

# Formulaire de Physique Chimie

Nicolas VERHELST

MP 2015-2016

⚠ Attention à bien avoir toute les couleurs d'ancre disponibles avant impression, afin d'éviter de faire disparaître des parties de formule (en rouge,...).

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Physique</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Electrostatique</b>	<b>6</b>
1.1	Distribution de charge . . . . .	6
1.2	Champ électrostatique . . . . .	6
1.3	Potentiel électrostatique . . . . .	7
1.4	Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss . . . . .	8
1.5	Dipôle électrostatique . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Equations locales de l'électrostatique</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>10</b>
3.1	Distribution de courant . . . . .	10
3.2	Champ magnétostatique, circulation, théorème d'Ampère . . . . .	11
3.3	Dipôle magnétostatique . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Equations locales de la magnétostatique</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Mouvement d'une particule dans un champ électrique ou magnétique uniforme et stationnaire (première année)</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Action d'un champ magnétique uniforme et stationnaire sur un courant - force de Laplace</b>	<b>13</b>
6.1	Généralité . . . . .	13
6.2	Effet moteur d'un champ magnétique tournant . . . . .	14

6.3	Moteur synchrone . . . . .	14
6.4	Moteur asynchrone . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Induction</b>	<b>14</b>
7.1	Généralité . . . . .	14
7.2	Conversion électromécanique de puissance . . . . .	15
7.3	Couplage par induction . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Champ gravitationnel</b>	<b>15</b>
<b>9</b>	<b>Equations de Maxwell</b>	<b>16</b>
9.1	Postulat . . . . .	16
9.2	Formules dérivées . . . . .	16
<b>10</b>	<b>Conduction dans un métal - Modèle de Drude</b>	<b>17</b>
<b>11</b>	<b>Energie du champ électromagnétique</b>	<b>17</b>
11.1	Puissance cédée à la matière . . . . .	17
11.1.1	Généralité . . . . .	17
11.1.2	Conducteur ohmique . . . . .	18
11.2	Energie du champ électromagnétique . . . . .	18
11.2.1	Densité volumique d'énergie électromagnétique . . . . .	18
11.2.2	Energie électrocinétique . . . . .	19
<b>12</b>	<b>Propagation et rayonnement</b>	<b>19</b>
12.1	Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant . . . . .	19
12.1.1	Généralité . . . . .	19
12.1.2	Onde plane progressive monochromatique . . . . .	20
12.2	Propagation d'une onde électromagnétique plane dans un plasma . . . . .	22
12.2.1	Conduction dans un plasma . . . . .	22
12.2.2	Propagation d'une OPPM dans un plasma . . . . .	23
12.2.3	Dispersion . . . . .	23
12.3	Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique – Réflexion sur un conducteur parfait . . . . .	24
12.3.1	Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique . . . . .	24
12.3.2	Réflexion sur un conducteur parfait – Onde stationnaire . . . . .	25
12.4	Dipôle oscillant . . . . .	25
<b>13</b>	<b>Optique géométrique</b>	<b>26</b>
13.1	Bases de l'optique géométrique . . . . .	26
13.2	Objet image, stigmatisme, aplanétisme, système centré dans les condi- tions de Gauss . . . . .	27

13.3	Lentilles minces sphériques . . . . .	28
<b>14</b>	<b>Interférences</b>	<b>28</b>
14.1	Généralité sur les interférences . . . . .	28
14.1.1	Emission et réception de lumière . . . . .	28
14.1.2	Superposition de deux ondes monochromatiques polarisées rectilignement . . . . .	29
14.1.3	Evaluation d'un déphasage . . . . .	30
14.1.4	Figures d'interférences . . . . .	31
14.2	Interférences par division du front d'onde, trous d'Young . . . . .	31
14.2.1	Trous d'Young . . . . .	31
14.3	Cohérence spatiale . . . . .	32
14.4	Cohérence temporelle . . . . .	33
14.5	Interférences par division d'amplitude . . . . .	34
14.5.1	Interféromètre de Michelson . . . . .	34
14.6	Interférences à N ondes : réseau . . . . .	35
14.6.1	Réseau . . . . .	35
14.6.2	Interférences à N ondes . . . . .	36
14.6.3	Formule des réseaux . . . . .	37
<b>II</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>39</b>
<b>15</b>	<b>Introduction à la thermodynamique</b>	<b>39</b>
15.1	Généralités . . . . .	39
15.2	Premier principe . . . . .	41
15.3	Second principe . . . . .	43
<b>16</b>	<b>Application du premier principe</b>	<b>44</b>
16.1	Transformation chimique . . . . .	44
16.2	Grandeur de réaction . . . . .	44
16.3	Grandeur standard de réaction . . . . .	44
16.4	Grandeur standard de formation . . . . .	45
<b>17</b>	<b>Application du second principe</b>	<b>46</b>
17.1	Enthalpie libre . . . . .	46
17.2	Système de composition variable : potentiel chimique . . . . .	47
17.3	Différentes expressions du potentiel chimique et activités . . . . .	47
<b>18</b>	<b>Enthalpie libre de réaction – évolution d'un système – équilibre chimique</b>	<b>49</b>
18.1	Enthalpie libre de réaction . . . . .	49
18.2	Quotient de réaction — constante d'équilibre . . . . .	50

18.3	Détermination de la constante d'équilibre — influence de la température . . . . .	51
18.4	Différentes expressions de $Q$ de la LAM . . . . .	52
18.5	Exemples simples . . . . .	52
<b>19</b>	<b>Variance — optimisation d'un processus chimique</b>	<b>53</b>
19.1	Variance d'un système à l'équilibre . . . . .	53
19.2	Optimisation d'un procédé chimique . . . . .	54
<b>III</b>	<b>Mécanique</b>	<b>55</b>
<b>20</b>	<b>Dynamique et énergétique du solide en référentiel galiléen</b>	<b>55</b>
<b>21</b>	<b>Changement de référentiel – dynamique du point en référentiel <u>non galiléen</u></b>	<b>56</b>
<b>IV</b>	<b>Annexe</b>	<b>59</b>
<b>22</b>	<b>Compléments de mécanique</b>	<b>59</b>
22.1	Point matériel . . . . .	59
22.1.1	Principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	59
22.1.2	Energie . . . . .	59
22.2	Solide . . . . .	59
22.2.1	Principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	59
22.2.2	Energie . . . . .	59
<b>23</b>	<b>Elements d'analyse vectorielle</b>	<b>60</b>
23.1	Opérateur nabla . . . . .	60
23.2	Gradient . . . . .	60
23.3	Divergence . . . . .	60
23.4	Laplacien . . . . .	61
23.5	Rotationnel . . . . .	61
23.6	Propriétés . . . . .	61
<b>24</b>	<b>Résolution des équations différentielles (à coefficients constants)</b>	<b>62</b>
24.1	Premier degré . . . . .	62
24.2	Deuxième degré : oscillateur harmonique . . . . .	62
24.3	Deuxième degré : quelconque . . . . .	62
24.3.1	$\Delta > 0$ : Régime apériodique . . . . .	63
24.3.2	$\Delta < 0$ : Régime pseudo-périodique . . . . .	63
24.3.3	$\Delta = 0$ : Régime critique . . . . .	63

<b>25 Débarras de formules en tout genre</b>	<b>64</b>
<b>V Postscriptum</b>	<b>66</b>
<b>26 Abréviations</b>	<b>66</b>

## Première partie

## Physique

## 1 Electrostatique

## 1.1 Distribution de charge

**Formule 1.1.** *Volume sphère*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

**Formule 1.2.** *Surface sphère*

$$S = 4\pi r^2$$

**Formule 1.3.** *Charge élémentaire*

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ en } F.m^{-1}$$

**Formule 1.4.** *Densité de charge**Volumique :*

$$\rho(P) = \frac{dq}{d\tau} \text{ en } C.m^{-3}$$

*Surfacique :*

$$\sigma(P) = \frac{dq}{dS} \text{ en } C.m^{-2}$$

*Linéique :*

$$\lambda(P) = \frac{dq}{dl} \text{ en } C.m^{-1}$$

## 1.2 Champ électrostatique

**Formule 1.5.** *Champ électrostatique*

- *Charge q en O :*

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \overrightarrow{e}_r \text{ en } V.m^{-1}$$

- *Distribution volumique :*

— *Volumique :*

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)d\tau}{PM^2} \overrightarrow{e}_{PM}$$

— *Surfacique :*

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)dS}{PM^2} \overrightarrow{e}_{PM}$$

— *Linéique :*

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(L)} \frac{\lambda(P)dl}{PM^2} \overrightarrow{e}_{PM}$$

**Formule 1.6.** Force de coulomb

$$\overrightarrow{F}(M) = q\overrightarrow{E}(M)$$

Ou bien :

$$\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \overrightarrow{e}_{12}$$

**Proposition 1.7.** Principe de Curie

"Dans une expérience de physique, les effets présentent au moins les symétries des causes"

**Proposition 1.8.** Propriétés de symétries des charges

1.  $M \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{E}(M) \in \pi$
2.  $M \in \pi^* \Rightarrow \overrightarrow{E}(M) \perp \pi^*$
3. On connait  $2\pi \supset M \Rightarrow \overrightarrow{E}(M)$  est à l'intersection des  $2\pi$

### 1.3 Potentiel électrostatique

**Formule 1.9.** Opérateur gradient

Formule générale :

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{grad}(f) \iff df = \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{dr} \iff df = \overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{dr}$$

En cartésien :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e}_z$$

En cylindrique :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e}_z$$

En sphérique :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \overrightarrow{e}_\phi$$

**Formule 1.10.** gradient de potentiel

$$\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V(M)) \iff dV(M) = -\overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{e}_r$$

**Théorème 1.11.** Théorème de l'énergie cinétique

$$\delta W = dE_c$$

De plus :

$$\delta W = -dE_p$$

**Formule 1.12.** Energie mécanique

$$E = E_c + E_p$$

**Formule 1.13.** Energie potentielle électrostatique

$$E_p(M) = qV(M)$$

## 1.4 Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss ELECTROSTATIQUE

**Formule 1.14.** *Potentiel électrostatique*

*Volumique :*

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)d\tau}{PM}$$

*Surfacique :*

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

*Linéique :*

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(L)} \frac{\lambda(P)dl}{PM}$$

## 1.4 Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss

**Formule 1.15.** *Vecteur surface élémentaire*

$\vec{dS} = dS\vec{m}$  avec  $\vec{m}$  vecteur normal à la surface (et dirigé vers l'extérieur si la surface est fermée).

**Formule 1.16.** *Flux (électrique) élémentaire*

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}$$

**Formule 1.17.** *Flux (électrique) fini*

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}$$

**Formule 1.18.** *Théorème de Gauss*

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

*Ou bien :*

$$\iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ avec } (S) \text{ la surface (fermée) de Gauss (passant par } M).$$

**Formule 1.19.** *Plan chargé surfaciquement*

*Si } z > 0,*

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

*Si } z < 0,*

$$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

**Formule 1.20.** *Condensateur plan*

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + V_1$$

*On aboutit à :*

$$Q = CU \quad \heartsuit \text{ avec : } C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$



## 1.5 Dipôle électrostatique

**Formule 1.21.** Moment dipolaire

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP} \text{ en C.m}$$

**Formule 1.22.** Potentiel électrostatique pour  $r \gg a = \|\overrightarrow{NP}\|$

$$V(M) = \left( \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \cdot \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ avec } a = \|\overrightarrow{NP}\|, p = \|\vec{p}\|$$

**Formule 1.23.** Champ électrostatique pour  $r \gg a$

$$\vec{E}(M) \left( \begin{array}{l} E_r(r, \theta) = \frac{2p \cdot \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta(r, \theta) = \frac{p \cdot \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{array} \right) \heartsuit \text{ avec } p = \|\vec{p}\|$$

**Formule 1.24.** Couple de moments plongé dans un champ  $\vec{E}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} \heartsuit$$

**Formule 1.25.** Energie potentielle d'interaction

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \heartsuit$$

$\triangle$  Ne pas oublier le "-"

**Formule 1.26.** Résultante dans un champ électrostatique non uniforme

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

## 2 Equations locales de l'électrostatique

**Formule 2.1.** Postulats de l'électrostatique

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Se généralise en régime non statique par :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Se généralise en régime non statique par :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

**Formule 2.2.** Laplacien du potentiel (formule de Poisson)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \heartsuit$$

$$(\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V) \left[ \Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}f) \stackrel{\text{en cartésien}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] \in \mathbb{R}$$

### 3 Magnétostatique

**Théorème 3.1.** *Théorème de Green-Ostrogradski*

$$\oint_{(S)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)\dots(S)} \text{div } \vec{a} \, d\tau \quad \heartsuit$$

**Théorème 3.2.** *Théorème de Stokes*

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)\dots(\Gamma)} \vec{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad \heartsuit$$

**NB :** On retiendra que la divergence concerne le volume ( $\iiint_{(V)\dots(S)}$ ) alors que le rotationnel concerne une surface ( $\iint_{(S)\dots(\Gamma)}$ ).

#### 3.1 Distribution de courant

**Définition 3.3.** *Différents courants électriques*

- **Courant de conduction :** Les porteurs de charge sont en mouvement par rapport au conducteur.
- **Courant de convection :** Cas où le support est en mouvement.
- **Courant particulaire :** Faisceau de particules dans le vide ( $e^-$ , proton. . .).

