Pendule de torsion

Moment d'inertie

I) Généralités

I-1) Relation fondamentale appliquée à un solide en rotation

Lorsqu'un solide a un mouvement de rotation pure par rapport à un axe Δ (figure 1), le principe fondamental de la dynamique conduit à une relation de la forme :

$$M_{\frac{\vec{F}}{\Delta}} = I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Dans cette relation $M_{\frac{\vec{F}}{\Delta}}$ est le moment résultant par rapport à l'axe de rotation de toutes les forces appliquées au solide, $\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ est l'accélération angulaire du solide et I est le moment d'inertie par rapport à Δ, du solide considéré.

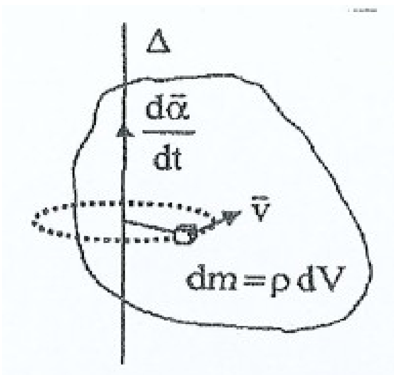

Figure 1: Solide en rotation par rapport à un axe

I-2) Le moment d'inertie

Cette grandeur joue, vis à vis du solide, le même rôle pour la rotation que la masse pour la translation. Le moment d'inertie se calcule à partir des caractéristiques géométriques et de la répartition de la masse du solide. Il est défini par de la forme :

$$I = \iiint r^2 \, dm = \iiint \rho \, r^2 \, dv \qquad \textbf{(2)}$$

I-3) Théorème d'Huygens

Le moment d'inertie $I_{./\Delta}$ par rapport à un axe Δ quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à un axe Δ_0 parallèle à Δ, passant par le centre de gravité G du solide, augmenté de la quantité mr², r représentant la distance entre les deux axes.

$$I_{./\Delta} = I_{./\Delta_0} + mr^2 \qquad \textbf{(3)}$$

I-4) Principe de mesure du moment d'inertie

Soit un solide possédant un axe de symétrie A (par exemple, le disque du schéma de la figure 2) dont on veut mesurer le moment d'inertie L. Ce solide est fixé à l'extrémité d'un fil de torsion de façon à ce que ce dernier se trouve aligné avec A. Lorsque le solide oscille autour de Δ, $\vec{M} = -C \, . \, \vec{\alpha}$ si les frottements sont négligés. A partie de l'expression (1), il est possible d'écrire :

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + C \, \alpha = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

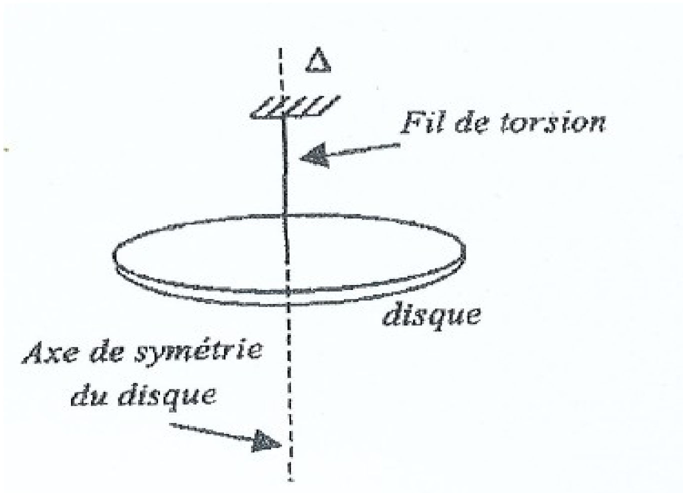

Figure 2: Pendule de torsion autour d'un axe Δ

avec C la constante de torsion du fil et α l'angle de rotation. La solution générale de cette équation différentielle s'écrit sous la forme : $a = a.sin(\omega \, t + \varphi)$.

avec a l'amplitude angulaire maximum, $\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$ la pulsation, φ le déphasage qui ne dépend que de l'angle à l'instant pris comme origine. Le solide décrit un mouvement sinusoïdal de période T, telle que : $T = 2 \, \Pi \sqrt{\frac{I}{C}}$.

