Concours Commun Marocain		Session : 1988
Option : MM'	Epreuve de Physique	Durée : 4 h

N.B. : Les deux problèmes sont indépendants.

PREMIER PROBLEME :
ANALOGIES ENTRE OSCILLATEURS MECANIQUES ET ELECTRIQUES

I. Oscillations libres

1. Un pendule de torsion est réalisé avec une tige horizontale homogène suspendue en son milieu O à un fil de torsion dont l'autre extrémité A est fixe (figure I.1). La constante du fil de torsion est C. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe vertical de rotation est J. On repère la position de la tige par rapport à sa position d'équilibre par l'angle θ.

   Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ.

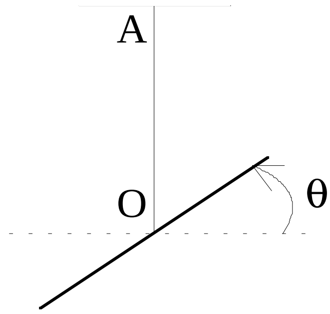

Figure I.1

2. Un circuit est constitué d'une inductance L et d'une capacité Γ en série (figure I.2).

   Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait la tension u aux bornes de la capacité.

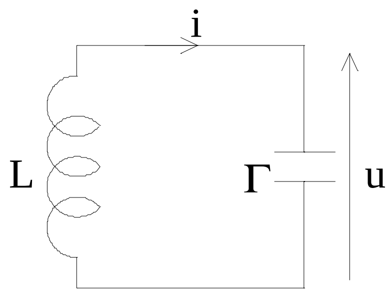

Figure I.2

3. On établit une correspondance entre $d\theta/dt$ et i d'une part et entre J et L d'autre part. A quelle grandeur correspond la constante de torsion C ?

II. Oscillations forcées

1. La tige horizontale précédente est suspendue en son milieu O à un fil de torsion vertical OA de constante C_1. Un deuxième fil de torsion vertical OB de constante C_2 est fixé à la tige en O. La position de la tige est toujours repérée par l'angle θ dans le plan horizontal à partir de sa position d'équilibre. On impose à l'extrémité A un mouvement de rotation autour de OA : $\alpha=\alpha_0\cos(\omega t)$, B restant fixe (figure I.3).

   On tient compte des forces de frottement exercées par l'air en les assimilant à un couple de moment $-h(d\theta/dt)\kappa$, par rapport à O, κ étant le vecteur unitaire de l'axe de rotation et h une constante positive indépendante de θ.

   a. Etablir l'équation différentielle satisfaite par θ.

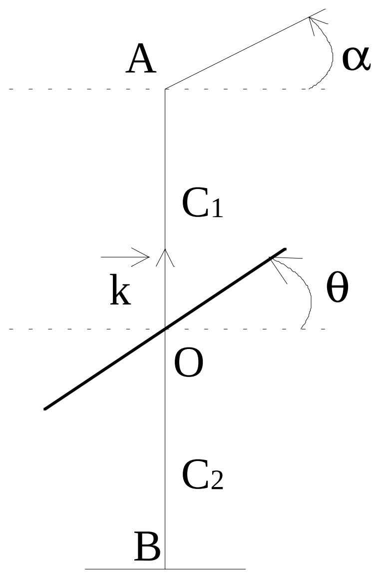

Figure I.3

   b. On prend $C_1=C$ et $C_2=2C$.
   Déterminer l'amplitude angulaire θ_m du mouvement lorsque le régime

permanent est atteint.

Application numérique : Calculer θ_m avec les données suivantes
$J=4{,}8.10^{-4}$ kg.m^2 ; $C=4.10^{-3}$ m.N ; $\omega=3$ s^{-1} ; $h=2.10^{-3}$ m.N.s ; $\alpha_0=1{,}4$.

c. Déterminer la valeur de ω produisant l'amplitude maximale.

d. Quelle condition doit satisfaire le coefficient h pour que cette résonance puisse se produire ?