**Formule 3.4.** *Intensité élémentaire du courant en M à travers  $d\vec{S}$*

$$dI = \frac{\delta^{(2)}Q}{dt}$$

**Formule 3.5.** *Conservation de la charge dans le cas d'une surface (S) fermée*

$$\frac{dQ}{dt} = -I$$

**Formule 3.6.** *Courant (élémentaire)*

$$dI = \rho_m \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad \text{Avec } \rho_m \text{ la densité de charge et } \vec{v} \text{ la vitesse moyenne de déplacement des charges.}$$

**Formule 3.7.** *Vecteur densité volumique de courant*

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

donc :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \heartsuit$$

**Proposition 3.8.** *Intensité **enlacée** ( $I_{enl}$ ) par le contour ( $\Gamma$ ) orienté*

*Le flux à travers un contour ne dépend pas de la surface fermant ce contour.*

**Proposition 3.9.** *Tube de courant*

*Le "flux"  $\vec{j}$  est le même à travers toute section d'un tube de courant.*

**Formule 3.10.** *Intensité finie*

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(S)} dI \\ I &= \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \heartsuit \end{aligned}$$

### 3.2 Champ magnétostatique, circulation, théorème d'Ampère

**Formule 3.11.** Constante magnétique

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}} \text{ en } H.m^{-1}$$

**Formule 3.12.** Champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini (admis)

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta} \quad \heartsuit$$

**Formule 3.13.** Champ magnétostatique créé par une spire (admis)

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z}$$

**Formule 3.14.** Champ magnétostatique à l'intérieur d'un solénoïde infini (de longueur  $L$ )

$$\boxed{\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

avec  $n = \frac{N}{L}$  le nombre de spire par unité de longueur

**Proposition 3.15.** Comparaison des symétries [courant/champ magnétostatique]

1.  $\pi$  pour distribution de courant  $\Rightarrow \pi^*$  pour  $\vec{B}$
2.  $\pi^*$  pour distribution de courant  $\Rightarrow \pi$  pour  $\vec{B}$

**Formule 3.16.** Théorème d'Ampère

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ent}} \quad \heartsuit \heartsuit$$

**Proposition 3.17.** Conservation du flux du champ magnétostatique (admis)

$$\boxed{\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

### 3.3 Dipôle magnétostatique

**Formule 3.18.** Vecteur surface

$$\boxed{\vec{S} = \iint_{(S)} d\vec{S}} \text{ ne dépend que du contour.}$$

**Formule 3.19.** Vecteur surface d'un disque de rayon  $a$

$$\boxed{\vec{S} = \pi a^2 \vec{e}_z}$$

**Proposition 3.20.** Boucle de courant

Une ligne de courant se referme toujours sur elle même.

**Formule 3.21.** Moment magnétique ( $\neq$  du moment d'une force)

$$\boxed{\vec{M} = I \vec{S}} \quad \heartsuit$$

**Formule 3.22.** Moment magnétique d'une boucle circulaire

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2 \vec{n}} \text{ avec } \vec{n} \text{ vecteur normal.}$$

**Proposition 3.23.** Analogie [dipôle électrostatique/dipôle magnétostatique]

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E} \leftrightarrow \vec{B} \\ \vec{p} \leftrightarrow \vec{\mathcal{M}} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \\ \frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mu_0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \heartsuit \\ \heartsuit \end{array}$$

**Formule 3.24.** Champ magnétostatique créé par un dipôle magnétostatique pour  $r \gg a$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{\mathcal{M}})_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)} \left( \begin{array}{l} B_r(r, \theta) = \frac{2\mu_0 \mathcal{M} \cos(\theta)}{4\pi r^3} \\ B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin(\theta)}{4\pi r^3} \end{array} \right)} \quad \heartsuit \text{ avec } \mathcal{M} = \|\vec{\mathcal{M}}\|$$

**Formule 3.25.** Résultante subit par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique non uniforme

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}} \text{ associable à } \vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

## 4 Equations locales de la magnétostatique

**Formule 4.1.** Postulats de la magnétostatique

$$\boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0}$$

Se généralise en régime non statique par :  $\boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0}$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$$

Se généralise en régime non statique par :  $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$

**Formule 4.2.** Conservation de la charge

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -I} \text{ où } I = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En regime permanent :  $Q = C^{te} \Rightarrow I = 0 \Rightarrow \boxed{\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0}$

**Formule 4.3.** Force de Laplace

$$\boxed{\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

**Énergie potentielle d'un dipôle rigide placé dans un champ extérieur.**

$\mathcal{E}_{es} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$	$\mathcal{E}_{mag} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$
---	--

**Couple subi dans un champ extérieur.**

$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$	$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$
---	---

**Résultante des forces subies dans un champ extérieur.**

$\vec{R} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext}(O)$	$\vec{R} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext}(O)$
--	--

FIGURE 1 – Résumé de formules trouvé sur le web

## 5 Mouvement d'une particule dans un champ électrique ou magnétique uniforme et stationnaire (première année)

*On applique le PFD avec les formules suivantes...*

*On pense à intégrer, dériver, et réinjecter quand il le faut...*

*On résout les équations plan par plan, grâce à des projections vectorielles, quand c'est nécessaire...*

**Formule 5.1.** Force de coulomb

(Pour un champ  $\vec{E}$ )

$$\vec{f} = q \vec{E}$$

**Formule 5.2.** Force de Lorentz (Lorentz : appliquée à une particule)

(Pour un champ  $\vec{B}$ )

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B} + q \vec{E}$$

**Formule 5.3.** Pulsation cyclotron

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

## 6 Action d'un champ magnétique uniforme et stationnaire sur un courant - force de Laplace

### 6.1 Généralité

**Formule 6.1.** Force de Laplace (Laplace : appliquée à un conducteur) linéique

élémentaire

$$\boxed{\vec{df} = i \vec{dl} \wedge \vec{B}} \quad \heartsuit$$

**Formule 6.2.** Force de Laplace linéique intégrée dans  $\vec{B}$  uniforme

$$\boxed{\vec{f} = i \vec{MN} \wedge \vec{B}}$$

**Formule 6.3.** Circuit filiforme bouclé

$$\boxed{\vec{f} = \vec{0}} \quad \heartsuit$$

**Formule 6.4.** Couple de moment résultant

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}} \quad \heartsuit$$

## 6.2 Effet moteur d'un champ magnétique tournant

:(

### 6.3 Moteur synchrone

**Formule 6.5.** Couple de Laplace d'entraînement de la charge du moteur

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}}$$

donc :

$\boxed{\vec{\Gamma} = MB \sin[(\omega - \Omega)t + \theta_0] \vec{e}_z}$  avec  $\omega$  la vitesse de rotation du champ magnétique, et  $\Omega$  la vitesse de rotation de l'arbre du moteur.

donc :

$\boxed{\omega = \Omega}$  d'où "moteur synchrone"

**Formule 6.6.** Couple maximal (pour  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  (juste avant le décrochage))

$$\boxed{\Gamma_{max} = MB}$$

**NB :** Le moteur ne peut pas démarrer tout seul, il faut le lancer.

### 6.4 Moteur asynchrone

J'ai perdu la feuille... :-/

## 7 Induction

### 7.1 Généralité

**Théorème 7.1.** Loi de Lenz (loi de la modération)

"En réponse à une sollicitation extérieure provoquant la variation d'une grandeur

caractéristique de l'équilibre, un système évolue de manière à modérer la variation initiale."

**Formule 7.2.** Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \heartsuit \quad \triangle C'est bien e et non pas i.$$

**Théorème 7.3.** Auto-induction

$$i(t) \Rightarrow \exists B_p(t) \Rightarrow \phi_p(t)$$

**Formule 7.4.** Flux propre

$$\phi_p(i) = Li$$

On rappelle que :  $\phi = \iint_{(S)} d\phi = \iint_{(S)} \overrightarrow{B(M)} \cdot \overrightarrow{dS}$   
Avec  $L$  l'inductance propre en  $H$

**Formule 7.5.** fem d'autoinduction

$$e_p = -L \frac{di}{dt} \quad \heartsuit$$

**Formule 7.6.** Loi d'Ohm (non locale, en ARQS)

$$e = Ri$$

## 7.2 Conversion électromécanique de puissance

:(

## 7.3 Couplage par induction

**Formule 7.7.** Couplage par induction

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{12} = Mi_1 \\ \phi_{21} = Mi_2 \end{array} \right. \quad \heartsuit \quad \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \phi_{12} = \iint_{(S_2)} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{dS_2} \\ \phi_{21} = \iint_{(S_1)} \overrightarrow{B_2} \cdot \overrightarrow{dS_1} \end{array} \right.$$

NB :  $\phi_{12}$  est le flux envoyé par 1 à travers 2.

**Formule 7.8.** Couplage parfait

(toutes les lignes de champ traversant l'un des circuit traversent l'autre)

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

**Formule 7.9.** Rapport de transformation

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{avec } N_1 \text{ et } N_2 \text{ le nombre de spire dans chaque bobine.}$$

# 8 Champ gravitationnel

...exemple bidon...

## 9 Equations de Maxwell

### 9.1 Postulat

Formule 9.1. Méga postulat de la mort qui tue !!

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (MG) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (MF) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (MT) \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & (MA) \end{array} \right. \quad \heartsuit \heartsuit$$

△ Moyen mnémotechnique : GFTA

### 9.2 Formules dérivées

Puis, grâce aux théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski, qui sont les suivant...

**Théorème 9.2.** Théorème de Green-Ostrogradski

$$\boxed{\oiint_{(S)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)\dots(S)} \operatorname{div} \vec{a} \, d\tau} \quad \heartsuit$$

**Théorème 9.3.** Théorème de Stokes

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)\dots(\Gamma)} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}} \quad \heartsuit$$

...on trouve les formules suivantes :

**Théorème 9.4.** Théorème de Gauss

$$\boxed{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}} \quad \heartsuit$$

Se retrouve avec : (MG) + Green-Ostrogradski

**Théorème 9.5.** Théorème d'Ampère

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}} \quad \heartsuit$$

Se retrouve avec : (MA) + Stokes



**Théorème 9.6.** *Théorème d'Ampère généralisé*

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_{ent} + I_d) \quad \heartsuit \quad \text{avec : } \begin{cases} I_{ent} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ I_d = \iint \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases} \quad \text{respectivement le courant en-}$$

lacé et le courant de déplacement.

Se retrouve avec : (MA)+ Stokes

**Formule 9.7.** *Force de Lorentz (Lorentz : car appliquée à une particule ( $\neq$  Laplace))*

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \heartsuit$$

## 10 Conduction dans un métal - Modèle de Drude

*Pas au programme...*

**Formule 10.1.** *Loi d'ohm locale*

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \heartsuit \quad \text{Avec } \gamma \text{ la conductivité électrique du métal (en } \Omega^{-1} \cdot m^{-1} = S \cdot m^{-1})$$

**Formule 10.2.** *Loi d'ohm macroscopique*

$$U = RI \quad \heartsuit \quad \text{avec : } R = \frac{l}{\gamma S} \quad \text{pour un conducteur cylindrique de longueur } l.$$

**Formule 10.3.** *Conductivité d'un "bon conducteur"*

$$\gamma \sim 10^7 S \cdot m^{-1} \text{ à } 10^8 S \cdot m^{-1}$$

**Formule 10.4.** *Intensité finie*

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

## 11 Energie du champ électromagnétique

### 11.1 Puissance cédée à la matière

#### 11.1.1 Généralité

**Formule 11.1.** *Force de Lorentz*

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

**Formule 11.2.** *Puissance cédée par un champ électrique à une particule*

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad \text{car } \vec{f} = q \vec{E} \quad (\text{force de Coulomb})$$

**Formule 11.3.** *Puissance volumique cédée à la matière*

$$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}} \quad \heartsuit \quad \heartsuit$$

avec :  $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$  (loi d'ohm locale)

**11.1.2 Conducteur ohmique**

**Formule 11.4.** *Modèle de DRUDE : frottement fluide des électrons dans la matière*

$$\boxed{\vec{f}_f = -k \vec{v}}$$

**Formule 11.5.** *Temps de réaction des électrons lors d'une excitation*

$$\boxed{\tau \sim 10^{-14}} \quad \heartsuit \quad \text{en } s$$

**Formule 11.6.** *Puissance cédée à un conducteur ohmique à un niveau macroscopique*

$$\boxed{P = Ri^2} \quad \heartsuit$$

**11.2 Energie du champ électromagnétique**

**11.2.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique**

**Formule 11.7.** *Densité volumique d'énergie électromagnétique en M à t*

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = - \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} - \iint \vec{\pi} \cdot d\vec{S}} \iff \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = - \vec{j} \cdot \vec{E} - \text{div } \vec{\pi}}$$

avec :  $\begin{cases} \iint \vec{j} \cdot \vec{E} & \text{la puissance cédée à la matière} \\ \iint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} & \text{la puissance rayonnée à travers } (S) \end{cases}$

En volumique :  $\boxed{w = \frac{dW}{d\tau} = w_E + w_B}$  Avec :  $\begin{cases} w_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \\ w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \end{cases}$

**Formule 11.8.** *Vecteur de Poynting*

$$\boxed{dP = \vec{\pi}(M, t) \cdot d\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad \text{pour une OPPM} \quad \heartsuit \quad \Delta \mu_0$$

**Proposition 11.9.** *Analogie [charge/énergie]*

$$\begin{array}{l} \vec{j} \hookrightarrow \vec{\pi} \\ di = \vec{j} \cdot d\vec{S} \hookrightarrow dP = \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \\ \rho \hookrightarrow w \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{j} \hookrightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \text{div } \vec{\pi} \\ Q \hookrightarrow W \\ \frac{dQ}{dt} = -\iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \hookrightarrow \frac{dW}{d\tau} = -\iiint \vec{j} \cdot \vec{E} - \iint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \end{array}$$

### 11.2.2 Energie électrocinétique

**Formule 11.10.** *Energie contenue dans un condensateur*

$$W_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

**Formule 11.11.** *Energie contenue dans une inductance*

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2$$

## 12 Propagation et rayonnement

### 12.1 Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant

#### 12.1.1 Généralité

**Formule 12.1.** *Célérité de la lumière dans le vide*

$$c = 3.10^8 \text{ en } m.s^{-1} \quad \heartsuit$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

**Théorème 12.2.** *Equation de propagation*

A partir des équations de (MA) et (MT), et de :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

on arrive à :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \heartsuit$$

On fait de même pour  $\vec{B}$  en utilisant (MT) et (MF), et on trouve :

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \heartsuit$$

**Formule 12.3.** *Equation de d'ALEMBERT*

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \heartsuit$$

#### Onde plane

**Formule 12.4.** *Solution de l'onde plane*

$$F(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

**Formule 12.5.** Structure de l'onde plane progressive

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{E_x = 0} \quad \boxed{B_x = 0} \\ \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}} \quad \Delta c \\ \boxed{(\vec{e}_x, \vec{E}, \vec{B}) \text{ direct}} \quad \text{Onde se propageant en direction des } x \text{ croissants.} \\ \boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}} \end{array} \right.$$

