

5. ONDES DE MATIÈRE

5.1. MASSE ET VIBRATION

L'énergie d'une particule, matérielle ou non est, selon la formule d'Einstein-Planck, $E = h\nu$. En utilisant la formule d'Einstein $E = mc^2$, on obtient une fréquence

$$\nu = \frac{mc^2}{h} = \frac{m_0 c^2}{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Cette fréquence est très élevée pour une particule matérielle. La fréquence la plus faible est celle de la particule la plus légère au repos. La fréquence de l'électron, de l'ordre de 10^{29} Hz, est dans le domaine des rayons gamma les plus durs et ne semble pas mesurable directement. Mais la longueur d'onde associée, dite de matière ou de de Broglie, l'est, par diffraction dans les cristaux, en microscopie électronique ou aux électrons lents. A chaque masse et chaque vitesse sont donc associées une fréquence, proportionnelle à la masse relativiste, et une longueur d'onde. Inversement, la formule précédente permet d'attribuer une masse au photon. La vitesse d'une onde de matière varie avec la vitesse de la particule alors que celle d'une onde électromagnétique est constante dans le vide et en l'absence de tout champ de gravitation (et électromagnétique?).

La formule est valable dans n'importe quel référentiel, en particulier dans le référentiel propre de la particule matérielle, où $h\nu_0 = m_0 c^2$. ν_0 est une fréquence de coupure en dessous de laquelle celle de la particule, immobile, ne peut descendre. Elle correspond à la masse au repos ou masse propre, la plus faible qui soit pour un corps donné. Comme h et c sont des constantes universelles, la fréquence est différente dans le référentiel propre de la particule et dans celui de l'observateur, dans les mêmes proportions que la masse. Cette fréquence varie peu avec la vitesse lorsqu'elle est faible, mais tend vers l'infini lorsque la vitesse de la particule matérielle s'approche de celle de la lumière :

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On remarquera que la fréquence d'une particule augmente de la même façon que le temps alors qu'à première vue, ce devrait être l'inverse ! Les théories des quanta et de la relativité restreinte ont pour conséquence, lorsqu'on les conjugue, l'existence

d'une vibration interne à toute particule matérielle. Nous allons obtenir ce même résultat en appliquant uniquement la transformation de Lorentz, sans faire appel ni à la masse ni à l'énergie.

5.2. LONGUEUR D'ONDE DE DE BROGLIE

Selon de Broglie, il y a une horloge de fréquence ν' dans le référentiel propre R' de la particule, où la vitesse est nulle. L'amplitude des battements de l'horloge est, à un coefficient près :

$$\sin [2\pi\nu'(t' - t'_0)]$$

Dans le référentiel R du laboratoire, v est la vitesse de la particule, x son abscisse et t le temps de l'observateur. Appliquons la transformation de Lorentz du temps :

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

En remplaçant t' par cette expression, l'amplitude de l'onde s'écrit, en utilisant le temps de l'observateur

$$\sin \left[2\pi\nu'\gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} - t'_0 \right) \right]$$

Il y a un déphasage et un changement de fréquence. De Broglie a fait l'hypothèse que cette vibration générerait une onde localisée sur la particule en mouvement et dans son voisinage. Autrement dit, la vitesse de la particule est la vitesse de groupe du paquet d'ondes. Il n'est toutefois pas nécessaire de faire intervenir la notion de paquet d'ondes pour obtenir l'expression de la longueur d'onde. L'amplitude d'une onde de vitesse de phase v_ϕ s'écrit, à un coefficient près :

$$\sin \left[2\pi\nu'\gamma \left(t - \frac{x}{v_\phi} - t'_0 \right) \right]$$

On a, en identifiant ces deux expressions, la vitesse de phase

$$v_\phi = c^2/v$$

La vitesse c de la lumière est donc la moyenne géométrique des vitesses v de la particule et de phase v_ϕ de l'onde associée. Comme la vitesse de la particule ne peut dépasser la vitesse de la lumière c , la vitesse de phase v_ϕ lui est supérieure. Ce n'est pas contradictoire avec la relativité puisque la vitesse de phase correspond à la vitesse de transmission des zéros de l'onde où, l'amplitude étant nulle, il n'y a pas transmission d'énergie. La confusion provient de la définition erronée de la longueur d'onde à partir des maximums d'amplitude. Une vitesse de phase supérieure à celle de la lumière est bien connue dans les guides d'ondes. Un autre exemple est le

déferlement d'une vague sur une digue presque parallèle au front de vague. Le déferlement se propage le long de la digue à une vitesse supérieure à celle de la vague, perpendiculaire à la digue. Un phénomène du même genre, observé dans le Cosmos, a fait croire à l'existence de vitesses « superluminales ».

L'identification des mêmes formules donne aussi la fréquence ν dans le référentiel R de l'observateur :

$$\nu = \gamma \nu' = \frac{\nu'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On retrouve, sans faire appel à la notion de masse relativiste, la formule du paragraphe précédent, avec un décalage vers le « bleu » lorsque la vitesse v croît. Il peut paraître étonnant que la fréquence augmente comme le temps. On peut interpréter cet effet comme un effet Doppler où la fréquence augmente car la particule se rapproche de son objectif, par exemple un cristal avec lequel elle va interférer.

La longueur d'onde étant le rapport de la vitesse de phase v_ϕ à la fréquence ν , en utilisant maintenant $h\nu = mc^2$, on a

$$\lambda = \frac{v_\phi}{\nu} = \frac{c^2}{\nu v} = \frac{h}{mv}$$

En utilisant la quantité de mouvement $p = mv$, on obtient la relation de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Davisson et Germer ont fait diffracter des électrons par un réseau cristallin et vérifié la formule de de Broglie de la longueur d'onde associée à un électron.

De Broglie a donc émis l'hypothèse que la fréquence de vibration associée à une particule par la relation d'Einstein-Planck était une véritable onde ayant une vitesse de phase. La transformation de Lorentz donne la relation entre la vitesse de la particule et la vitesse de phase, puis la longueur d'onde, rapport de la vitesse de phase à la fréquence.

5.3. RELATION D'HEISENBERG

Imaginons qu'on ait mesuré la quantité de mouvement $p = mv$ d'un électron, par exemple par sa tension d'accélération. Pour obtenir sa position, nous allons l'éclairer avec un photon de longueur d'onde $\lambda = v_\phi/\nu = h/p$ selon la relation de de Broglie. La résolution d'un instrument d'optique comme un microscope est donnée par la