2. On réalise le circuit de la figure I.4 comportant une inductance pure L, une capacité Γ, une résistance R et une source de tension de force électromotrice $e= E_0\cos\omega t$.

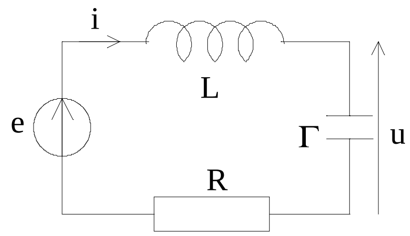

Figure I.4

a. Etablir l'équation différentielle satisfaite par la tension u aux bornes de la capacité.

b. On établit la même correspondance que dans le I., déterminer les grandeurs qui correspondent ici à C,h et α_0.

c. En déduire, en régime permanent, la pulsation de résonance du circuit et la condition sur R pour que cette résonance ait lieu.

III. Oscillateurs couplés non amortis

1. Deux tiges horizontales identiques entre elles et identiques à celles utilisées dans les questions précédentes sont reliées par des fils de torsion verticaux comme l'indique la figure I.5.

   Les constantes de raideur des fils sont C_1 pour O_1A, C_2 pour O_2B et C pour O_1O_2. O_1 et O_2 sont les milieux des tiges. On repère les positions des tiges par θ_1 pour la tige supérieure θ_2 pour la tige inférieure à partir de leurs positions d'équilibre.

   a. Ecrire le système d'équations différentielles satisfait par θ_1 et θ_2.

   b. On prend $C_1=C/2$ et $C_2=2C$.
   Déterminer les pulsations propres de ce système couplé, c'est à dire les valeurs des pulsations communes aux angles θ_1 et θ_2.

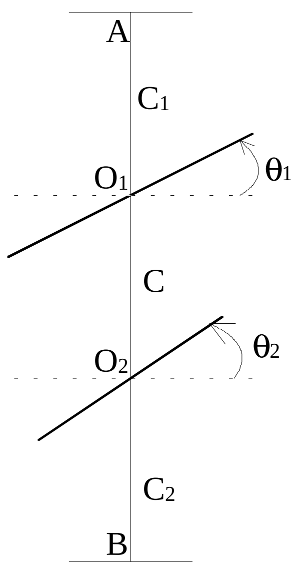

Figure I.5

2. Deux circuits inductance-capacité sont couplés comme l'indique la figure I.6 par une capacité Γ.

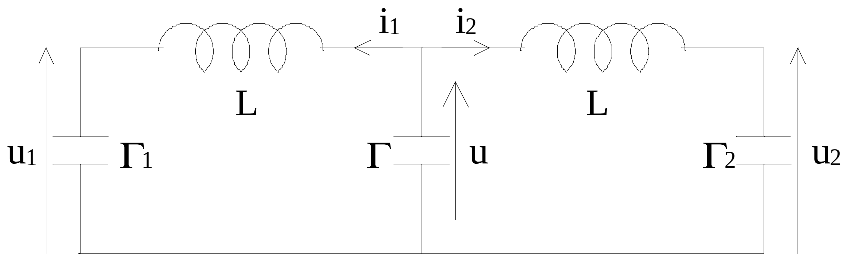

Figure I.6

a. Etablir le système d'équations différentielles du second ordre satisfait par les tensions u_1 et u_2 aux bornes des capacités Γ_1 et Γ_2.
On utilisera le fait qu'à la date zéro : $\Gamma_1 u_1+\Gamma_2 u_2=0$.

b. On établit la correspondance entre $d\theta_1/dt$ et i_1 d'une part et entre J et L d'autre part. A quelles grandeurs correspondent C_1, C_2, C et θ_2.

c. Dans le cadre de cette correspondance, quelles sont, en fonction de Γ, les valeurs prises par Γ_1 et Γ_2 si $C_1=C/2$ et $C_2=2C$?

d. On se place dans le cas du c.
Ecrire les équations différentielles sous une forme qui permette de vérifier qu'elles satisfont bien à la correspondance avec celles du 1.
En déduire les pulsations propres des circuits couplés.