**Formule 12.6.** Conséquences des équations de Maxwell pour une OPPM dans un plasma

Pour une OPPM de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

avec :  $\vec{k} = k \vec{n}$

(MG)  $\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \vec{k}}$

(MT)  $\Rightarrow \boxed{\vec{B} \perp \vec{k}}$

(MF)  $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}} \quad \Delta \omega$

**Formule 12.7.** Densité volumique d'énergie électromagnétique

$$w_E = w_B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \epsilon_0 E^2 \\ w = \frac{B^2}{\mu_0} \end{array} \right.$$

**Formule 12.8.** Vecteur de poynting pour une onde plane

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad \heartsuit \quad \Delta \mu_0$$

donc :

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E})}{\mu_0 c}} \quad \Delta \mu_0 c$$

donc :

$$\boxed{\vec{\pi} = w \vec{c}} \quad \heartsuit \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \vec{c} = c \vec{e}_x \\ w = \epsilon_0 E^2 \end{array} \quad \text{car} \quad \boxed{\frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c} \quad \heartsuit$$

**Formule 12.9.** Double produit vectoriel

$$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}} \quad \heartsuit$$

### 12.1.2 Onde plane progressive monochromatique

**Définition 12.10.** Onde monochromatique

Une onde est monochromatique lorsque les composantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x, t) = F_0 \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) - \phi_0) \\ = F_0 \cos(\omega t - kx - \phi_0) \end{array}} \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \quad \heartsuit \quad \text{le module d'onde}$$

**Formule 12.11.** Période temporelle

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Formule 12.12.** Période spatiale

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \heartsuit$$

**Formule 12.13.** Lien entre  $\lambda$  et  $T$

$$\lambda = cT \quad \heartsuit$$

NB :  $f = \frac{1}{T} \quad \lambda = \frac{c}{f}$

**Représentation complexe**

On a la fonction d'onde suivante :

$$\underline{F}(M, t) = \underline{F}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur d'onde.}$$

**Proposition 12.14.** Dérivation spatiale des composantes de la fonction d'onde avec les complexes

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow -ik_x \times \dots \\ \frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow -ik_y \times \dots \\ \frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -ik_z \times \dots \end{array}$$

**Proposition 12.15.** gradient de la fonction d'onde avec les complexes

$$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{F}(M, t) = \vec{\nabla} \underline{F}(M, t) = \begin{pmatrix} -ik_x \\ -ik_y \\ -ik_z \end{pmatrix} \times \underline{F}(M, t) \quad \heartsuit$$

**Proposition 12.16.** Dérivation temporelle des composantes de la fonction d'onde avec les complexes

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega \times \dots$$

**Proposition 12.17.** Divergence de la fonction d'onde avec les complexes

$$\text{div} = \vec{\nabla} \bullet \leftrightarrow -i \vec{k} \bullet \quad \heartsuit$$

**Proposition 12.18.** Laplacien de la fonction d'onde avec les complexes

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 \leftrightarrow -k^2 \times \dots \quad \heartsuit$$

**Proposition 12.19.** Rotationnel de la fonction d'onde avec les complexes

$$\overrightarrow{\text{rot}} = \vec{\nabla} \wedge \leftrightarrow -i \vec{k} \wedge \quad \heartsuit$$

**Polarisation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM)**

**Théorème 12.20.** *Types de polarisation*

- **Polarisation elliptique** : L'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit une ellipse dans le plan de propagation de l'onde.
- **Polarisation rectiligne** : L'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit un segment dans le plan de propagation de l'onde.

**Formule 12.21.** *Loi de MALUS*

Pour un polarisateur et un analyseur désaxés de  $\alpha$ , on a :

$$I_2 = I_1 \cos^2(\alpha) \quad \heartsuit \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_1 = \langle \pi_1 \rangle = \epsilon_0 C \langle E_1^2 \rangle \\ I_2 = \langle \pi_2 \rangle = \epsilon_0 C \langle E_2^2 \rangle \end{cases}$$

$\triangleleft$  Le cosinus est au carré.

**Proposition 12.22.** *Ordre de grandeur des ondes électromagnétiques*

$$\boxed{\text{Radio} \rightarrow \text{Television} \rightarrow \text{Radar} \rightarrow \text{IR} \rightarrow \text{Visible} \rightarrow \text{UV} \rightarrow \text{X} \rightarrow \gamma}$$

**12.2 Propagation d'une onde électromagnétique plane dans un plasma**

**12.2.1 Conduction dans un plasma**

**Formule 12.23.** *Neutralité du plasma*

$$\boxed{\rho = 0} \quad \heartsuit$$

**Proposition 12.24.** *Le plasma est peu dense*

1. Pas d'interaction.
2. Pas de force de frottement fluide.

**Formule 12.25.** *Etude non relativiste des charges dans le plasma*

Si  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$  (car OPP(M)) alors  $\|\vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$  et donc la force de Laplace ( $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ) est négligeable devant la force de coulomb ( $q\vec{E}$ ).

**Proposition 12.26.** *Les ions dans le plasma*

Les ions sont considérés comme immobiles lorsqu'on considère un régime sinusoïdale forcé ( $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \bullet \vec{r}))$ ) dans le plasma, car leur masse est bien plus grande que celle des électrons.

**Formule 12.27.** *Conductivité complexe du plasma*

$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{-ine^2}{m\omega}}$  que l'on trouve en connaissant  $\vec{v}$  grâce au PFD en régime sinusoïdale forcé (on ne considère que la force de Coulomb) que l'on injecte dans :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

pour trouver  $\vec{j}$  de la forme :

$$\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$$

pour identifier  $\underline{\gamma}$ .

12.2.2 Propagation d'une OPPM dans un plasma

**Proposition 12.28.** Principe de recherche de la relation de dispersion

1. On cherche l'équation de propagation avec (MF) :  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$  en composant par  $\overrightarrow{\text{rot}}$
2. Puis on injecte  $\overrightarrow{E}(M, t) = \overrightarrow{E}_0 \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}))$  dans l'équation que l'on a déterminé.
3. On utilise  $\overrightarrow{j} = \underline{\gamma} \overrightarrow{E}$  puis on simplifie par  $\overrightarrow{E}$ . NB :  $\underline{\gamma} = \frac{-ine^2}{m\omega}$
4. On extrait  $k^2$  en mettant  $C^2$  comme dénominateur commun.
5. On exprime finalement  $k$  avec  $\omega_p$  :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{C^2}$  avec  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

**NB :** Dans le vide,  $\omega_p = 0$  car  $n = 0$  ; on retrouve  $k = \frac{\omega}{C}$

**Proposition 12.29.** Différents cas du plasma en fonction de la pulsation

1. Si  $\omega > \omega_p$ , on a propagation de l'onde dans le plasma. A très haute fréquence, le plasma assimilé au vide (on parle de "transparence" du plasma à haute fréquence).
2. Si  $\omega < \omega_p$ , on a une onde stationnaire évanescente : découplage du temps et de l'espace ;  $\overrightarrow{E}$  et  $\overrightarrow{B}$  sont en quadrature.

**Formule 12.30.** Exemple de la Ionosphère (altitude : 60km → 300km)

Densité particulaire :  $n_0 = 10^{12} m^{-3}$

Fréquence de coupure :  $f_p = 9 MHz$  ( $f_p$  provient de  $\omega_p$ )

12.2.3 Dispersion

**Formule 12.31.** Vitesse de phase

$v_\phi = \frac{\omega}{k}$  (pour une onde progressive monochromatique)

$v_\phi = \frac{C}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$  (pour une onde progressive monochromatique dans un plasma ( $\omega > \omega_p$ ))

Si  $k = \frac{\omega}{C}$ , alors  $v_\phi = C$

Donc : des OPPM de différentes fréquences se propagent toutes à la même vitesse de phase.

**Formule 12.32.** Vitesse de groupe

$v_g = \frac{d\omega}{dk} \leq C$

$v_g = C \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$  (pour le cas du plasma)

— **Dispersif** :  $v_\phi$  dépend de  $\omega$ .

12.3 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique –  
Réflexion sur un conducteur parfait 12 PROPAGATION ET RAYONNEMENT

– **Non dispersif** :  $v_\phi$  ne dépend pas de  $\omega$ .

**Formule 12.33.** Divers...

$$\boxed{\Delta\omega\Delta t = 1} \text{ NPC : } \Delta x\Delta p_x \geq \hbar \text{ (Inégalité de Heisenberg)}$$

$$\boxed{\Delta k\Delta x = 1}$$

$$\boxed{v_\phi v_g = c^2}$$

## 12.3 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique – Réflexion sur un conducteur parfait

### 12.3.1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique

**Proposition 12.34.** Condition de validité de la lois d'ohm locale en RSF

$$\boxed{f \ll 10^{14} \text{ Hz}} \heartsuit$$

**Proposition 12.35.** Conditions d'approximation de l'effet de peau

♡♡♡♡♡

- $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ) (Loi d'ohm locale)
- $\rho = 0$
- $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx 0$

**Formule 12.36.** Distance caractéristique de l'effet de peau

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

On le retrouve grâce à :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -k^2 \vec{E} - \mu_0 \gamma i \omega \vec{E} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k^2 = -i \mu_0 \gamma \omega$$

$$\text{or : } -i = \frac{(1-i)^2}{2} \heartsuit$$

donc :

$$k^2 = \frac{(1-i)^2}{2} \mu_0 \gamma \omega$$

En posant :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ , on obtient :

$$\boxed{k = \pm \frac{1-i}{\delta}}$$

puis en posant :  $k = k' - ik''$

on teste les signes possibles en fonction de la faisabilité de l'onde  $\overrightarrow{E(M,t)} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$

on trouve que  $\boxed{k' = k'' = \frac{1}{\delta}}$



$$\Rightarrow \overrightarrow{E}(M, t) = E_0 e^{-k''z} \exp(i(\omega t - k'z)) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E}(M, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) \vec{e}_x$$

**Formule 12.37.** *Ordre de grandeur de  $\delta$*

$f$	$\lambda$	$\delta$
50Hz	6000 km	$\approx$ cm
500kHz	600 m	0,1 mm
1GHz	30 cm	0,2 $\mu$ m
10THz	30 $\mu$ m	20 nm

### 12.3.2 Réflexion sur un conducteur parfait – Onde stationnaire

**Définition 12.38.** *Conducteur parfait*

Un conducteur parfait admet :  $\boxed{\gamma = \infty}$

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}, \rho$  et  $\vec{j}$  sont nuls partout dans la matière.

**Formule 12.39.** *Puissance volumique cédée à la matière*

$$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}} \text{ avec : } \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$$

**Formule 12.40.** *Conditions aux limites pour un conducteur parfait (non exigible)*

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{n}_{12} \end{aligned}}$$

Avec  $\vec{n}_{12}$  orienté de la surface 1 vers la surface 2.

**Proposition 12.41.** *Noeuds et ventres*

- Les noeuds sont séparés de  $\frac{\lambda}{2}$ .
- Les ventres sont séparés de  $\frac{\lambda}{2}$ .
- Les noeuds et les ventres sont séparés de  $\frac{\lambda}{4}$ .

**Proposition 12.42.** *Cavité résonnante*

Soit  $a$  la longueur de la cavité.

- La longueur des ondes qui peuvent s'installer sont dans  $\{\frac{2a}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ .
- La longueur  $a$  de la cavité est donc un multiple de  $\frac{\lambda}{2}$

**Formule 12.43.** *Pression de radiation*

$$\boxed{\langle p \rangle = \epsilon_0 E_0^2} \heartsuit \text{ ou (non exigible) : } \boxed{p = \frac{\mu_0 j_s^2}{2}}$$

## 12.4 Dipôle oscillant

**Proposition 12.44.** *Les approximations du dipôle oscillant*

1. Approximation dipolaire : amplitude  $a_0$  des oscillations de la charge mobile "faible".

2. Approximation de la mécanique classique :  $|v(t)| \ll C \Rightarrow a_0 \ll \lambda$ .

3. Champ lointain :  $r \gg \lambda$

D'où  $a_0 \ll \lambda \ll r$

**Formule 12.45.** Champs du dipôle oscillant

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{C}) \overrightarrow{e}_\theta \\ \overrightarrow{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi C} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{C}) \overrightarrow{e}_\theta \end{cases} \text{ avec } \theta \text{ l'angle entre l'axe reliant les charges, et}$$

l'axe reliant le point  $M$  à la charge fixe.

$\triangle$  localement, la relation de l'onde plane est respecté ; mais l'onde n'est pas plane !!

**Formule 12.46.** Puissance totale rayonnée par un dipôle oscillant à la pulsation  $\omega$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi C}$$

**Formule 12.47.** Puissance totale rayonnée par un dipôle "accélééré" (puissance de LARMOR)

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi C} q^2 \langle \gamma^2 \rangle \text{ avec } \gamma \text{ l'accélération}$$

**Proposition 12.48.** Diffusion de RAYLEIGH

Exemple : ciel bleu : la puissance diffusée dans le bleu est 16 fois plus grande que celle diffusée dans le rouge.

RAYLEIGH : faible fréquence.

THOMSON : haute fréquence.

## 13 Optique géométrique

### 13.1 Bases de l'optique géométrique

**Formule 13.1.** Diffraction

Soit  $D$  la largeur de l'ouverture.

Seulement lorsque  $D \approx \lambda$

$$\theta = \frac{\lambda}{D} \text{ avec } \theta \text{ le demi-angle d'ouverture de diffraction.}$$

**Formule 13.2.** Lois de Snell-Descartes

#### 1. Loi de la réflexion

(a) Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.

(b)  $i'_1 = i_1$  Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale au dioptre.

