

En résolvant l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques pour une fonction à valeurs complexes, j'obtiens une série de fonctions linéairement indépendantes telles que :

$$\Delta\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\cosh(kz + kh)}{\cosh(kh)} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(m\theta + \psi_m) H_m^{(2)}(kr) \quad (1)$$

Où  $H_m^{(2)}(kr)$  est la fonction de Hankel de second type, d'ordre  $m$  et où seules constantes d'intégration de l'équation de Bessel  $a_m$  sont indéterminées.

Or je m'intéresse à deux solutions particulières (liées au potentiel vitesse d'une onde), en l'occurrence je choisis, à l'instar de l'auteur de référence<sup>1</sup> :

$$\phi = \phi_3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \psi_m \equiv 0[2\pi] \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi = \phi_5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \psi_m \equiv 0[2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

J'ai donc les deux fonctions suivantes où j'aimerais exprimer les constantes d'intégration :

$$\begin{cases} \phi_3 = a_0 \frac{\cosh(kz + kh)}{\cosh(kh)} H_0^{(2)}(kr) \\ \phi_5 = a_1 \frac{\cosh(kz + kh)}{\cosh(kh)} \cos(\theta) H_1^{(2)}(kr) \end{cases} \quad (4)$$

Ces fonctions doivent satisfaire un certain nombre de conditions aux limites :

Condition sur le corps du cylindre :

$$\left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right]_S = n_i \text{ on } S \quad (5)$$

Condition sur le lit de mer ( $h$  étant la profondeur constante de l'océan à l'endroit étudié) :

$$\left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad (6)$$

Condition sur la surface (moyenne) libre de l'océan :

$$\left[ -\omega^2 \phi_i + g \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right]_{z=0, r>a} = 0 \quad (7)$$

$\forall a_0 \forall a_1$  les conditions (6) et (7) sont trivialement vérifiées. Mon problème réside en la condition (5)...l'auteur de référence dit qu'elle est vérifiée avec les conditions (2) et (3) et avec la définition suivante du vecteur normal :

$$\vec{n} = (n_r \cos(\theta), n_r \sin(\theta), n_z, -(z.n_r - r.n_z) \sin(\theta), (z.n_r - r.n_z) \cos(\theta), 0)^T \quad (8)$$

Ci-dessous, un extrait de l'œuvre de référence<sup>1</sup>, où (5.164) est la condition (5).

1. Falnes, J. (2002). *Ocean Waves and Oscillating Systems*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-521-78211-2.

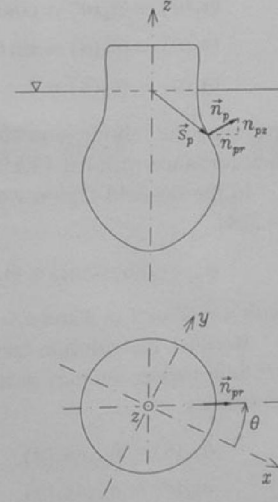
For an axisymmetric body  $p$ , as shown in Figure 5.19, a wet-surface element  $dS$  in position

$$\vec{s}_p = (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (5.255)$$

has a unit normal

$$\vec{n}_p = (n_{px}, n_{py}, n_{pz}) = (n_{pr} \cos \theta, n_{pr} \sin \theta, n_{pz}) = (n_{p1}, n_{p2}, n_{p3}). \quad (5.256)$$

Figure 5.19: Side view and top view of a body symmetric with respect to the  $z$  axis, with unit normal  $\vec{n}_p$  on element  $dS$  of the wet surface in position  $\vec{s}_p$  from the reference point  $(0, 0, z_p) = (0, 0, 0)$ .



Furthermore;

$$\vec{s}_p \times \vec{n}_p = (n_{p4}, n_{p5}, n_{p6}), \quad (5.257)$$

where

$$\begin{aligned} n_{p4} &= yn_{pz} - zn_{py} = (rn_{pz} - zn_{pr}) \sin \theta \equiv -n_{pM} \sin \theta \\ n_{p5} &= zn_{px} - xn_{pz} = (zn_{pr} - rn_{pz}) \cos \theta = n_{pM} \cos \theta \\ n_{p6} &= xn_{py} - yn_{px} = rn_{pr} (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) = 0. \end{aligned} \quad (5.258)$$