DEUXIEME PROBLEME :
ETUDE D'UN AMPLIFICATEUR DE TENSION

Le but de ce problème est l'étude de l'amplificateur de tension représenté ci-contre (figure II.1).

L'amplificateur opérationnel utilisé est caractérisé par un gain A et une tension ε entre les entrées non inverseuse et inverseuse. Il fonctionne en régime linéaire.

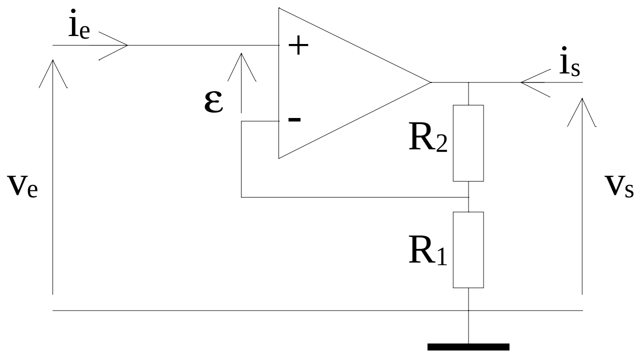

Figure II.1

I. Cas idéal : L'amplificateur opérationnel est idéal.

1. Préciser les valeurs prises alors par A et ε.

2. Calculer le gain $G_0=v_s/v_e$ du dispositif.

3. Représenter l'amplificateur de tension avec la schématisation utilisée pour les opérateurs.

Dans toute la suite du problème l'amplificateur opérationnel n'est plus idéal, en particulier son gain A est fini.

En régime permanent sinusoïdal de pulsation ω, le gain $\underline{A}$ de l'amplificateur opérationnel est complexe et les grandeurs calculées sont donc éventuellement complexes.

II. Calculs de l'impédance d'entrée et du gain de l'amplificateur de tension.

Dans cette partie on prend en compte le fait que la résistance d'entrée R_e de l'amplificateur opérationnel n'est pas infinie. Le schéma électrique de l'amplificateur opérationnel est alors celui de la figure II.2.

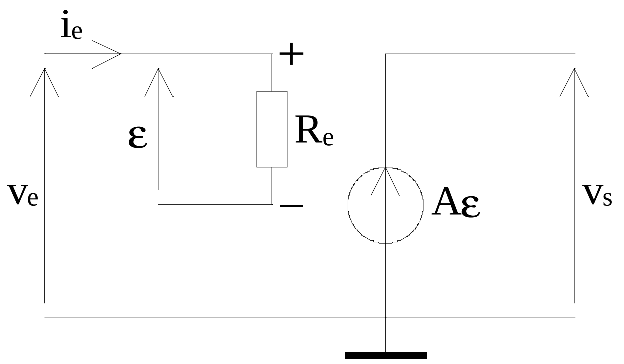

Figure II.2

1. On définit l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e=\underline{v}_e/\underline{i}_e$.
   Calculer $\underline{Z}_e$ en fonction de $\underline{A}$, R_1, R_2 et R_e.

2. En déduire le gain $\underline{G}=\underline{v}_s/\underline{v}_e$ de l'amplificateur de tension en fonction de G_0, $\underline{A}$, R_e, R_1 et R_2.

3. Que devient l'expression de $\underline{Z}_e$ si on tient compte du fait que $\underline{A}$ et R_e sont très grands ?

4. A partir du résultat du 2. et en tenant compte du fait que R_e est grand donner l'expression de $\underline{G}$ en fonction de G_0 et $\underline{A}$.

III. Calcul de l'impédance de sortie de l'amplificateur de tension

Pour ne pas obtenir une expression trop compliquée et sans signification, on tient compte du fait que R_e est très grand. Le schéma électrique de l'amplificateur opérationnel est alors celui de la figure II.3. On fait les calculs en prenant $\underline{v}_e=0$.