#### 2. Loi de la réfraction

(a) Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.

$$(b) \quad \boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$$

**Proposition 13.3.** *Réflexion totale*

*On sait tous ce que ça veut dire...*

**Proposition 13.4.** *Gradient d'indice*

*Le gradient d'indice est un vecteur orienté des bas indices vers les hauts indices.*

*Le rayon a tendance à se courber dans le sens du gradient d'indice.*

**Exemple 13.5.** *Différents exemples d'utilisation du gradient d'indice*

- Prisme
- Fibre optique
- Coucher de soleil
- Mirage

## 13.2 Objet image, stigmatisme, aplanétisme, système centré dans les conditions de Gauss

**Proposition 13.6.** *L'oeil*

- *Ponctum proximum* :  $\approx 20\text{cm}$
- *Ponctum remotum* :  $\approx +\infty$

**Définition 13.7.** *Stigmatisme*

*Pour un couple de point  $A$  et  $A'$ ,*

*tout rayon lumineux qui passe par  $A$  passera par  $A'$ .*

*On dit que  $A$  et  $A'$  sont conjugués par rapport au système optique.*

*La relation entre les positions de  $A$  et  $A'$  est appelée relation de conjugaison.*

**Exemple 13.8.** *Ellipse*

*Si l'ellipse est un miroir intérieur (respectivement extérieur), tout rayon (respectivement prolongation de rayon) qui passe par un foyer, passera par l'autre.*

**Définition 13.9.** *Aplanétisme*

*Un système optique stigmatique est dit aplanétique lorsqu'un objet  $AB$  plan et perpendiculaire à l'axe optique donne une image  $A'B'$  plane et perpendiculaire à l'axe optique.*

*NB : le miroir plan est le seul système "rigoureusement" aplanétique.*

**Définition 13.10.** *Système centré et axe optique*

*C'est lorsque le système présente un axe de symétrie de révolution : l'axe optique.*

*NB : un rayon cheminant le long de l'axe optique ne sera pas dévié.*

**Définition 13.11.** *Condition d'approximation des conditions de Gauss*

*Les rayons sont paraxiaux :*

- Peu inclinés par rapport à l'axe optique
- Peu écartés par rapport à l'axe optique.

**Proposition 13.12.** Conditions de Gauss

Un système vérifiant les conditions de Gauss sera stigmatique et aplanétique.

**Définition 13.13.** Grandissement transversal

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{A'B'}{AB} \\ &= \frac{OA'}{OA} \\ &= -\frac{f}{FA} \\ &= -\frac{F'A'}{f'} \end{aligned}$$

♡

NB : Couple de plans conjugué tels que  $\gamma = 1$  : "plan principaux".

## 13.3 Lentilles minces sphériques

**Définition 13.14.** Lentille sphérique mince

- **Lentille** : Deux dioptries.
- **Sphérique** : Dioptries sphériques (en verre) d'indice  $n_i > 1$ .
- **Mince** : Epaisseur  $e = S_1S_2 \ll C_1S_1, C_2S_2, C_1C_2$

**Formule 13.15.** Vergence

$$V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \quad \heartsuit$$

**Formule 13.16.** Formule de Descartes

$$-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} \quad \heartsuit \quad (- \text{ puis } + \text{ avec image à droite})$$

**Formule 13.17.** Formule de Newton

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = -f^2 \quad \heartsuit$$

## 14 Interférences

### 14.1 Généralité sur les interférences

#### 14.1.1 Emission et réception de lumière

**Formule 14.1.** Relation entre largeur spectrale et temps de cohérence

$$\Delta\nu\Delta t \approx 1 \quad \text{NPC : } \Delta x\Delta p_x \geq \hbar \text{ (Inégalité de Heisenberg) et } \Delta\omega\Delta t = 1 \text{ et } \Delta k\Delta x = 1$$

**Exemple 14.2.** *Lampe à filament*

Agitation thermique  $\Rightarrow$  accélération des charges  $\Rightarrow$  rayonnement dipolaire, thermique, du corps noir.

Le spectre est continue

**Exemple 14.3.** *Lampe spectrale*

Rappel :  $E = h\nu$

Une raie n'est jamais rigoureusement monochromatique.

Durée du train d'onde pour  $\lambda \approx 0,6\mu\text{m}$  :

$$\Delta t = \tau = 10^{-12} \rightarrow 10^{-11} \text{ en s}$$

**Exemple 14.4.** *Laser*

Lumière  $\approx$  monochromatique.

Durée du train d'onde pour  $\lambda \approx ???$  :

$$\Delta t = \tau = 10^{-8} \text{ en s}$$

**Constante 14.5.** *Récepteurs*

Persistance rétinienne :	période des messages nerveux :	$0,1\text{s}$
Photodiode :	temps de réponse :	$10^{-5}\text{s}$
Capteur CCD :	plusieurs petites photodiodes.	

NB : Les abeilles sont sensibles à la polarisation de la lumière.

**Définition 14.6.** *Intensité lumineuse*

$I = \langle E^2 \rangle$   $\heartsuit$  Les détecteurs sont sensibles à la valeur moyenne du champ électrique.

**14.1.2 Superposition de deux ondes monochromatiques polarisées rectilignement****Définition 14.7.** *Intensité lumineuse*

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle \heartsuit$$

**Formule 14.8.** *Formule de l'interférence*

Avec :  $E_i(M, t) = a_i \vec{e}_i \cos(\phi_i(M) - \omega t)$

$$\text{Et : } I_i = \frac{a_i^2}{2}$$

On a :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2(M) - \phi_1(M))$$

NB :  $\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 \heartsuit$

Et lorsque  $I_1 = I_2$  :

$$\begin{aligned} I &= 2I_0(1 + \cos(\phi(M))) \\ &= 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0})) \heartsuit \heartsuit \text{ (car } \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)) \end{aligned}$$

**Proposition 14.9.** *Aléa des trains d'ondes*

*L'amplitude, la phase, la direction de propagation du champ émis par un atome varie de façon aléatoire d'un atome à l'autre et d'un train d'onde à l'autre.*

*Deux sources physiquement différentes  $\Rightarrow I = I_1 + I_2$*

**Proposition 14.10.** *Condition d'interférence*

*Il faut que les trains d'ondes qui se superposent proviennent d'un même train d'onde d'un même atome d'une même source donnée. (cohérence)*

**Proposition 14.11.** *Types de systèmes d'interférence*

- *Division du front d'onde* : l'onde est séparée géométriquement.
- *Division d'amplitude* : un même rayon est séparé par exemple grâce à une lame semi-réfléchissante.

**14.1.3 Evaluation d'un déphasage****Définition 14.12.** *Chemin optique*

*(AB) : distance que parcourrait la lumière dans le vide pendant le même temps.*

$$(AB) = \int_A^B n(M) dl$$

*Milieu homogène :  $(AB) = n \cdot AB$*

**Définition 14.13.** *Indice optique (réfringence)*

$$n(M) = \frac{c}{v(M)}$$

**Définition 14.14.** *Longueur d'onde dans un milieu*

$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$  avec  $\lambda_0 = cT$  la longueur d'onde dans le vide.

**Formule 14.15.** *Déphasage*

$$\phi(M) - \phi(S) = \frac{2\pi}{\lambda}(SM)$$

**Définition 14.16.** *Surface d'onde (surface équiphasse)*

$$\{M / (SM) = C^{te}\}$$

**Théorème 14.17.** *Malus*

*"Après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle sont perpendiculaires aux surfaces d'onde."*

**Exemple 14.18.** *Point conjugués par une lentille*

*Le chemin optique est indépendant du rayon allant de A à A'.*

### 14.1.4 Figures d'interférences

**Définition 14.19.** Différence de marche en un point  $M$  distant d'une source  $S$

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 \quad \heartsuit$$

Et en posant :  $\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M)$

On a :

$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \quad \heartsuit \heartsuit$$

**Définition 14.20.** Ordre d'interférence

$$p = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0} \quad \heartsuit$$

Donc, entre deux franges consécutives de même nature :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \pm 1 \\ \iff \Delta \phi &= \pm 2\pi \\ \iff \Delta \delta &= \pm \lambda_0 \end{aligned}$$

**Définition 14.21.** Contraste

$$\Gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

On trouve :

$$I = (I_1 + I_2)[1 + \Gamma \cos(\phi(M))]$$

Et lorsque  $I_1 = I_2$  :

$$\begin{aligned} I &= 2I_0(1 + \cos(\phi(M))) \\ &= 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0})) \end{aligned} \quad \heartsuit$$

## 14.2 Interférences par division du front d'onde, trous d'Young

### 14.2.1 Trous d'Young

Deux trous circulaire de  $r \approx 0,1\text{mm}$  de diamètre séparés de  $a \approx 1\text{mm}$  se trouvant à une distance  $D \approx 1\text{m}$  de l'écran.

Comme  $r \approx \lambda$ , en reprenant la formule de la diffraction, on a le demi angle d'ouverture de chaque trou :  $\theta = \frac{\lambda}{r}$

#### Etude qualitative

Comme  $I = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}))$ , on a :

$$\begin{aligned} I(M) &= C^{te} \\ \iff \delta(M) &= C^{te} \\ \iff (SM)_2 - (SM)_1 &= C^{te} \\ \iff T_2M - T_1M &= C^{te} \end{aligned}$$

Donc  $M$  appartient à l'hyperboloïde de foyer  $T_2$  et  $T_1$  de révolution autour de l'axe  $(T_1T_2)$ .

**Etude quantitative**

On a :  $I = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}))$

On cherche  $\delta(M)$ ,

donc on cherche  $T_2M - T_1M$ .

Après pythagore et un développement limité d'ordre 2, on trouve :

$$T_1M = D[1 + \frac{1}{2D^2}(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - ax)]$$

Et en remplaçant  $a$  par  $-a$ , on trouve :

$$T_2M = D[1 + \frac{1}{2D^2}(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} + ax)]$$

$$D'où : \delta(M) = \frac{ax}{D} \heartsuit$$

$$\text{Donc : } I = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}))$$

Puis, pour trouver l'interfrange  $i$ , on pose :  $\Delta p = 1$ .

Donc :  $\Delta\delta = \lambda_0$ , alors que  $\Delta x = i$ .

D'où, en reprenant  $\delta(M) = \frac{ax}{D}$ , on a :  $\lambda_0 = \frac{ai}{D}$

$$D'où : i = \frac{\lambda_0 D}{a} \heartsuit$$

**Application numérique**

$$\begin{cases} a = 1\text{mm} \\ D = 1\text{m} \\ \lambda_0 = 589\text{nm} \end{cases} \Rightarrow i = 0,59\text{mm}$$

**14.3 Cohérence spatiale****Proposition 14.22.** Point source en dehors de l'axe

Lorsque la source est à une distance  $d$  des trous d'Young, et les trous à une distance  $D$  de l'écran, la différence de marche pour une source  $S$  en dors de l'axe est :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} + \frac{ax}{d} \heartsuit$$

En utilisant  $I = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}))$  on peut donc dire que la tache centrale est située

en  $x = -\frac{XD}{d}$  avec  $X$  l'ordonnée de la source  $S$ .

**Formule 14.23.** Visibilité et intensité pour une source carrée

Pour une source carrée de côté  $h$  distante de  $d$  des trous d'Young écarté de  $a$ .

$$\mathcal{V} = \text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u} \text{ avec } u = \frac{\pi ah}{\lambda_0 d}$$

Se retrouve en intégrant des sources ponctuelles sur la surface de la source carrée.

On prendra :  $dI_{\text{emise}} = \frac{I_0}{h^2} ds$

On obtiendra la forme :  $I = 2I_0[1 + \mathcal{V}\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D})]$

**Formule 14.24.** Longueur de cohérence

Dans les mêmes conditions.

$$l_c = \frac{\lambda_0 d}{a}$$



On retiendra que l'utilisation de source étendues brouille les figures d'interférence.

**Formule 14.25.** Critère semi-quantitatif de non-brouillage spatial

$$\boxed{|P_S(M) - P_{S_0}(M)| = |\Delta P(M)| < \frac{1}{2}} \text{ avec : } \begin{cases} S_0 \text{ le centre de la source} \\ S \text{ au bord de la source} \end{cases}$$

## 14.4 Cohérence temporelle

C'est pas le truc le plus passionnant au monde ; je passe, et je vais me coucher.

**Formule 14.26.** Relation entre largeur spectrale et temps de cohérence

$$\boxed{\Delta\nu\Delta t \approx 1} \text{ avec : } \Delta t \text{ l'incertitude temporelle pour un train d'onde.}$$

NB :  $\Delta\nu$  sera mesuré à mi hauteur pour un profil gaussien.

**Proposition 14.27.** Brouillage temporel

Il y a brouillage temporel si les différentes figures d'interférence dues aux différentes longueurs d'onde se superposent.

**Formule 14.28.** Ordre d'interférence pour un source non monochromatique

$$\boxed{p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta\nu}{c}} \text{ En effet : } \lambda = \frac{c}{\nu}$$

NB :  $p = \frac{ax\nu}{Dc}$  pour  $\delta = \frac{ax\nu}{Dc}$  pour les trous d'Young.

Donc  $p$  dépend de  $\nu$ .

Donc les figure d'interférence sont continuellement décalées les unes par rapport aux autres.

Or incohérence.

Donc superposition.

Donc brouillage.

**Formule 14.29.** Intensité lors d'un brouillage temporelle

$$\text{On a : } \boxed{dI = 2dI_{emise}(1 + \cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda}))}$$

$$\text{Avec : } \boxed{dI_{emise} = i_0 d\nu}$$

$$\text{Et : } \boxed{i_0 = \frac{I_0}{\Delta\nu}}$$

$$\text{Et : } \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

$$\text{Et : } \boxed{\lambda = \frac{c}{\nu}}$$

Donc :

$$\boxed{dI = 2\frac{I_0}{\Delta\nu}[1 + \cos(\frac{2\pi\delta\nu}{c})]}$$

Et comme les sources sont incohérentes, en intégrant de  $\nu_1$  à  $\nu_2$  avec  $\nu_2 - \nu_1 = \Delta\nu$  et  $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ , on obtient :

$$\boxed{I = 2I_0[1 + \text{sinc}(\mathcal{V})\cos(\frac{2\pi\delta\nu_0}{c})]} \text{ avec : } \boxed{\mathcal{V} = \frac{2\pi\delta\Delta\nu}{c}}$$

Donc on observe des battements.