To summarise, for  $j = 1, 6$  the components of the unit normal may be collected into the column vector

$$\vec{n}_p = (n_{pr} \cos \theta, n_{pr} \sin \theta, n_{pz}, -n_{pM} \sin \theta, n_{pM} \cos \theta, 0)^T, \quad (5.259)$$

where

$$n_{pM} = zn_{pr} - rn_{pz}, \quad n_{pr} = \sqrt{n_{px}^2 + n_{py}^2}. \quad (5.260)$$

We notice that for  $j = 6$ , boundary condition (5.164) is satisfied if  $\varphi_{p6} \equiv 0$ , which was to be expected because an axisymmetric body yawing in an ideal fluid can generate no wave. The complex functions  $\varphi_{pj}$  ( $j = 1, 5$ ) must satisfy the Laplace equation, and the usual homogeneous boundary conditions on the free surface  $z = 0$  and on fixed surfaces such as the sea bed  $z = -h$ . Moreover,  $\varphi_{pj}$  must satisfy the radiation condition.

For an axisymmetric body it is easy to see that a particular solution of the type

$$\varphi_{pj} = \varphi_{pj}(r, \theta, z) = \varphi_{pj0}(r, z) \Theta_j(\theta) \quad (5.261)$$

satisfies the Laplace equation, provided  $\Theta_j(\theta)$  is a function of the type given by Eq. (4.210). If we choose

$$\begin{aligned} \Theta_1(\theta) &= \Theta_5(\theta) = \cos \theta \\ \Theta_2(\theta) &= \Theta_4(\theta) = \sin \theta \\ \Theta_3(\theta) &= \Theta_6(\theta) = 1, \end{aligned} \quad (5.262)$$

then also the inhomogeneous boundary condition (5.164) on  $S_p$  can be satisfied in accordance with Eq. (5.259). (Note, however, that  $\varphi_{p60} \equiv 0$ .)

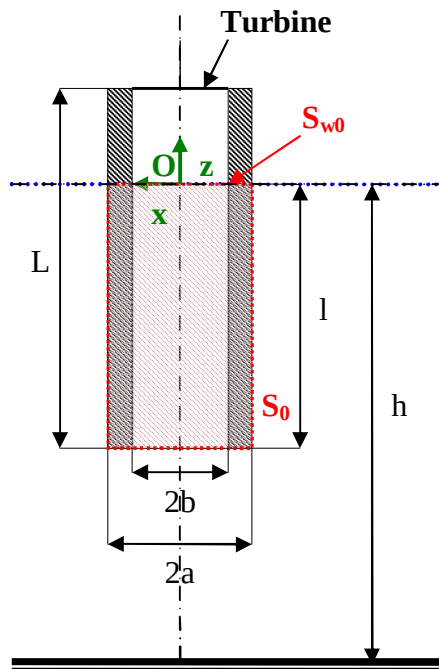


Figure 2.1 OWC in static equilibrium

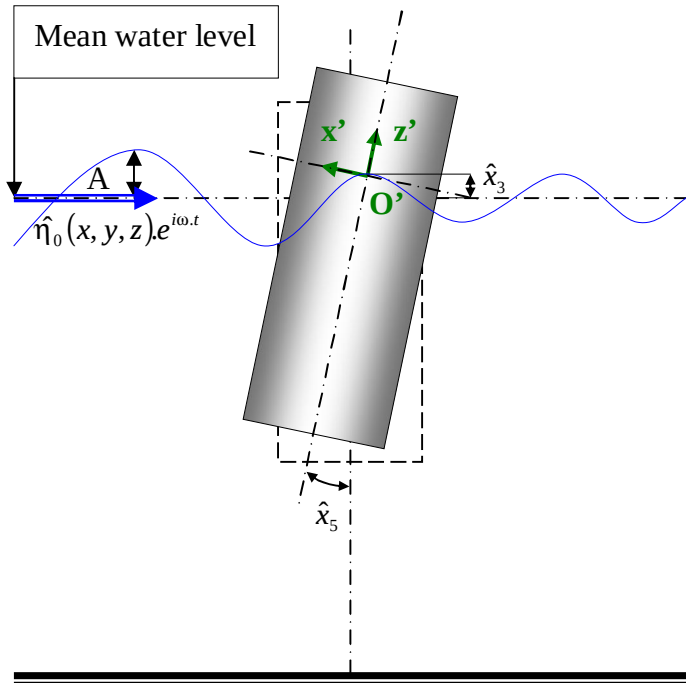


Figure 2.2 OWC with an incident wave

(la cavité dans le cylindre n'est pas à prendre en compte ici)