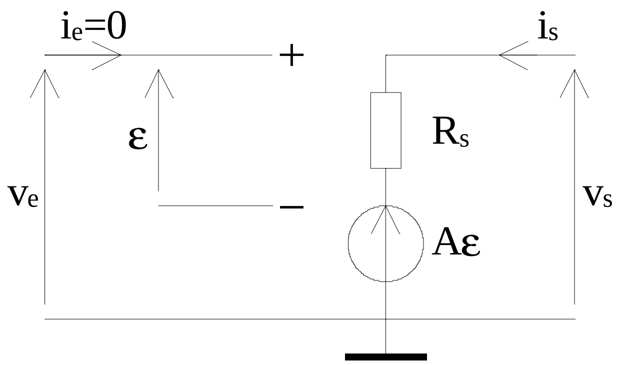

Figure II.3

1. L'impédance de sortie de l'amplificateur de tension est définie par $\underline{Z}_s=\underline{v}_s/\underline{i}_s$. Calculer $\underline{Y}_s=1/\underline{Z}_s$ en fonction de $\underline{A}$, G_0, R_1, R_2 et R_s résistance de sortie de l'amplificateur opérationnel.

2. $\underline{A}$ est toujours très grand et R_s est toujours très petit. Donner l'expression de $\underline{Z}_s$ en fonction de G_0, $\underline{A}$ et R_s.

3. Représenter l'amplificateur de tension avec la schématisation utilisée pour les opérateurs en tenant compte de son impédance d'entrée et de son impédance de sortie.

IV. Comportement en fréquence de l'amplificateur de tension

En régime permanent sinusoïdal de pulsation ω, le gain complexe $\underline{A}$ de l'amplificateur opérationnel est donné par :

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

avec A_0 réel, $\omega_c = 2\pi f_c$, et $j^2 = -1$.

1. A partir de l'expression de $\underline{G}$ trouvée en II.4., mettre le gain de l'amplificateur de tension sous la forme :

$$\underline{G} = \frac{A'_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_c}}$$

avec A'_0 réel.

Donner l'expression littérale de A'_0 en fonction de A_0 et G_0 ainsi que celle de ω'_c en fonction de ω_c, A_0 et G_0.

2. Application numérique : $A_0 = 10^5$; $f_c = 10$ Hz ; $R_1 = 1$ kΩ ; $R_2 = 99$ kΩ. Calculer A'_0 et ω'_c.

3. Tracer dans un même système d'axes les asymptotes de $A_{dB} = 20\log|\underline{A}|$ et de $G_{dB} = 20\log|\underline{G}|$ en fonction de $\log\omega$.

4. Quelle est la relation simple entre A_0, f_c, A'_0 et f'_c ($\omega'_c = 2\pi\, f'_c$). Commenter.

5. On se place dans le cas où $\omega \ll \omega_c$.

a. En utilisant le résultat du II.3. calculer la valeur numérique de $|\underline{Z}_e|/R_e$.

b. En utilisant le résultat du III.2. calculer la valeur numérique de $|\underline{Z}_s|/R_s$.

c. Commenter les résultats précédents.

V. Comportement de l'amplificateur de tension en régime transitoire

Pour $t<0$, on a $v_e = 0$ et $v_s = 0$. A $t=0$ on impose $v_e = E = 10$ mV.

1. Pourquoi peut-on obtenir l'équation différentielle vérifiée par v_s à partir de la relation entre $\underline{v}_e$ et $\underline{v}_s$ en régime sinusoïdal permanent en remplaçant $j\omega\underline{v}_s$ par dv_s/dt ?

2. Déterminer littéralement et numériquement $v_s(t)$ et en tracer le graphe.

3. Que pensez vous de la transmission du signal par l'amplificateur de tension ? La limitation peut-elle provenir d'un autre phénomène ?

FIN DE L'EPREUVE