**Formule 14.30.** Critère semi-quantitatif de non-brouillage temporel

On doit avoir :

$$\Delta p = p_{\nu_2}(M) - p_{\nu_1}(M) < \frac{1}{2} \quad \text{avec } p_{\nu}(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{\nu\delta(M)}{c}$$

## 14.5 Interférences par division d'amplitude

### 14.5.1 Interféromètre de Michelson

**Proposition 14.31.** Vocabulaire

1. Séparatrice.
2. Compensatrice.
3. Chariotage.
4. Bras de l'interféromètre.
5. Miroir fictif symétrique.
6. lame d'air.
7. Contact optique.
8. Coin d'air.
9. Anneaux d'égal inclinaison.
10. Réglage porte.
11. Réglage trappe.
12. Teinte plate.

**Réglage en lame d'air** Les interférences se font à l'infini ; il faut une lentille pour faire correctement converger les figures d'interférence sur un écran.

**Formule 14.32.** Distance entre les points symétriques de la source par rapport aux miroirs

$$S_1 S_2 = 2e \quad \text{Avec } e \text{ la distance entre les deux miroirs.}$$

**Formule 14.33.** Déphasage en lame d'air

$\delta = 2e \cos(i)$  avec  $i$  l'angle d'incidence (avec les miroirs) du rayon provenant de la source ponctuelle.

**Proposition 14.34.** Longueur de cohérence en lame d'air

En configuration lame d'air, la longueur de cohérence est infinie : on peut prendre une source aussi étendue que l'on veut.

**Formule 14.35.** Rayon du  $(k)$ -ième anneau noir avec centre noir

$$R_k = f' \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}$$

On le retrouve avec :

L'ordre d'interférence au centre (noir) est maximal :

$$p_0$$

Donc l'ordre d'interférence du (k)-ième anneau noir est :

$$p_0 - k$$

Donc le déphasage lié au (k)-ième anneau noir est :

$$\delta_k = (p_0 - k)\lambda$$

$$\text{(car } \delta = p\lambda \text{ car } p = \frac{\delta}{\lambda}\text{)}.$$

Or : le déphasage du (k)-ième anneau noir est :

$$\delta_k = 2e \cos(i_k)$$

avec  $i_k$  l'incidence liée au (k)-ième anneau noir.

$$\text{Donc : } \boxed{2e \cos(i_k) = (p_0 - k)\lambda} \quad (1)$$

De plus,  $2e$  correspond au déphasage maximal, donc :  $\boxed{2e = p_0\lambda}$  (2)

Sachant que l'on a  $1 - \cos(i_k) \approx \frac{i_k^2}{2}$  d'après les développements limités, avec (1) et (2), on a :

$$\boxed{i_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}}$$

D'où :

$$\boxed{R_k = f' \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}}$$

**Réglage en coin d'air** Les figures d'interférence sont localisées à la surface des miroirs, donc il faut utiliser le stigmatisme d'une lentille convergente pour projeter les figures sur un écran.

**Proposition 14.36.** L'angle entre les miroirs est suffisamment petit

On admet que l'angle entre les miroirs est suffisamment petit pour que les deux rayons réfléchis chacun sur un miroir ressortent parallèles entre eux.

**Formule 14.37.** Interfrange en coin d'air

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha}}$$

On le retrouve avec :

On détermine, d'après la propriété précédente, que :  $\boxed{\delta = 2\alpha x}$  avec  $x$  l'abscisse du point considéré à la surface du miroir ( $x = 0$  étant l'intersection des deux miroirs).

Puis en posant :  $\begin{cases} \Delta x = i \\ \Delta \delta = \lambda \end{cases}$ , on a immédiatement le résultat :  $\boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha}}$

## 14.6 Interférences à N ondes : réseau

### 14.6.1 Réseau

Chaque fente du réseau va diffracter la lumière ; ces différentes diffractions formant des rayonnements cohérents, il va y avoir interférence.

On s'intéresse ici aux interférences à l'infini (écran très loins ou dans le plan focal d'une lentille convergente).

**Définition 14.38.** Plusieurs types de réseaux

1. Réseaux par transmission.
2. Réseaux par réflexion.

**Définition 14.39.** Pas a du réseau

Le pas a du réseau est la distance entre deux fentes (on l'appelle aussi "période spatiale").

**Définition 14.40.** Dimension caractéristique d des motifs du réseau

La dimension caractéristique d des motifs du réseau est la largeur de chaque fentes.

On a en pratique :  $d \approx \lambda$

Généralement :  $a \gtrsim 5d$

**Formule 14.41.** Angle de déviation  $\theta_p$  des taches

$$\boxed{\sin(\theta_p) = p \frac{\lambda}{a}} \text{ avec } p \text{ l'ordre de la direction d'observation.}$$

## 14.6.2 Interférences à N ondes

**Formule 14.42.** ???

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \Re(AA^*)}$$

**Formule 14.43.** Intensité résultante d'une interférence à deux ondes de même intensité  $I_0 = \frac{a_i^2}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= 2I_0(1 + \cos(\phi(M))) \\ &= 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0})) \end{aligned}} \heartsuit \heartsuit \text{ (car } \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M))$$

Avec :  $E_i(M, t) = a_i \vec{e}_i \cos(\phi_i(M) - \omega t)$

**Formule 14.44.** Intensité résultante d'une interférence à trois ondes de même intensité  $I_0 = \frac{a_i^2}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= 4I_0(1 + \cos(\phi(M)))^2 \\ &= 4I_0(1 + \cos(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}))^2 \end{aligned}} \text{ (car } \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M))$$

Avec :  $E_i(M, t) = a_i \vec{e}_i \cos(\phi_i(M) - \omega t)$

**Formule 14.45.** Intensité résultante d'une interférence à N ondes de même intensité  $I_0 = \frac{a_i^2}{2}$

$$\boxed{I(\phi) = I_0 \frac{\sin^2(N \frac{\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})}}$$

Avec :  $E_i(M, t) = a_i \vec{e}_i \cos(\phi_i(M) - \omega t)$

**Formule 14.46.** *Maximum principal*

$$\boxed{I(0) = N^2 I_0} \quad \heartsuit$$

$$\text{Car : } I(\phi) \sim I_0 \frac{(N \frac{\phi}{2})^2}{(\frac{\phi}{2})^2} = N^2 I_0$$

$$\text{Car : } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

**Formule 14.47.** *Largeur totale du pic principal*

$$\boxed{\frac{4\pi}{n}}$$

Se retrouve avec :

$$\text{Première annulation de } I(\phi) \text{ lorsque : } N \frac{\phi}{2} = \pi$$

$$\text{Càd, lorsque : } \phi = \frac{2\pi}{N}$$

D'où le résultat.

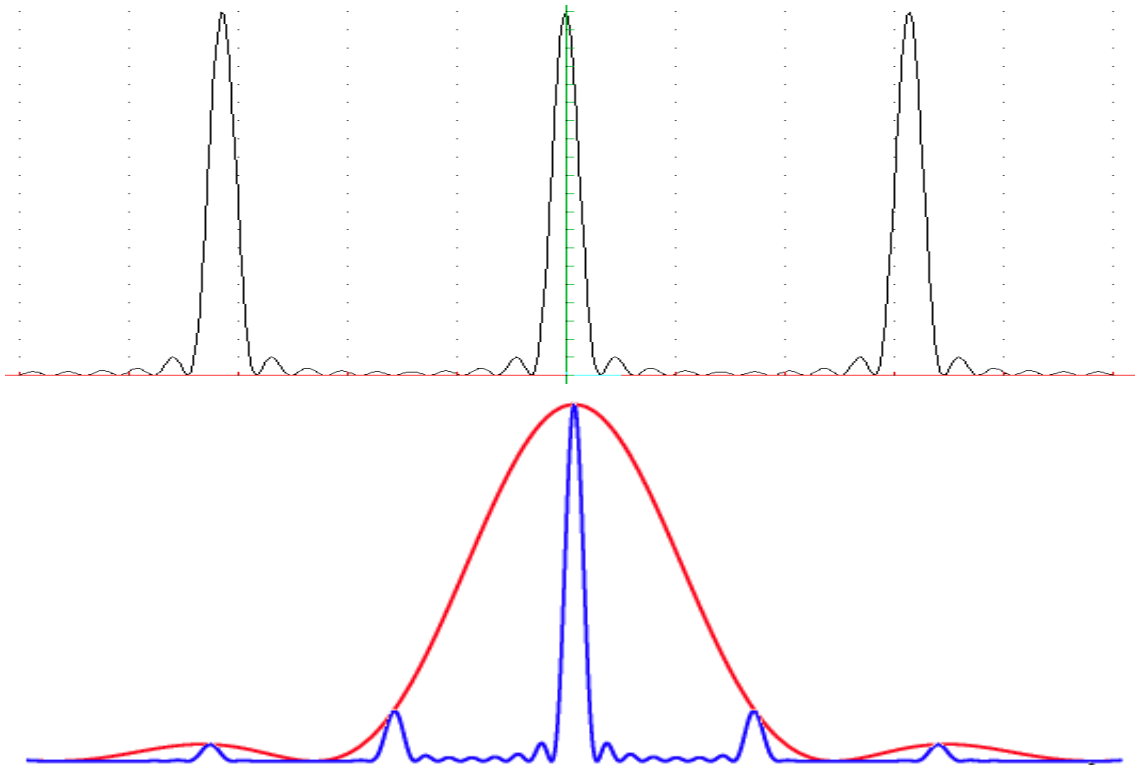


FIGURE 2 – Intensité théorique/pratique

### 14.6.3 Formule des réseaux

*Maximum d'intensité*  $\iff$  *interférences constructives*  $\iff \phi = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$

**Formule 14.48.** *Formule des réseaux pour une incidence normale*

$$\boxed{a \sin(\theta) = p\lambda} \quad \heartsuit \heartsuit$$

Se retrouve avec :

$$\delta = p\lambda$$

$$\text{Or : } \delta = a \sin(\theta)$$

D'où le résultat.

$$\text{Si on : } \phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$$

Et avec :  $\phi = 2p\pi$ , on a le résultat.

**Formule 14.49.** Formule des réseaux pour une incidence  $\theta_i$

$$a(\sin(\theta) - \sin(\theta_i)) = p\lambda \quad \triangleleft \text{Orientation des angles}$$

**Proposition 14.50.** Utilisation d'un réseau

On peut se servir d'un réseau comme spectromètre.

Le réseau est dispersif; il permet de séparer deux longueurs d'onde.

## Deuxième partie

## Thermodynamique

## 15 Introduction à la thermodynamique

## 15.1 Généralités

**Constante 15.1.** *Quelques masses volumiques*

	Masse volumique $\rho$	
<i>Fe</i>	$7800\text{kg.m}^{-3}$	♡
<i>NaCl</i>	$2000\text{kg.m}^{-3}$	♡
<i>eau</i>	$1000\text{kg.m}^{-3}$	
<i>air</i>	$1,2\text{kg.m}^{-3}$	♡

Le volume d'un **corps condensé** varie peu avec la température, et très peu avec la pression.

**Définition 15.2.** *Phase*

Region d'un système dans laquelle les grandeurs intensives varient continument.

**Définition 15.3.** *Principe zéro*

Deux corps en équilibre avec un troisième sont en équilibre entre eux.

**Définition 15.4.** *Equilibre thermique*

Lorsque la température est uniforme.

**Définition 15.5.** *Equilibre thermodynamique*

Les paramètres thermodynamiques n'évoluent pas au cours du temps.

Et : tous les transferts (énergie ou matière) sont algébriquement nuls.

**Définition 15.6.** *Etat stationnaire*

Les paramètres thermodynamiques n'évoluent pas au cours du temps.

Et : il peut y avoir un transfert d'énergie ou de matière.

(Exemple : fil électrique et effet Joule)

**Proposition 15.7.** *Phase condensée*

Un phase condensée est :

1. **Incompressible** :  $\frac{\partial V_m}{\partial p} = 0$
2. **Indilatable** :  $\frac{\partial V_m}{\partial T} = 0$

**Théorème 15.8.** *Loi de BOYLE MARIOTTE*

à faible pression :  $pV = C^{te}$

$\Rightarrow pV$  est proportionnel à  $T$ .

**Théorème 15.9.** *Loi d'AVOGADRO*

$pV$  est proportionnel au nombre de molécules.