On en déduit donc que : $I = \frac{CT^2}{4 \, \Pi^2}$ **(5)**

$$C = \frac{\mu \, d^4}{L} \qquad \textbf{(6)}$$

avec μ le module de rigidité de cisaillement qui dépend de la nature du métal, d le diamètre du fil de torsion et L sa longueur.

II) Appareillage utilisé

L'appareillage utilisé au cours de cette manipulation comprend :

- ✔ un pendule de torsion
- ✔ trois solides dont on mesurera les moments d'inertie (parallélépipède à base carrée, barre cylindrique, solide en H)
- ✔ un chronomètre
- ✔ un mètre à ruban
- ✔ un pied à coulisse.

II-2) Pendule de torsion

II-2.a) Description

L'appareil se compose d'un socle en croissant (S) portant à l'arrière une colonne (B) et à l'avant deux vis de réglage de niveau (D). Sur la partie supérieure de la colonne est fixé un support horizontal sur lequel est montée une tige carrée verticale (E). Une noix, pouvant être déplacée sur cette tige et immobilisée par un boulon de blocage, porte un mandrin à pince (M1) dans lequel est serré le fil de torsion. A l'extrémité inférieure de ce fil est monté un deuxième mandrin (M2) sur la queue duquel on fixe le solide à étudier. Pour empêcher le solide de prendre un mouvement perpendiculaire , la queue du mandrin (M2) est guidée par le roulement à billes très sensible tenu par le support horizontal. Une aiguille solidaire du mandrin (M2) indique l'angle décrit en se déplaçant devant un tambour G gradué en degrés et fixé sur son support horizontal. L'élongation angulaire maximum ne doit pas dépasser 50° à partir de sa position d'équilibre sous peine de déformer le fil de torsion. C'est pourquoi des butées limitent cet angle.

II-1.b) Montage des solides à étudier

La balance de torsion décrite ci-dessus a été réglée et ce réglage ne doit en aucun cas être modifié par l'étudiant. Seuls les solides dont on doit mesurer les moments d'inertie doivent être successivement montées sur la queue du mandrin (M2). Pour ce montage, les solides sont munis d'un trou cylindrique où passe la queue du mandrin et à 90° de ce trou d'une vis de blocage. Une clé alêne permet de bloquer ou de débloquer cette vis.

II-2) Chronomètre

Pour mesurer la période T, on procédera comme suit :

- ➢ **Faire osciller le pendule de torsion,**
- ➢ **Presser puis relâcher le bouton poussoir « remise à zéro » du chronomètre,**
- ➢ **Compter 20 oscillations et lire l'affichage au bout de 20T.**

III) Manipulation

Le pendule de torsion est préréglé, ne pas modifier le réglage.

3-1) Evaluation de la constante de torsion

- **Mesurer les dimensions du fil de torsion avec le mètre à ruban et le pied à coulisse.**
    - Longueur du fil : L =.................+/-.........m
    - Diamètre du fil d=.................+/-.........m
- **Sachant que** $\mu = 4{,}67 10^{9} \pm 0{,}05 10^{9} N.m^{-2}\ rad^{-1}$ **, calculer la valeur de la constante de torsion C**
    - Constante de torsion du fil C=............N.m.rad^{-1}.
- **Déterminer l'incertitude absolue de** ΔC **sur la valeur de C (donner la formule littérale puis la valeur calculée).**
- ΔC **=.................N.m.rad^{-1}**
    - ✔ Résultat final :
- **C = ...+/-............N.m.rad^{-1}**

3-2) Mesure des moments d'inertie

Pour chaque solide étudié :

- **Effectuer le montage du solide sur la queue du mandrin.**
- **Faire osciller le pendule.**
- **Mesurer 5 fois la durée correspondant à 20 fois la période des oscillations.**
- **En déduire la valeur du moment d'inertie.**
- **Évaluer la précision des mesures en prenant un intervalle de confiance de 68 %.**

Formule littérale donnant l'incertitude absolue ΔI en fonction de ΔC et ΔT :

