cette méthode qui nécessite de passer par la théorie générale des orbites planétaires, assez compliquée. Elle donne le même résultat que la méthode classique de Soldner ou celle d'Einstein 1911. Nous nous contenterons de résoudre les équations de Lagrange d'un mouvement rectiligne.

3.5. MOUVEMENT RECTILIGNE

Lagrangien

Soit un corps pesant en chute rectiligne le long de l'axe des x dans un potentiel de gravitation Φ, sans dimension. Comme on l'a vu, le lagrangien de type métrique dérivé de la mécanique newtonienne ou de la relativité restreinte est

$$L = \sqrt{(1 + \Phi)\dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = 1$$

V étant le potentiel classique, dans un champ de gravitation (mais pourrait tout aussi bien être un potentiel électrostatique, auquel cas la masse ne disparaîtrait pas des équations), de la particule de masse propre (au repos) m_0 on a

$$\Phi = \frac{2V}{m_0 c^2}$$

Ce calcul est le plus simple imaginable dans le cadre de la relativité générale tout en étant le plus proche possible de la mécanique newtonienne. Il est présenté ici pour faire comprendre le principe du calcul de la déviation de la lumière et de la précession du périhélie de Mercure.

Equation en t

Pour connaître la dérivée t' = dt/dτ du temps physique t par rapport au temps propre τ résolvons l'équation de Lagrange en t :

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 0$$

Elle se réduit à

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 0$$

puisque le lagrangien L ne dépend pas explicitement de t. On peut l'intégrer en

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = E$$

où E est une constante d'intégration à déterminer. En y remplaçant le lagrangien par son expression

$$L = \frac{d\tau}{d\tau} = 1 = \sqrt{(1 + \Phi)\dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

l'intégrale première de l'équation de Lagrange devient

$$\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\sqrt{(1 + \Phi)\dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = E$$

soit

$$\frac{(1 + \Phi)\, 2\dot{t}}{2\sqrt{(1 + \Phi)\dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = E$$

Comme L = 1, on obtient, après réarrangement

$$\mathbf{\dot{t} = t' = \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 + \Phi}}$$

Il n'est pas nécessaire de poursuivre l'intégration car cette formule ne sert qu'à éliminer t' du lagrangien.

Vitesse, accélération et énergie

Le lagrangien peut s'écrire, en mettant t' en facteur :

$$L = \frac{d\tau}{d\tau} = 1 = \dot{t}\sqrt{1 + \Phi - \frac{v^2}{c^2}}$$

En utilisant la relation précédente,

$$\dot{t} = \frac{E}{1 + \Phi}$$

le lagrangien devient :

$$\frac{E}{1 + \Phi}\sqrt{1 + \Phi - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

Après transformation on a :

$$v = c\sqrt{1 + \Phi - \frac{(1 + \Phi)^2}{E^2}}$$

Cette relation doit être vérifiée pendant tout le mouvement puisque le lagrangien est constant et égal à un. Si on fait l'hypothèse simplificatrice que le potentiel Φ et la vitesse sont nuls au départ, on doit avoir E = 1 pour que la relation soit vérifiée au départ. La valeur absolue de la vitesse physique v d'une particule matérielle chutant à partir de l'infini avec une vitesse initiale nulle est donc :

$$\mathbf{|v| = c\sqrt{-\Phi(1 + \Phi)}}$$

La vitesse v est nulle au départ, où $\Phi = 0$, s'accroît et s'annule à nouveau pour $\Phi = -1$. Du fait de la racine carrée, seuls les potentiels compris entre 0 et - 1 sont possibles. En particulier, l'énergie potentielle ne peut être positive.