**Constante 15.10.** *Constante des gaz parfait*

$$R = 8,31 JK^{-1} mol^{-1}$$

**Formule 15.11.** *Equation d'état des gaz parfaits*

$$pV = nRT \quad \heartsuit$$

**Formule 15.12.** *Théorie cinétique*

$$\text{Pression : } p = \frac{1}{3} n^* m v^{*2}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} n^* & \text{nombre de particule par unité de volume } (\neq n) \\ m & \text{masse de chaque particule} \\ v^* & \text{vitesse quadratique moyenne telle que : } v^{*2} = \langle v^2 \rangle \end{cases}$$

**Constante 15.13.** *Constante de BOLTZMAN*

$$k = \frac{R}{N} = 1,38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$$

**Formule 15.14.** *Energie cinétique moyenne par particule*

$$\frac{1}{2} m v^{*2} = \frac{3}{2} kT \quad \heartsuit \quad (\text{pour 1 particule})$$

C'est à dire :

$$\langle e_c \rangle = \frac{3}{2} kT \quad \heartsuit \quad (\text{pour 1 particule})$$

On a aussi pour un gaz parfait diatomique :

$$\langle e_c \rangle_{\text{diat}} = \frac{5}{2} kT \quad \heartsuit \quad (\text{pour 2 particule})$$

**Formule 15.15.** *Energie interne d'un gaz parfait*

$$\text{Monoatomique : } u = \frac{3}{2} nRT \quad \heartsuit$$

$$\text{Diatomique : } u = \frac{5}{2} nRT \quad \heartsuit$$

**Définition 15.16.** *Energie cinétique microscopique*

$$E_{\text{micro}} = N \langle e_c \rangle \quad \text{avec } N \text{ le nombre de particule dans le système considéré.}$$

**Définition 15.17.** *Capacité thermique à volume constant*

$$C_V = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_V \quad \heartsuit$$

**Définition 15.18.** *Capacité thermique massique à volume constant*

$$c_V = \left( \frac{\partial (u/m)}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{m} \quad \heartsuit$$

**Définition 15.19.** *Capacité thermique molaire à volume constant*

$$C_{Vm} = \left( \frac{\partial (u/n)}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{n} \quad \heartsuit$$

D'où :

$$du = C_V dT = n C_{Vm} dT = m c_V dT \quad \heartsuit \quad (\text{Première lois de Joule})$$



**Définition 15.20.** *Capacité thermique à pression constant*

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \heartsuit$$

**Définition 15.21.** *Capacité thermique massique à pression constant*

$$c_p = \left( \frac{\partial(H/m)}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{m} \heartsuit$$

**Définition 15.22.** *Capacité thermique molaire à pression constant*

$$C_{pm} = \left( \frac{\partial(H/n)}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{n} \heartsuit$$

D'où :

$$dH = C_p dT = nC_{pm} dT = mc_p dT \heartsuit \text{ (Deuxième lois de Joule)}$$

**Théorème 15.23.** *Lois de Joule*

- **Première lois de Joule** : *L'énergie interne  $u$  d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.*  $\Rightarrow du = C_V dT = nC_{Vm} dT = mc_V dT$
- **Deuxième lois de Joule** : *L'enthalpie  $H$  d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.*  $\Rightarrow dH = C_p dT = nC_{pm} dT = mc_p dT$

**Constante 15.24.** *Quelques valeurs remarquables de capacité thermiques*

Gaz parfait monoatomique :  $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$   $\heartsuit$  NPC :  $C_{pm} = \frac{5}{2}R$   $\heartsuit$

Gaz parfait diatomique :  $C_{Vm} = \frac{5}{2}R$   $\heartsuit$  NPC :  $C_{pm} = \frac{7}{2}R$   $\heartsuit$

Solide classique :  $C_{Vm} = 3R$   $\heartsuit$

**Formule 15.25.** *Capacité thermique massique d'une phase condensée (pour un volume constant)*

Comme le volume ne varie pas, on écrit  $C$  à la place de  $C_V$ , et  $C_m$  à la place de  $C_{Vm}$ .

$$du = nC_m dT \text{ c'est à dire : } du = CdT \text{ car : } C_{Vm} = \frac{C_V}{n} \text{ càd : } C_m = \frac{C}{n}$$

## 15.2 Premier principe

**Définition 15.26.** *Transformations type*

<i>Isochore</i>	<i>Volume constant</i>	
<i>Isotherme</i>	<i>Température constante</i>	$GP : Q = -W$
<i>Monotherme</i>	<i>Entre deux états à une même température</i>	
<i>Isobare</i>	<i>Pression constante</i>	$Q_p = \Delta H$
<i>Monobare</i>	<i>Entre deux états à une même pression</i>	
<i>Adiabatique</i>	<i>Sans échange de chaleur avec l'extérieur</i>	$Q = 0 \Rightarrow \Delta u = W$

**Définition 15.27.** *Transformation réversible*

*Invariante par renversement du temps.*

**Théorème 15.28.** Premier principe en mécanique

Actions conservatives  $\Rightarrow E = E_c + E_p = C^{te} \Rightarrow \boxed{\Delta E = 0}$

Actions non conservatives  $\Rightarrow \boxed{\Delta E = W_{nc}}$

**Théorème 15.29.** Premier principe en thermodynamique

Energie interne extensive  $u$  :

$\boxed{\Delta u = W + Q}$  Avec :  $\begin{cases} W : \text{le travail des action extérieures non conservatives.} \\ Q : \text{la chaleur reçue par le système.} \end{cases}$

Donc :

$\boxed{du = \delta W + \delta Q = -pdV + \delta Q}$

**Formule 15.30.** Travail d'une force de pression

$\boxed{\delta W = -p_{ext}dV} \Rightarrow \boxed{W = -\int pdV}$  c'est à dire, au signe près, l'air sous la courbe d'un "diagramme  $pV$ ".  $\heartsuit$

Or :  $pV = nRT$

Donc :  $\boxed{W = -nRT \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}$   $\heartsuit$

**Formule 15.31.** Chaleur à volume constant

$\boxed{Q_V = \Delta u}$   $\heartsuit$  car  $du = \delta W + \delta Q = \delta Q$  car  $\delta W = -p_{ext}dV = 0$  car  $V$  constant.

**Définition 15.32.** Enthalpie

$\boxed{H = u + pV}$   $\heartsuit$

**Formule 15.33.** Chaleur à pression constante

$\boxed{Q_p = \Delta H}$   $\heartsuit$  car  $dH = d(u + pV) = du + pdV + Vdp = du + pdV$  car  $p$  constant, donc  $dH = \delta W + \delta Q + pdV = -pdV + \delta Q + pdV = \delta Q$

**Formule 15.34.** Relation de MAYER

$\boxed{C_{pm} - C_{Vm} = R}$   $\heartsuit$  Mnémo :  $pV$  : procès verbal.

**Définition 15.35.** Le  $\gamma$  de la thermodynamique

$\boxed{\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} > 1}$   $\heartsuit$

On a :

— Gaz parfait monoatomique :  $\boxed{\gamma = \frac{5}{2}}$   $\heartsuit$

— Gaz parfait diatomique :  $\boxed{\gamma = \frac{7}{2}}$   $\heartsuit$

D'où :

$\boxed{C_{Vm} = \frac{R}{\gamma-1}}$   $\heartsuit$

$\boxed{C_{pm} = \gamma C_{Vm} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}}$   $\heartsuit$

**Proposition 15.36.** Différentielle d'enthalpie (d'énergie interne) pour une phase condensée

$\boxed{du = dH = CdT}$   $\heartsuit$  Avec  $C$  la capacité thermique de la phase condensée.

### 15.3 Second principe

**Formule 15.37.** *Second principe de la thermodynamique*

$$\boxed{\Delta S = \mathcal{S}_{\text{echangee}} + \mathcal{S}_{\text{cree}}} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{S}_{\text{echangee}} = \frac{Q}{T_i} \\ \mathcal{S}_{\text{cree}} \geq 0 \end{cases} \text{ avec } \mathcal{S} \text{ l'entropie. } \heartsuit$$

Donc :

$$\boxed{S = \frac{Q}{T_i} + \mathcal{S}_{\text{cree}}}$$

**Proposition 15.38.** *Second principe et transformation élémentaire réversible*

$$\boxed{\mathcal{S}_{\text{cree}} = 0} \text{ d'où : } \boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}} \heartsuit$$

**Proposition 15.39.** *Second principe et transformation élémentaire irréversible*

$$\boxed{\mathcal{S}_{\text{cree}} > 0} \text{ d'où : } \boxed{dS > \frac{\delta Q}{T}} \heartsuit$$

**Formule 15.40.** *Entropie d'une phase condensée*

$$\boxed{S(T) = C_p \ln(T) + C^{\text{te}}} \heartsuit$$

En effet :

$$\begin{aligned} dS &= dS_p \\ &= \frac{\delta Q_p}{T} \quad \text{d'après la proposition 15.38 : } dS = \frac{\delta Q}{T} \\ &= \frac{dH}{T} \quad \text{d'après la formule 15.33 : } dQ_p = dH \\ &= C_p \frac{dT}{T} \quad \text{d'après la proposition 15.22 : } dH = C_p dT \end{aligned}$$

NB : la pression n'a pas d'influence sur une phase condensée, donc on peut la considérer constante.

**Formule 15.41.** *Expression de l'entropie en fonction de T et V*

$$\boxed{dS = nC_{V_m} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}} \heartsuit \heartsuit$$

Qui donne :

$$\boxed{S(T, V) = nC_{V_m} \ln(T) + nR \ln(V) + C^{\text{te}}}$$

**Formule 15.42.** *Expression de l'entropie en fonction de T et p*

$$\boxed{dS = nC_{p_m} \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}} \heartsuit \heartsuit$$

Qui donne :

$$\boxed{S(T, p) = nC_{p_m} \ln(T) - nR \ln(p) + C^{\text{te}}}$$

**Théorème 15.43.** *Loi de Laplace*

S'applique dans le cas d'une transformation adiabatique réversible isentropique.

$$\boxed{pV^\gamma = C^{\text{te}}} \heartsuit$$

Ou bien (se retrouve avec  $pV = nRT$ ) :

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = C^{\text{te}}}$$

Et :

$$\boxed{T^\gamma p^{1-\gamma} = C^{\text{te}}}$$

$$\text{Avec : } \boxed{\gamma = \frac{C_{p_m}}{C_{V_m}}}$$

## 16 Application du premier principe

### 16.1 Transformation chimique

**Formule 16.1.** *Ecriture d'une réaction chimique*

$$\sum \nu_i A_i = 0$$

**Formule 16.2.** *Avancement élémentaire d'une réaction*

$$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i} \heartsuit$$

NB :  $\xi(t)$  : avancement à  $t$ , qui ne dépend pas de  $i$ .

$$\text{Donc : } n_i(t) = n_i(0) + \nu_i \xi(t)$$

### 16.2 Grandeur de réaction

**Formule 16.3.** *Grandeur molaire*

$X_{n_i}^* = \frac{X}{n_i}$  avec  $X$  une grandeur extensive (exemple : volume  $V$ , énergie interne  $u$ , enthalpie  $H$ ...)

**Formule 16.4.** *Identité d'EULER (dans un mélange)*

$$X = \sum n_i X_{n_i} \heartsuit \text{ NPC : } \Delta_r X = \sum \nu_i X_{n_i} \text{ (Grandeur de réaction)}$$

**Formule 16.5.** *Grandeur molaire partielle dépendant de  $T, p, n_i$*

$X_{n_i} = \left(\frac{\partial X}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}}$  avec  $X$  une grandeur extensive (exemple : volume  $V$ , énergie interne  $u$ , enthalpie  $H$ ...)

**Définition 16.6.** *Grandeur de réaction*

$$\Delta_r X = \frac{\partial X}{\partial \xi} \heartsuit$$

Donc :

$$\Delta_r X = \sum \nu_i X_i \heartsuit$$

On retient :

$$dX = \frac{\partial X}{\partial T} dT + \frac{\partial X}{\partial p} dp + \Delta_r X d\xi \heartsuit$$

NB : Si  $T$  et  $p$  constants :  $dX = \Delta_r X d\xi$

**Théorème 16.7.** *Aproximation d'Elingham*

$\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  ne dépendent pas de  $T$ .

C'est à dire :

$$\Delta_r C_p^0 \approx 0$$

### 16.3 Grandeur standard de réaction

**Définition 16.8.** *Grandeur standard de réaction*

$\Delta_r X^0 = \sum \nu_i X_{n_i}^0$  C'est le  $\Delta_r X$  dans les condition standards :  $p = p_0 = 1\text{bar}$  et en plus, pour les solides et les liquides  $T = 25^\circ\text{C}$

D'où, lors d'une réaction :  $\Delta X = \Delta_r X^0 \times 1$  avec  $\Delta X$  en Joule,  $\Delta_r X^0$  en Joule par mol, et 1 en mol.

**Proposition 16.9.** Chaleur à pression constante

$Q_p = \Delta H$  car  $dH = d(u + pV) = du + pdV + Vdp = du + pdV$  car  $p$  constant, donc  $dH = \delta W + \delta Q + pdV = -pdV + \delta Q + pdV = \delta Q$

**Définition 16.10.** Enthalpie standard de réaction

$\Delta_r H^0 = \sum \nu_i H_{n_i}^0$  dépend a priori de  $T$ .

Deux cas (à  $p_0$  et  $T$  constants) :

- $\Delta_r H^0 > 0$  : endothermique
- $\Delta_r H^0 < 0$  : exothermique

**Définition 16.11.** Température de flamme

Lorsque la réaction est rapide (exemple : combustion), l'échange thermique n'ayant pas le temps de se faire (adiabatique), on prévoit une élévation de la température : on l'appelle "Température de flamme" en réacteur adiabatique (qui est isobar).

On l'appelle aussi "Température de réaction adiabatique".

**Proposition 16.12.** Techniques de chemins réactionnels "simplifiés"

Il existe deux techniques :

1. — Réaction adiabatique rapide à pression constante  $p_0$  ( $\Delta H_1 = Q_p = 0$ ), puis
  - Refroidissement isobar à  $p_0$  ( $\Delta H_2 = \int dH = \int_{T_f}^T C_p dT = C_p(T - T_f)$ ).
  - D'où :  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = C_p(T - T_f)$ .
2. — ???
- ???

## 16.4 Grandeur standard de formation

**Définition 16.13.** Etat standard de référence d'un élément (ESR)

C'est l'état du corps simple constitué à partir de cet élément, dans l'état physique le plus stable à la température considérée.

NB : On prendra le carbon graphite comme ESR du carbon, et non pas le carbon diamant.

**Définition 16.14.** Réaction standard de formation d'un élément

C'est la réaction de formation d'une mole du constituant dans son état standard à partir de ses corps simple constitutifs pris chacun dans son état standard de référence à  $T$ .

**Formule 16.15.** Grandeur standard de formation

$\Delta_f X^0(A_i)$  : c'est le  $\Delta_r X$  de la réaction standard de la formation de  $A_i$ .

NB : Si  $A_i$  est un corps simple dans son état de référence :  $\Delta_f X^0(A_i) = 0$  ?

**Définition 16.16.** *Enthalpie standard de formation de  $A_i$*

$$\Delta_f H^0(A_i)$$

**Théorème 16.17.** *Loi de HESS*

*C'est la loi qui dit que l'on peut décomposer les réactions en réactions de formation pour trouver le  $\Delta_r H^0$ .*

*Pour une réaction :  $\sum \nu_i A_i = 0$*

*On a :*

$$\Delta_r H^0 = \sum \nu_i \Delta_f H^0(A_i)$$

## 17 Application du second principe

### 17.1 Enthalpie libre

**Définition 17.1.** *Enthalpie libre (potentielle de GIBBS / potentiel thermodynamique)*

$$G = H - TS \quad \heartsuit \quad \text{avec : } \begin{cases} H = u + pV & \text{l'enthalpie.} \\ S & \text{l'entropie.} \end{cases}$$

*Donc :*

$$G = u + pV - TS \quad \heartsuit$$

<b>Potentiels thermodynamiques</b>
<b>Énergie interne</b>
$U(V, S, n)$
<b>Énergie libre</b>
$F(V, T, n) = U - TS$
<b>Enthalpie</b>
$H(P, S, n) = U + PV$
<b>Enthalpie libre</b>
$G(P, T, n) = U + PV - TS$

FIGURE 3 – Les potentiels chimiques en thermodynamique (wikipédia)

**Formule 17.2.** *Variation d'enthalpie*

$$\Delta G = -T_0 \mathcal{S}_{crec} \quad \heartsuit$$

*Donc : irréversible  $\Rightarrow G \searrow$*

**Formule 17.3.** *Identités thermodynamiques*

- $\boxed{du = TdS - pdV}$  ♡ Mnémo :
  - "Tes devoirs surveillés".
  - Les  $pd$  c'est mal, donc c'est négatif.
  - Le  $U$  est a un trou  $\Rightarrow -$
- $\boxed{dG = -SdT + Vdp}$  ♡ En différentiant ce qui ne l'est pas dans  $du$  et vice versa, et en inversant les signes par rapport à  $du$ .
- $\boxed{dH = TdS + Vdp}$  ♡ Mnémo :
  - "Tes devoirs surveillés".
  - Le  $H$  ressemble à un +.