- ΔI **= ....**

3-2.a) Plaque carrée

- **Remplir le tableau suivant sur un tableur (Excel ou LibreOffice) :**

	1ère mesure	2ème mesure	3ème mesure	4ème mesure	5ème mesure	Moyenne	Ecart type	Incertitude (avec t68%)
20 T (s)								
T (s)								

- **T = ...+/-............s**
- **Δ I_p = ...kg.m²**

Résultat final

- **I_P =............+/-..............kg.m²**

3-2.b) Barre cylindrique

- **Remplir le tableau suivant sur un tableur (Excel ou LibreOffice) :**

	1ère mesure	2ème mesure	3ème mesure	4ème mesure	5ème mesure	Moyenne	Ecart type	Incertitude (avec t68%)
20 T (s)								
T (s)								

- **T = ...+/-............s**
- **Δ I_p = ...kg.m²**

Résultat final

- **I_P = ...+/-..............kg.m²**

3-2.c) H vertical

- **Remplir le tableau suivant sur un tableur (Excel ou LibreOffice) :**

	1ère mesure	2ème mesure	3ème mesure	4ème mesure	5ème mesure	Moyenne	Ecart type	Incertitude (avec t68%)
20 T (s)								
T (s)								

- **T = ...+/-............s**
- **Δ I_p = ...kg.m²**

- **Résultat final**
- **I_P = ...+/-..............kg.m²**

3-2.d) H horizontal

- **Remplir le tableau suivant sur un tableur (Excel ou LibreOffice) :**

	1ère mesure	2ème mesure	3ème mesure	4ème mesure	5ème mesure	Moyenne	Ecart type	Incertitude (avec t68%)
20 T (s)								
T (s)								

- **T = ...+/-............s**
- Δ **I_p = ...kg.m²**

- **Résultat final**
- **I_P = ...+/-..............kg.m²**

3-3) Calcul des moments d'inertie théoriques des deux solides de forme simple

Pour la plaque carrée et la barre cylindrique :

- **Mesurer les dimensions géométriques du solide étudié.**
- **Calculer la masse du solide connaissant sa masse volumique** $\rho = 7{,}92 \pm 0{,}01\, g.cm^3$ **.**
- **Déterminer le moment d'inertie théorique du solide en utilisant l'expression établie pour un modèle simplifié.**

3-3.a) Plaque carrée

Le calcul théorique donne

$$I_p = \frac{ml^2}{6} \qquad \textbf{(7)}$$

avec m la masse de la plaque carrée et l la longueur du côté du carré.

- **Longueur de la plaque : l = ...+/-............m.**
- **Epaisseur de la plaque : e = ...+/-...........m.**

- **Etablir l'expression littérale de la masse m de la plaque carrée en fonction de l et e :**

m : ....

- **Ainsi que celle donnant son moment d'inertie I_ρ en fonction de ρ, l et e :**

I_P = ...

- **Et son incertitude en fonction de** $\Delta\rho$, ΔI , Δe **.**

ΔI_p = ...

- **Résultat final :**
- **I_P = ...+/-............kg.m²**

3-3.b) Barre cylindrique

Le calcul théorique donne

$$I_B = \frac{ml^2}{12} \qquad \textbf{(7)}$$

avec m la masse de la barre cylindrique et l sa longueur.

- **Longueur de la plaque : l = ...+/-............m.**
- **Diamètre de la plaque : d = ...+/-...........m.**

- **Etablir l'expression littérale de la masse m de la plaque carrée en fonction de l et d :**

m : ....

- **Ainsi que celle donnant son moment d'inertie I_ρ en fonction de ρ, l et d:**

I_B = ...

- **Et son incertitude en fonction de** $\Delta\rho$, ΔI , Δd **.**

ΔI_B = ...

- **Résultat final :**

I_B = ...+/-............kg.m²

3-3.c) Synthèse, vérification de l'expression (2)

- **Comparer les valeurs I_P et I_B obtenues par la mesure de la période (3-2.a et 3-2.B) et les valeurs théoriques (3-3.a et 3-3.b). Ces valeurs sont elles compatibles? Sinon pourquoi?**