où la vitesse de la lumière est c = 1 et où l'intervalle de temps propre $d\tau$ remplace l'élément de longueur ds. Parfois la lettre s est utilisée à la place de τ dans la relation précédente où ds est un intervalle de temps et non un intervalle d'espace. Ces unités réduites ne permettent pas de faire des vérifications grâce aux équations aux dimensions ; il est préférable d'utiliser le système international SI.

La métrique de Schwarzschild a été obtenue par diverses considérations de symétrie et par la nécessité d'être compatible avec la loi de la gravitation de Newton. En réalité, cette compatibilité est limitée, comme le montre la déviation de la lumière par le Soleil et la précession du périhélie de Mercure, phénomènes se produisant dans de faibles champs de gravitation. On retrouvera plus loin la métrique de Schwarzschild en résolvant les équations d'Einstein.

4.3. CHUTE RADIALE

On considère, pour simplifier, la chute d'un objet matériel tombant sur un astre depuis l'infini avec une vitesse initiale nulle. Nous allons refaire le même calcul qu'en limite newtonienne, mais en utilisant cette fois la métrique de Schwarzschild. L'objet tombe selon un rayon de sorte que les angles n'interviennent pas dans les équations.

Métrique de Schwarzschild radiale

La métrique de Schwarzschild à une seule variable d'espace r s'écrit, en utilisant l'intervalle d'espace-temps $d\tau$, le potentiel de gravitation - GM/r, la vitesse de la lumière c :

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \frac{dr^2}{c^2}$$

Les dérivées t' et r' par rapport au temps propre τ, du temps-coordonnée t et du rayon r s'écrivent, ainsi que la vitesse physique v

$$t' = \dot{t} = \frac{dt}{d\tau} \qquad r' = \dot{r} = \frac{dr}{d\tau} \qquad v = \frac{dr}{dt}$$

En utilisant le potentiel réduit, sans dimension,

$$\Phi = -\frac{2GM}{c^2 r}$$

le lagrangien de Schwarzschild est alors d'une écriture plus simple :

$$L = \frac{d\tau}{d\tau} = 1 = \sqrt{\left(1 + \Phi\right)\dot{t}^{2} - \left(1 + \Phi\right)^{-1} \frac{\dot{r}^{2}}{c^{2}}}$$

La résolution des équations de Lagrange donnera celles du mouvement.

Equation de Lagrange en t

L'équation de Lagrange en t s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Comme L ne dépend pas de t, le second terme est nul et l'équation de Lagrange se réduit à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = 0$$

Elle s'intègre en

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{const} = E$$

En dérivant le lagrangien L = 1 par rapport à t', on trouve

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \frac{2\left(1 + \Phi\right)\dot{t}}{2\sqrt{1 + \Phi - \frac{v^{2}}{c^{2}}\left(1 + \Phi\right)^{-1}}} = \left(1 + \Phi\right)\dot{t}$$

En identifiant ces deux dérivées partielles, on retrouve la même équation qu'en limite newtonienne :

$$\boldsymbol{\dot{t} = \frac{E}{1 + \Phi}}$$

Vitesse et accélération

Le lagrangien

$$L = \frac{d\tau}{d\tau} = 1 = \sqrt{\left(1 + \Phi\right)\dot{t}^{2} - \left(1 + \Phi\right)^{-1} \frac{\dot{r}^{2}}{c^{2}}}$$

constitue une intégrale première des équations de Lagrange, ce qui évite d'intégrer l'autre équation de Lagrange. Comme

$$\dot{t} = \frac{E}{1+\Phi}$$

on peut écrire, en utilisant la vitesse v = dr/dt,

$$L = \frac{d\tau}{d\tau} = 1 = \frac{E}{1+\Phi}\sqrt{\left(1+\Phi\right) - \frac{v^2}{c^2}\left(1+\Phi\right)^{-1}}$$

soit, après élévation au carré

$$\left(\frac{1+\Phi}{E}\right)^2 = \left(1+\Phi\right) - \frac{v^2}{c^2}\left(1+\Phi\right)^{-1}$$

Dans l'hypothèse simplificatrice d'un potentiel Φ et d'une vitesse v simultanément nuls, l'expression précédente devient

$$\left(\frac{1}{E}\right)^2 = 1$$

soit E = 1. L'expression en question peut s'écrire

$$1 + 2\Phi + \Phi^2 = 1 + \Phi - \frac{v^2}{c^2}\left(1+\Phi\right)^{-1}$$

Elle se simplifie en

$$\Phi\left(1+\Phi\right)^2 = -\frac{v^2}{c^2}$$

d'où on tire

$$v = c\sqrt{-\Phi}\left(1+\Phi\right)$$

L'accélération s'obtient en dérivant v^2 :

$$2v\,dv = c^2 d\left[\left(-\Phi\right)\left(1+\Phi\right)^2\right] = c^2\left[\left(-d\Phi\right)\left(1+\Phi\right)^2 - 2\Phi\left(1+\Phi\right)d\Phi\right]$$

puis

$$2v\frac{dv}{dt} = -c^2\left(1+3\Phi\right)\left(1+\Phi\right)\frac{d\Phi}{dr}\frac{dr}{dt}$$

et, après simplification, puisque v = dr/dt :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c^2}{2}\left(1+3\Phi\right)\left(1+\Phi\right)\frac{d\Phi}{dr}$$

L'accélération s'annule pour Φ = – 1/3 et pour Φ = – 1. les vitesses correspondantes sont

$$v = c\sqrt{-\Phi}\,(1+\Phi) = c\sqrt{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \cong 0{,}4\ c$$

et v = 0. Le résultat différe un peu de celui de la limite newtonienne, mais la vitesse reste, de même, inférieure à celle de la lumière sans y tendre asymptotiquement comme en dynamique relativiste. En explicitant le potentiel gravitationnel adimensionnel Φ, la vitesse devient

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

Elle est nulle lorsque $r = r_g$, appelé rayon de gravitation ou de Schwarzschild

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

L'accélération

$$\mathbf{\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(1 - \frac{3GM}{c^2 r}\right)}$$

s'annule pour $r = 1{,}5\ r_g$, correspondant à la vitesse maximale v = 0,4 c. On pourrait analyser le mouvement dans cette zone, mais cela présente peu d'intérêt car aucune vérification expérimentale ne semble possible au voisinage d'un trou noir. A grande distance, on retrouve bien la loi de la gravitation de Newton

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}$$

L'accélération d'une particule matérielle à l'infini est négative, c'est-à-dire qu'elle est dirigée vers les r décroissants, comme attendu puisqu'il y a attraction. La métrique n'est pas valable à l'intérieur de la Terre, de même que l'équation de Laplace, qui doit être remplacée par celle de Poisson, à cause de la présence de matière. Le champ de gravitation à l'intérieur d'une sphère fluide a également fait l'objet d'un calcul de Schwarzschild.

Chute libre d'un photon

La trajectoire la plus courte dans un espace est $ds^2 = 0$ car la métrique étant définie positive elle est au minimum nulle. Comme rien ne peut aller plus vite que la lumière, le chemin suivi par un photon est nul, c'est une géodésique nulle : $ds^2 = 0$.

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}\frac{dr^2}{c^2} = 0$$