**17.2 Système de composition variable : potentiel chimique**

... Et en tenant compte des variations  $dn_i$  des constituants du système :

$$\boxed{du = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dn_i}$$
 ♡

De même :

$$\boxed{dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dn_i}$$
 ♡

D'où :

$$\boxed{\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_{j \neq i}}}$$
 ♡

**Formule 17.4.** *Identité d'EULER pour G*

$$\boxed{G = \sum n_i \mu_i}$$
 Initialement on avait :  $\boxed{X = \sum n_i X_{n_i}}$  (Identité d'EULER)

**Formule 17.5.** *Chaleur latente de changement d'état*

$$\boxed{L_{1 \rightarrow 2} = \Delta H_{1 \rightarrow 2}}$$
 ♡ Et non pas  $G$  ni  $u$ .

**Proposition 17.6.** *Variation d'entropie pour une transformation isotherme réversible*

$$\boxed{\Delta S = \frac{Q}{T}}$$
 ♡

**Proposition 17.7.** *Changement de phase réversible à pression constante*

$$\boxed{\Delta S = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{T}}$$
 ♡

**17.3 Différentes expressions du potentiel chimique et activités**

On met \* pour les corps purs.

**Formule 17.8.** *Rappel : identité d'EULER*

$$\boxed{G^* = n\mu^*}$$
 car  $\boxed{G = \sum n_i \mu_i}$

**Définition 17.9.** *Potentiel chimique standard*

$$\boxed{\mu^*(p_0, T) = \mu^o(T)}$$

**Formule 17.10.** *Potentiel chimique*

On a :

$$d\mu^* = -S_m^* dT + V_m^* dp$$

Donc pour un gaz parfait :

$$d\mu^* = V_m^* dp$$

Or :

$$pV_m^* = (1)RT$$

Donc :

$$d\mu^* = RT \frac{dp}{p}$$

Donc :

$$\mu^*(p, T) = \mu^o(T) + RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \heartsuit$$

**Définition 17.11.** *Activité chimique pour le cas d'un gaz parfait*

$$a = \frac{p}{p_0}$$

Donc :

$$\mu^*(p, T) = \mu^o(T) + RT \ln(a)$$

Dans les autres cas, on remplace  $a$  par l'activité.

NB : pour une phase condensée, on a :  $\mu^*(T) = \mu^o(T)$   $\heartsuit$  donc :  $a = 1$

**Proposition 17.12.** *Cas d'un mélange de gaz parfaits*

Un mélange de gaz parfaits est considéré comme un unique gaz parfait.

**Définition 17.13.** *Pression partielle*

$$p_i = n_i \frac{RT}{V} = x_i p$$

**Définition 17.14.** *Pression totale*

$$p = \sum p_i$$

**Définition 17.15.** *Titre molaire (fraction molaire)*

$$x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

**Formule 17.16.** *Activité solvant*

$$a_{\text{solvant}} = 1$$

**Formule 17.17.** *Activité soluté (très dilué)*

$$a_i = \frac{C_i}{C^o} \text{ avec } C^o = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$



	Corps purs	Mélange
Activité chimique	$\mu^*(p, T) = \mu^o(T) + RT \ln(a)$ $\mu^o(T) = \mu^*(p_0, T)$ ( $p^o = 1\text{bar}$ ) $a =$ activité chimique	$\mu^*(Mel, p, T) = \mu_i^o(T) + RT \ln(a_i)$ $\mu_i^o(T) = \mu_i^*(p_0, T)$ $a_i =$ activité chimique
Gaz parfait	$\mu^*(p, T) = \mu^o(T) + RT \ln(\frac{p}{p^o})$ $a = \frac{p}{p^o}$	$\mu_i^*(Mel, p, T) = \mu_i^o(T) + RT \ln(\frac{p_i}{p^o})$ $a_i = \frac{p_i}{p^o}$
Phase condensée	Solide ou liquide pur : $\mu^*(p, T) = \mu^o(T)$ $a = 1$	Solution aqueuse très diluée : • Solvant $H_2O$ : $a = 1$ • Soluté : $a_i = \frac{C_i}{C^o}$

TABLE 1 – Récapitulatif des activités chimiques

## 18 Enthalpie libre de réaction – évolution d'un système – équilibre chimique

### 18.1 Enthalpie libre de réaction

**Formule 18.1.** *Rappel : enthalpie*

$$\boxed{H = u + pV} \heartsuit$$

**Formule 18.2.** *Rappel : enthalpie libre*

$$\boxed{G = u + pV - TS} \heartsuit$$

**Formule 18.3.** *Rappel : Identités thermodynamiques*

$$- \boxed{du = TdS - pdV} \heartsuit$$

$$- \boxed{dG = -SdT + Vdp} \heartsuit$$

$$- \boxed{dH = TdS + Vdp} \heartsuit$$

**Formule 18.4.** *Enthalpie libre de réaction*

$$\boxed{\Delta_r G = \frac{\partial G}{\partial \xi}}$$

Ou bien :

$$\boxed{\Delta_r G = \sum \nu_i \mu_i} \heartsuit$$

Donc :

$$\boxed{dG = -SdT + Vdp + \Delta_r G d\xi} \heartsuit$$

**Formule 18.5.** *Cas particulier d'une évolution isotherme et isobare*

On a :

$$\boxed{\Delta G = -TS_{cree}}$$

Donc :

$$\boxed{dG = -T\delta S_{cree}} \text{ donc } \boxed{dG \leq 0}$$

On le retrouve par :

On sait que  $dG = d(u + pV - TS)$  car :  $G = u + pV - TS$

Or  $p$  et  $T$  constant, donc :

$$dG = du + pdV - TdS$$

Première principe :  $du = \delta W + \delta Q$  car  $u = W + Q$

$$\text{Or : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Deuxième principe : } dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_{\text{cree}} \text{ car } S = \underbrace{\frac{Q}{T}}_{S_{\text{ech}}} + S_{\text{cree}} \end{array} \right.$$

Et :

$$\delta W = -pdV$$

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{l} du = -pdV + \delta Q \\ dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_{\text{cree}} \end{array} \right.$$

Puis en remplaçant  $du$  et  $dS$  dans  $dG = du + pdV - TdS$ , on trouve bien  $dG = -T\delta S_{\text{cree}}$

**Formule 18.6.** Différentielle d'enthalpie pour une évolution irréversible

$dG < 0$  car  $\delta S_{\text{cree}} > 0$  car  $S_{\text{cree}}$  augmente (irréversibilité)

donc :  $G \searrow$

NB :  $G$  est minimal à l'équilibre.

**Théorème 18.7.** Conditions d'évolution

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_r G = \frac{\partial G}{\partial \xi} \\ \text{Ou bien :} \\ \Delta_r G = \sum \nu_i \mu_i \heartsuit \\ \text{Donc :} \\ dG = -SdT + Vdp + \Delta_r G d\xi \heartsuit \end{array} \right.$$

Donc à  $p$  et  $T$  constants :

$$dG = \Delta_r G d\xi$$

Donc  $\Delta_r G$  est le coefficient directeur de  $G$  en fonction de  $\xi$ .

On a trois cas d'évolution possibles :

1.  $\Delta_r G < 0$  : évolution en sens direct ( $d\xi > 0$ ).
2.  $\Delta_r G > 0$  : évolution en sens indirect ( $d\xi < 0$ ).
3.  $\Delta_r G = 0$  : pas d'évolution.

En effet, on a toujours  $dG < 0$  car on va dans le sens de la stabilisation.

## 18.2 Quotient de réaction — constante d'équilibre

**Définition 18.8.** Quotient de réaction

$$Q = \prod a_i^{\nu_i} \heartsuit$$

Or :

$$\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$$

Et :

$$\Delta_r G = \sum \nu_i \mu_i$$

Donc :

$$\Delta_r G = \sum \nu_i \mu_i^0(T) + \sum \nu_i RT \ln(a_i)$$

Donc :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0(T) + RT \sum \ln(a_i^{\nu_i})$$

Donc :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0(T) + RT \ln(\prod a_i^{\nu_i})$$

Donc :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0(T) + RT \ln(Q) \quad \heartsuit$$

**Définition 18.9.** Constante de l'équilibre ("loi d'action des masses" (LAM), ou relation de GULBERG et WAAGE)

$$K^0(T) = Q_{eq} = \prod a_{ieq}^{\nu_i} \quad \heartsuit$$

NB : à l'équilibre :  $\Delta_r G = 0$

**Proposition 18.10.** Relations intéressantes

$$\Delta_r G^0(T) = -RT \ln(K^0(T)) \quad \heartsuit \quad (\text{car le } ^0 \text{ voulant dire équilibre, on a } \Delta_r G = 0)$$

Et :

$$\Delta_r G(T) = -RT \ln\left(\frac{K^0(T)}{Q}\right) \quad \heartsuit$$

**Théorème 18.11.** Conditions d'évolution

Avec :

$$\Delta_r G(T) = -RT \ln\left(\frac{K^0(T)}{Q}\right)$$

On a trois cas d'évolution possibles :

1.  $Q < K^0(T)$  donc  $\Delta_r G < 0$  : évolution en sens direct ( $d\xi > 0$ ).
2.  $Q > K^0(T)$  donc  $\Delta_r G > 0$  : évolution en sens indirect ( $d\xi < 0$ ).
3.  $Q = K^0(T)$  donc  $\Delta_r G = 0$  : pas d'évolution.

NB :  $\Delta_r G$  est le coefficient directeur de  $G$  en fonction de  $\xi$ .

### 18.3 Détermination de la constante d'équilibre — influence de la température

**Théorème 18.12.** Approximation d'Ellingham

$$\Delta_r H^0 \text{ et } \Delta_r S^0 \text{ sont indépendants de la température}$$

Donc  $\Delta_r G^0$  est une fonction affine de la température.

$$\text{En effet on a : } \Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0$$

que l'on retrouve en dérivant "partiellement"  $G = H - TS$  par  $\xi$ , avant de passer à  $^0$ .

**Théorème 18.13.** Loi de HESS

$$\Delta_r H^0 = \sum \nu_i \Delta_f H^0(A_i)$$

**Formule 18.14.** ???

$$\Delta_r S^o = \sum \nu_i S_{mi}^o$$

Par principe de NERNST, on prend :  $S^o(\text{cors pur cristalisé à } 0K) = 0 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

**Théorème 18.15.** Relation de VAN'T HOFF

$$\frac{d}{dt}(\ln K^o) = \frac{\Delta_r H^o}{RT^2} \heartsuit$$

Démo compliquée...

## 18.4 Différentes expressions de Q de la LAM

**Formule 18.16.** Action d'une phase gazeuse

$$a_i = \frac{p_i}{p}$$

NB :  $p_i = x_i p$  avec  $x_i = \frac{n_i}{n}$  la fraction molaire

**Formule 18.17.** Action d'une phase condensée pure

$$a_i = 1$$

**Formule 18.18.** Action d'une solution aqueuse très diluée

$$a_{\text{solvant}} = 1$$

$$a_{\text{soluté}} = \frac{C_i}{C^o}$$

**Formule 18.19.** Action d'un solide pur

$$a = 1$$

## 18.5 Exemples simples

Ne pas oublier "total gaz" dans les tableaux d'avancement...

**Définition 18.20.** Coefficient de dissociation (ou taux de conversion)

$$\alpha = \frac{\text{nombre de mole de réactif ayant réagi}}{\text{nombre de mole initial de ce réactif}}$$

**Formule 18.21.** Densité air d'un gaz

$$d = \frac{M}{M_{\text{air}}}$$

**Formule 18.22.** Masse molaire d'un mélange gazeux connaissant sa densité "air"

$$M = 29,0d \heartsuit$$

## 19 Variance — optimisation d'un processus chimique

### 19.1 Variance d'un système à l'équilibre

L'état d'un système peut être défini uniquement par des paramètres intensifs.

**Définition 19.1.** *Variance*

C'est le nombre de paramètres intensifs indépendants qu'il convient de fixer pour définir un état d'équilibre d'un système. (C'est le nombre de degrés de liberté du système).

Notation :  $\boxed{v}$

**Formule 19.2.** *Variance*

$$\boxed{v = p - \rho} \heartsuit \text{ avec : } \begin{cases} p \text{ le nombre de paramètres intensifs.} \\ \rho \text{ le nombre de relations entre eux.} \end{cases}$$

**Exemple 19.3.** *Quelques variances typiques*

- *Corps pur*

— Sous une seule phase : 
$$\begin{cases} p = 2 \\ \rho = 0 \\ \Rightarrow v = 2 \end{cases}$$

— Sous deux phases : 
$$\begin{cases} p = 2 \\ \rho = 1 \\ \Rightarrow v = 1 \end{cases}$$

$p = 2$  car  $P$  et  $T$

$\rho = 1$  car les potentiels chimiques des deux phases sont égaux :  $\mu_{\phi_1} = \mu_{\phi_2}$

NB : Si on fixe  $p$  ou  $T$ , l'autre est déterminé : courbe d'équilibre entre deux phases.

