Problème de deux corps fixes et isolés

Par hclatomic, hcl@oceanvirtuel.com

Résumé : Il est étudié l'aspect théorique du problème de deux corps fixes et isolés, selon la loi d'attraction de Newton, puis des applications numériques sont proposées, dont celle d'un rendez-vous spatial entre l'ATV et l'ISS. Le calcul montre qu'il serait nécessaire d'exercer une rétro-poussée pour maintenir l'ATV à une distance fixe de l'ISS.

Aspect théorique

Faisons l'expérience de pensée de deux corps de masses m_1 et m_2, de rayon vecteur $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ par rapport au centre d'inertie du système, fixes l'un par rapport à l'autre, et très éloignés de toute autre masse. On impose au référentiel du système d'être d'inertie, c'est à dire qu'il n'est notamment pas en rotation. La seule force non négligeable existant alors dans ce système sera la force d'attraction de Newton.

A cause de cette force chaque corps est accéléré vers l'autre, les accélérations étant colinéaires mais de sens opposés, selon les formules suivantes :

$$\boldsymbol{\gamma_2}=\frac{G m_1}{R^3}\mathbf{R} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma_1}=\frac{-G m_2}{R^3}\mathbf{R} \qquad (1)$$

où G est la constante de gravitation de Newton, et $\mathbf{R}=\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}$. Notons que tous les vecteurs sont ici colinéaire et qu'on peut donc travailler en une seule dimension pour simplifier les calculs.

Au lieu de nous référer au centre d'inertie du système à deux corps, choisissons plutôt de placer m_1 au centre du repère de référence. La valeur absolue de l'accélération du corps m_2 dans ce repère est l'addition des valeurs absolues des deux accélérations précédentes, elle vaut

$$\gamma=\frac{G(m_1+m_2)}{R^2} \qquad (2)$$

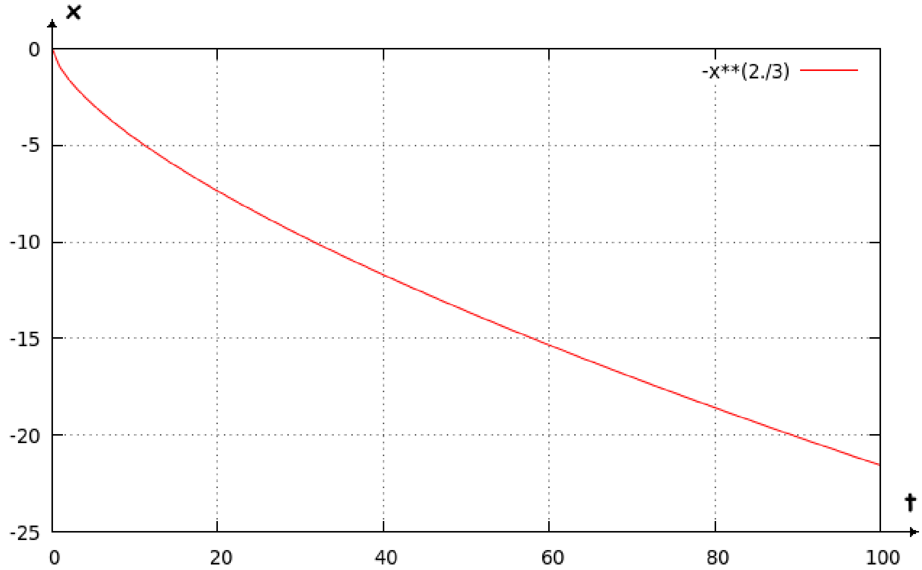
Nous obtenons donc l'équation différentielle à résoudre pour déterminer la trajectoire du corps m_2 par rapport au corps m_1 considéré fixe :

$$\gamma R^2=G(m_1+m_2) \qquad (3)$$

Cette équation différentielle a une solution analytique connue :

$$R=-k\,t^{2/3} \quad \text{ou encore} \quad t=\left[\frac{(-R)}{k}\right]^{3/2} \quad \text{avec} \quad k=\left[\frac{9}{2}G(m_1+m_2)\right]^{1/3} \qquad (4)$$

Voici un graphe de cette trajectoire, tracé avec k=1 :



Applications numériques

La constante de gravitation vaut $G=6.67384.10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.

- Posons $m_1=m_2=1\,\mathrm{kg}$, la constante k de l'équation (4) vaut : $k=8.437.10^{-4}\mathrm{m\,s}^{-2/3}$. Si $R=-1\,\mathrm{m}$, m_2 mettra $t=40802.9.0\,\mathrm{s}=11\,\mathrm{h}\,20'\,2\,\mathrm{s}$ pour atteindre m_1 .
- Posons $m_1=m_2=0.1\,\mathrm{kg}$, la constante k de l'équation (4) vaut : $k=3.916.10^{-4}\mathrm{m\,s}^{-2/3}$. Si $R=-0.05\,\mathrm{m}=-5\,\mathrm{cm}$, m_2 mettra $t=1442\,\mathrm{s}=24'\,2\,\mathrm{s}$ pour atteindre m_1 .
- Posons $m_1=m_2=1000\,\mathrm{kg}$, la constante k de l'équation (4) vaut : $k=8.437.10^{-3}\mathrm{m\,s}^{-2/3}$. Si $R=-1\,\mathrm{m}$, m_2 mettra $t=1290.3\,\mathrm{s}=21'\,30\,\mathrm{s}$ pour atteindre m_1 .
- Cas du rendez-vous ATV-ISS : l'ISS pèse environ 400 tonnes et l'ATV environ 6 tonnes, dès lors la constante k vautSelon la configuration de la station on peut estimer que le point $k=4.958.10^{-2}\mathrm{m\,s}^{-2/3}$ d'amarrage de l'ATV se situe à 20 m environ du centre d'inertie de l'ISS. Pendant son approche, l'ATV est stoppé et maintenu fixe par rapport à l'ISS à plusieurs reprises (voir http://www.cnes.fr/web/CNES-fr/11394...ve-docking.php), et notamment au point S41 situé à 11m du point d'amarrage, soit environ 31m du centre d'inertie de l'ISS. L'ATV est maintenu en S41 pendant 5 minutes. Selon l'équation (4), à la distance R=31m la variable temps vaut t=15630.9s. En ôtant 5 minutes à ce temps on obtient la distance R=30.602m. Ainsi l'ATV, laissé fixe puis libre, au point S41 progressera de façon spontanée vers l'ISS de 40 cm environ en 5 minutes. Dès lors, pour maintenir l'ATV au point S41 il faudra appliquer une faible rétro-poussée.