

Lagrangien à la Landau

Dans l'espace-temps de Minkowski le mouvement est rectiligne à vitesse constante. Nous allons déterminer le lagrangien d'une particule soumise à une force dérivant d'un potentiel. Nous nous plaçons dans le cadre newtonien et non dans un espace-temps. Le temps est celui de l'observateur mais la masse est variable selon la formule de la masse relativiste. Une particule, pour être accélérée, doit être soumise à une force. La loi de Newton s'écrit en dynamique relativiste sous la forme

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

m_0 étant la masse propre, constante. Lorsque la force dérive d'un potentiel V , on a

$$F = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

L'équation fondamentale de la dynamique, adaptée à la relativité, avec une force dérivant d'un potentiel V devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

L'expression entre parenthèses peut s'intégrer, ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \right] = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

On peut retrancher à gauche, dans la parenthèse, le potentiel, puisque sa dérivée partielle par rapport à v est nulle. De même, à droite, on peut ajouter le radical, dont la dérivée partielle par rapport à x est nulle :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V \right) = 0$$

En posant

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(x)$$

appelé le lagrangien « à la Landau », on reconnaît l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

Le lagrangien "à la Landau" fonctionne pour des énergies d'accélération supérieures à l'énergie totale au repos de la particule accélérée. Il est incompatible avec la notion de métrique, ne s'inscrit pas dans l'espace de Minkowski et semble incapable de calculer la déviation de la lumière par le Soleil alors que la mécanique newtonienne en est capable, à un coefficient deux près.

Lagrangien en limite newtonienne

On peut transformer le lagrangien newtonien classique

$$L_N = T - V = \frac{1}{2} m_0 v^2 - V$$

en une métrique satisfaisant l'équation de Lagrange. Les équations du mouvement d'un objet de masse propre m_0 constante et de vitesse v peuvent être obtenues en résolvant les équations de Lagrange avec, comme lagrangien newtonien

$$L_N = T - V = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \Phi \right) + \frac{1}{2} m_0 c^2$$

où m_0 est la masse au repos, constante, et

$$\Phi = \frac{2V}{m_0 c^2}$$

un potentiel sans dimension, indépendant de la masse lorsque V est l'énergie potentielle de gravitation. Comme les équations de Lagrange sont homogènes, on peut retrancher la constante $m_0 c^2/2$, diviser par $m_0 c^2/2$ et changer le signe tout en remplaçant v par dx/dt , ce qui donne un nouveau lagrangien strictement équivalent au lagrangien newtonien :

$$L = -\frac{2L_N}{m_0 c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \Phi$$

Ce lagrangien donne le même résultat dans les équations de Lagrange qu'avec $L = T - V$ car le un disparaît par dérivation. Le coefficient se simplifie puisque les équations de Lagrange sont homogènes en L . Multiplions chaque côté de cette expression par $c^2 dt^2$:

$$\frac{2L}{m_0} dt^2 = dx^2 - (1 + \Phi) c^2 dt^2$$

En posant

$$d\tau^2 = -\frac{2L}{m_0 c^2} dt^2$$

on obtient la métrique en limite newtonienne,

$$d\tau^2 = (1 + \Phi) dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}$$

On a donc obtenu une métrique à partir de la mécanique newtonienne. On obtiendrait la même à partir d'une métrique de Minkowski à vitesse de la lumière variable en appliquant le principe d'équivalence.