L'accélération s'obtient en dérivant l'expression précédente élevée au carré :

$$v^2 = -c^2\Phi\,(1 + \Phi)$$

ce qui donne

$$2v\frac{dv}{dt} = -c^2\frac{d\Phi}{dt}(1 + \Phi) - 2c^2\Phi\frac{d\Phi}{dt} = -c^2(1 + 2\Phi)\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt}$$

En simplifiant par v, puisque v = dx/dt, Φ ne dépendant que de x, il reste

$$\mathbf{\frac{dv}{dt} = -c^2\left(\frac{1}{2} + \Phi\right)\frac{d\Phi}{dx}}$$

L'accélération s'annule pour $\Phi = -\frac{1}{2}$. A ce moment, la vitesse est maximale et vaut $v = c/2$, inférieure à celle de la lumière. L'accélération devient ensuite négative et la vitesse diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule et devienne imaginaire pour $\Phi = -1$. Ce « phénomène » est sans rapport avec la loi de la gravitation qui n'apparaît pas explicitement dans le calcul précédent. Il est dû à la présence du potentiel sous le radical, contrairement à la dynamique relativiste où le potentiel se trouve à l'extérieur du radical dans le lagrangien relativiste « à la Landau ». Cette singularité, apparaissant au voisinage des trous noirs, n'est pas spécifique à la métrique en limite newtonienne et se présente de façon analogue dans la métrique la plus connue de la relativité générale, celle de Schwarzschild.

On ne peut appliquer cette formule à un potentiel d'accélération V positif car la vitesse serait supérieure à celle de la lumière. A la limite, on peut utiliser le potentiel de pesanteur $V = \pm mgh$, sachant que la vitesse de la lumière n'est atteinte qu'à l'infini et qu'on ne mesure que la variation, locale et faible, de vitesse $\Delta v = \pm gh/c$.

Lorsque Φ est faible devant un, le terme entre parenthèses devient voisin de un et on retrouve la loi fondamentale de la dynamique pour une force F dérivant du potentiel V(x) :

$$\frac{dv}{dt} \cong -\frac{c^2}{2}\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{c^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{2V}{m_0 c^2}\right) = -\frac{1}{m_0}\frac{dV}{dx} = \frac{F}{m_0}$$

La proportionnalité de l'accélération à la force serait, d'après la relativité générale, une approximation valable uniquement aux potentiels et, donc, aux forces faibles. Le potentiel, négatif en relativité générale à cause de la forme radicalaire du lagrangien, freine l'accélération, un peu comme la vitesse en dynamique relativiste. Reprenons l'expression ci-dessus du lagrangien

$$\frac{E}{1+\Phi}\sqrt{1+\Phi-\frac{v^2}{c^2}} = 1$$

En l'élevant au carré, lorsque Φ et v sont faibles, on a, au second ordre près

$$E^2 = \frac{(1+\Phi)^2}{1+\Phi-\frac{v^2}{c^2}} \cong 1+\Phi+\frac{v^2}{c^2}$$

En utilisant le potentiel V, cette expression s'écrit

$$V + \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}\left(E^2 - 1\right)m_0 c^2$$

Le membre de droite étant constant, on retrouve la conservation classique de l'énergie. La conservation de l'énergie ne serait donc pas respectée en relativité générale aux vitesses et potentiels élevés.

Comme avec la métrique de Minkowski à vitesse variable de la lumière, la vitesse de la particule reste inférieure à celle de la lumière, sans y tendre asymptotiquement comme avec le lagrangien relativiste « à la Landau » de la dynamique relativiste. Lorsque le potentiel est faible, on retrouve la loi fondamentale de la dynamique et la conservation de l'énergie de la mécanique newtonienne.

Dans le référentiel propre de la particule. En effet, on a :

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v\dot{t} = v\frac{E}{1+\Phi} = \sqrt{-\Phi}\,\frac{\sqrt{1+\Phi}}{1+\Phi} = \frac{\sqrt{-\Phi}}{\sqrt{1+\Phi}}$$

en prenant E = 1. On ne retrouve pas la formule newtonienne dans le référentiel propre alors qu'on l'obtiendra avec la métrique de Schwarzschild. La métrique de Schwarzschild, comme l'avait prédit Einstein en 1916, donne une valeur double de la déviation de la lumière par le Soleil. La mécanique newtonienne, transformée ou non en métrique ne donne donc pas de résultat cohérent.