champ électrique, et un terme de Mach issu de l'action de Hilbert :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{matter} + \mathcal{L}^{EM} + \mathcal{L}^{Mach} \tag{1.2}$$

où

$$\mathcal{L}^{matter} = \frac{\rho_m}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad \text{où} \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}^{EM} = j_\mu A^\mu - \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}^{Mach} = \frac{R^{FLRW}}{2\kappa} \tag{1.5}$$

Dans le cadre du principe de Mach, Nous devons considérer la métrique comme étant la métrique d'un univers, que nous considérons ici comme la métrique d'un univers de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker :

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \tag{1.6}$$

De cette métrique nous pouvons calculer le scalaire de courbure R ainsi que le déterminant $\sqrt{-g}$, en gardant en tête la dépendance temporelle du facteur d'échelle $a = a(t)$:

$$R^{FLRW} = \frac{6}{c^2a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{-g} = ca(t) \tag{1.7}$$

Nous avons aussi par définition

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t) \tag{1.8}$$

où $H(t)$ est le paramètre de Hubble.

Dans un premier temps, nous pourrions nous intéresser à l'approximation dans laquelle on néglige l'accélération ($\ddot{a} = 0$) et la courbure ($k = 0$), de manière à réécrire R^{FLRW} comme :

$$R^{FLRW} = \frac{6}{c^2a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2) \approx \frac{6}{c^2a^2}\dot{a}^2 = \frac{6}{c^2}H^2(t) \tag{1.9}$$

Pour le cas classique de la description de l'interaction électromagnétique, et dans la configuration donnée du champ électrique, le terme pour le Lagrangien se réduit à :

$$L^{EM} = -eE_0x(t) - \frac{E_0^2}{2\mu_0c^2}\tilde{f}(a(t)) \tag{1.10}$$

Prenant toutes ces remarques en considération, nous obtenons :

$$\mathcal{L}^{matter} = \frac{\rho_m}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{1.11}$$

$$L^{EM} = \int \mathcal{L}^{EM}d^3x = -eEx(t) + f(a(t), E_0^2) \tag{1.12}$$

$$\mathcal{L}^{Mach} = \frac{R}{2\kappa} = g(a(t), \Lambda) \approx \frac{R_0}{2\kappa} \tag{1.13}$$

On voit que le facteur d'échelle intervient dans le terme cinétique, conformément au principe de Mach.

On voit également que le terme d'énergie électrostatique f dépend du facteur d'échelle via son lien avec la métrique, et que le terme de l'action d'Einstein-Hilbert g dépend également de ce facteur d'échelle, ainsi que de la constante cosmologique via l'équation de Friedman-Lemaitre.

Il reste maintenant à construire le lagrangien classique $L(x, \dot{x}, t)$ et à utiliser le théorème d'Euler-Lagrange pour obtenir les équations du mouvement en différenciant A :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1.14}$$

Ceci sonstitue-t-il une construction correcte du lagrangien dans le cadre de l'application considérée ? (corps classique de masse m et charge e dans un champ électrique classique, dans le cadre du principe de Mach ?