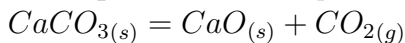
— Sous trois phases : 
$$\begin{cases} p = 2 \\ \rho = 2 \\ \Rightarrow v = 0 \end{cases}$$

$p = 2$  car  $P$  et  $T$

$\rho = 2$  car les potentiels chimiques des trois phases sont égaux :  $\mu_{\phi_1} = \mu_{\phi_2} = \mu_{\phi_3}$

NB :  $p$  et  $T$  sont déterminés : point triple.

**Exemple 19.4.** *Exemple de réaction*



$$\begin{cases} p = 5 \\ \rho = 4 \\ \Rightarrow v = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

$p = 5$  car ( $P, T$ , et trois les  $x$ )

$\rho = 4$  car ( $x_{\text{CaCO}_{3(s)}} = 1, x_{\text{CaO}_{(s)}} = 1, x_{\text{CO}_{2(g)}} = 1, \text{LAM}$ )

**Définition 19.5.** Rupture et déplacement d'équilibre chimique

- **Déplacement d'équilibre** : Lorsqu'on modifie un paramètre, les autres étant fixés, (avec à la fin les mêmes constituants dans la même phase).
- **Rupture d'équilibre** : Lorsqu'on modifie un paramètre, les autres étant fixés, (avec à la fin des constituants différents ou dans une autre phase).

**Proposition 19.6.** Condition de déplacement possible de l'équilibre chimique

$$v \geq 2 \quad \heartsuit$$

## 19.2 Optimisation d'un procédé chimique

**Formule 19.7.** Rappels

$$\Delta_r G = \Delta_r G^o(T) + RT \ln(Q) \quad \heartsuit$$

$$\Delta_r G^o(T) = -RT \ln(K^o(T)) \quad \heartsuit$$

$$\Delta_r G(T) = -RT \ln\left(\frac{K^o(T)}{Q}\right) \quad \heartsuit$$

**Théorème 19.8.** Relation de VAN'T HOFF

$$\frac{d}{dt}(\ln K^o) = \frac{\Delta_r H^o}{RT^2} \quad \heartsuit$$

**Théorème 19.9.** Élévation isobare de température

Une élévation isobare de température déplace l'équilibre dans "le sens endomorphique".  
(Quand on chauffe un système il s'adapte pour pouvoir absorber la chaleur)

**Théorème 19.10.** Élévation isotherme de pression

Une élévation isotherme de pression déplace l'équilibre dans le sens de la diminution de la quantité de matière gazeuse.

## Troisième partie

# Mécanique

## 20 Dynamique et énergétique du solide en référentiel galiléen

**Formule 20.1.** *Quantité de mouvement*

$$\vec{p} = m\vec{v}_G$$

**Théorème 20.2.** *Théorème du centre d'inertie*

$$m\vec{a}_G = \vec{f}_{ext} \quad "m\vec{a} = \sum \vec{F} "$$

**Théorème 20.3.** *Théorème de la résultante cinétique*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}_{ext}$$

**Théorème 20.4.** *Théorème du moment cinétique*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O_f} \quad \heartsuit \quad \text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \\ \mathcal{M}_{O_f} = \vec{OM} \wedge \vec{f} \end{array} \right. \heartsuit$$

**Théorème 20.5.** *Théorème du moment cinétique en projection sur un axe*

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_f}$$

$$\text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = \mathbf{J}_\Delta \omega \\ \mathcal{M}_{\Delta_f} = \mathcal{M}_{O_f} \cdot \vec{e}_z \end{array} \right. \heartsuit \text{ lorsque } \vec{e}_z \text{ est le vecteur directeur de la droite.}$$

$$\text{Avec : } \left\{ J_\Delta = \iiint r^2 dm \right. \heartsuit$$

**Proposition 20.6.** *Pivot parfait*

$$\mathcal{M}_\Delta = 0$$

**Définition 20.7.** *Isochronisme*

On parle d'isochronisme lorsque la période des oscillation ne dépend pas de leur amplitude.

**Théorème 20.8.** *Théorème de la puissance cinétique*

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P} \quad \heartsuit$$

**Formule 20.9.** *Puissance d'une force*

$$\boxed{P = \vec{f} \cdot \vec{v}} \quad \heartsuit$$

**Formule 20.10.** *Puissance d'un couple*

$$\boxed{P = \vec{C} \cdot \vec{\omega}} \quad \heartsuit \text{ avec } \begin{array}{l} \vec{C} \text{ le couple} \\ \vec{\omega} \text{ le vecteur rotation} \end{array}$$

**Formule 20.11.** *Travail élémentaire d'une force conservative*

$$\boxed{\delta W = dE_c = -dE_p = \vec{f} \cdot d\vec{l}}$$

$$NB : \boxed{\Delta E_c = -\Delta E_p}$$

**Formule 20.12.** *Energie mécanique*

$$\boxed{E = E_c + E_p}$$

*Constante si les actions extérieures sont conservatives.*

**Formule 20.13.**

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P_{n.c.}}$$

**Formule 20.14.**

$$\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p}$$

**Formule 20.15.** *Energie cinétique de translation*

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \quad \heartsuit$$

**Formule 20.16.** *Energie cinétique de rotation*

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2} \quad \heartsuit$$

## 21 Changement de référentiel – dynamique du point en référentiel non galiléen

**Définition 21.1.** *Les référentiels*

1. Copernic : (Système solaire)
  - *Origine* : centre de masse du système solaire.
  - *Orientaion* : 3 étoiles lointaines.
2. Kepler : (Soleil)
  - *Origine* : centre de masse du Soleil.
  - *Orientaion* : 3 étoiles lointaines.



3. Géocentrique :

- **Origine** : centre de masse de la Terre.
- **Orientation** : 3 étoiles lointaines.

4. Terrestre :

- **Origine** : centre de masse de la Terre.
- **Orientation** : surface terrestre.

**Définition 21.2.** Les translation

1. Rectiligne.



2. Circulaire.



3. Curviligne.



**Formule 21.3.** Vecteur rotation (pour une rotation selon  $\vec{e}_z$  à la vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$ )

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z = \omega \vec{e}_z}$$

**Formule 21.4.**

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_x}$$

En effet, d'après la formule de Bour, on a :

$$\left. \frac{d\vec{e}_x}{dt} \right|_R = \underbrace{\left. \frac{d\vec{e}_x}{dt} \right|_{R'}}_{=0} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{e}_x \quad \heartsuit \text{ (écrite "à la manière SI")}$$

**Formule 21.5.** Formule de Bour

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{u}}$$

**Formule 21.6.** Dérivée d'une translation

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R'}}$$

**Formule 21.7.** Loi de composition des vitesses pour une translation du repère

$$\boxed{\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{v}_R(O')}$$

$$\boxed{\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)} \quad \text{Avec : } \begin{array}{l} \vec{v}_a(M) \text{ la vitesse absolue} \\ \vec{v}_r(M) \text{ la vitesse relative} \\ \vec{v}_e(M) \text{ la vitesse d'entraînement} \end{array}$$

**Formule 21.8.** Loi de composition des accélérations pour une translation du repère

$$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_R(O')$$

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) \quad \text{Avec : } \begin{array}{l} \vec{a}_a(M) \text{ l'accélération absolue} \\ \vec{a}_r(M) \text{ l'accélération relative} \\ \vec{a}_e(M) \text{ l'accélération d'entraînement} \end{array}$$

**Formule 21.9.** Loi de composition des vitesses pour une rotation du repère

$$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) \quad \text{Avec : } \begin{array}{l} \vec{v}_a(M) \text{ la vitesse absolue} \\ \vec{v}_r(M) \text{ la vitesse relative} \\ \vec{v}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ la vitesse d'entraînement ("}r\omega\text{" )} \end{array}$$

**Formule 21.10.** Loi de composition des *accélérations* pour une *rotation* du repère

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

$$\begin{array}{l} \vec{a}_a(M) \text{ l'accélération absolue} \\ \vec{a}_r(M) \text{ l'accélération relative} \\ \text{Avec : } \vec{a}_e(M) \text{ l'accélération d'entraînement} \end{array}$$

$$\vec{a}_c(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M) \quad \heartsuit \text{ l'accélération de Coriolis}$$

De plus, pour les coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{a}_c(M) = -r\omega^2 \vec{e}_r \quad \heartsuit$$

**Formule 21.11.** Les forces d'inertie en référentiel non galiléens

1. Force d'inertie d'**entraînement** :  $\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M)$

$$\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}(O') \quad \text{lors d'une translation}$$

$$\vec{f}_{ie}(M) = m\omega^2 \overrightarrow{HM} \quad \heartsuit \text{ lors d'une rotation uniforme}$$

2. Force d'inertie de **Coriolis** :  $\vec{f}_{ic}(M) = -m\vec{a}_c(M)$

$$\vec{f}_{ic}(M) = \vec{0} \quad \text{lors d'une translation}$$

$$\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(M) \quad \heartsuit \text{ lors d'une rotation uniforme}$$

**Formule 21.12.** PFD dans un référentiel *R'* non galiléen

$$m\vec{a}_{R'}(M) = \vec{f} + \vec{f}_{ie}(M) + \vec{f}_{ic}(M) \quad \heartsuit$$

**Formule 21.13.** Poids sur terre

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 \overrightarrow{HM} \quad \text{Avec } H \text{ le projeté sur l'axe de la terre du lieu } M.$$

NB :  $\omega^2 \|\overrightarrow{HM}\| = 0,03 \text{ m.s}^{-1}$  à l'équateur.

## Quatrième partie

# Annexe

## 22 Compléments de mécanique

### 22.1 Point matériel

#### 22.1.1 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

**Théorème 22.1.** *Théorème de la résultante cinétique*

$$\boxed{m \cdot \overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{f}}$$

**Théorème 22.2.** *Théorème du moment cinétique*

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_{O_f}}$$

#### 22.1.2 Energie

**Formule 22.3.** *Travail élémentaire*

$$\boxed{\delta W = \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{r}}$$

### 22.2 Solide

#### 22.2.1 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

**Théorème 22.4.** *Théorème de la résultante cinétique*

$$\boxed{m\overrightarrow{a}(G) = \overrightarrow{F}_{ext}}$$

**Théorème 22.5.** *Théorème du moment cinétique*

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_{O_{ext}}}$$

**Théorème 22.6.** *Théorème du moment cinétique en projection sur un axe Oz*

$$\boxed{\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{O_{ext}}}$$

**Formule 22.7.** *Moment d'inertie*

On pose :  $\boxed{L_{Oz} = J\omega}$  avec  $J$  le moment d'inertie du solide par rapport à  $Oz$ . Pour obtenir :  $\boxed{J\dot{\omega} = M_{Oz}}$

#### 22.2.2 Energie

**Formule 22.8.** *Travail élémentaire*

$$\boxed{\delta W = -dE_p} \text{ avec } \boxed{\delta W = dE_c}$$

## 23 Elements d'analyse vectorielle

### 23.1 Opérateur nabla

**Formule 23.1.** Définition opérateur nabla

$$\vec{\nabla}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \heartsuit$$

**Formule 23.2.** grad, div, Laplacien, rot, avec l'opérateur nabla

♡ ♡ ♡ ♡ ♡

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \in \mathbb{R}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

### 23.2 Gradient

**Formule 23.3.** Opérateur gradient

Formule générale :

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \iff df = \vec{g} \cdot d\vec{r} \iff df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{r}$$

En cartésien :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

En cylindrique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

En sphérique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

### 23.3 Divergence

**Formule 23.4.** Opérateur divergence

En cartésienne :

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$$

## 23.4 Laplacien

**Formule 23.5.** *Opérateur Laplacien*

*Formule générale :*

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \in \mathbb{R}$$

*En cartésien :*

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \in \mathbb{R}$$

## 23.5 Rotationnel

**Formule 23.6.** *Opérateur Rotationnel*

*En cartésien :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

## 23.6 Propriétés

**Formule 23.7.** *Egalités générales*

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}) = 0 \quad \heartsuit$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \vec{0} \quad \heartsuit$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad \heartsuit$$

**Théorème 23.8.** *Théorème de Green-Ostrogradski*

$$\oint_{(S)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V) \dots (S)} \operatorname{div} \vec{a} \, d\tau \quad \heartsuit$$

**Théorème 23.9.** *Théorème de Stokes*

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S) \dots (\Gamma)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad \heartsuit$$

## 24 Résolution des équations différentielles (à coefficients constants)

### 24.1 Premier degré

On a une équation de la forme :

$\frac{dx(t)}{dt(t)} + \frac{x}{\tau} = A$	On a donc :	Solution particulière	$x_1(t) = A\tau$	$\lambda \in \mathbb{R}$
		Solution "temporaire"	$x_2(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$	
		Solution totale	$x(t) = A\tau + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$	

### 24.2 Deuxième degré : oscillateur harmonique

On a une équation de la forme :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

On a donc :

Solution réelle 1	$x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \phi)$
Solution réelle 2	$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
Solution complexe	$x(t) = \underline{x_{max}} e^{j(\omega t + \phi)}$

Avec :  $\begin{cases} A = x_{max} \cos(\phi) \\ B = -x_{max} \sin(\phi) \end{cases}$

### 24.3 Deuxième degré : quelconque

On a une équation de la forme :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = D$$

On pose :

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0} \quad \text{On :} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = D$$

Equation caractéristique :

$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$	càd : $r^2 + \frac{1}{\tau} r + \omega_0^2 = 0$
$\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$	càd : $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2$

**24.3.1  $\Delta > 0$  : Régime apériodique**

<i>Racines</i>	$r_{1-2} = \frac{\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2}$
<i>Solution "temporaire"</i>	$x_1(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$
$(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R})^2$	
<i>Solution particulière</i>	$x_2(t) = \frac{D}{\omega_0^2}$
<i>Solution totale</i>	$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

**24.3.2  $\Delta < 0$  : Régime pseudo-périodique**

<i>Racines</i>	$r_{1-2} = \underbrace{-\frac{1}{2\tau}}_{\alpha} \pm j \omega_0 \underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}}_{\omega}$
<i>Solution "temporaire"</i>	$x_1(t) = e^{\alpha t} (\lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t))$
$(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R})^2$	$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
<i>Solution particulière</i>	$x_2(t) = \frac{D}{\omega_0^2}$
<i>Solution totale</i>	$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

**24.3.3  $\Delta = 0$  : Régime critique**

<i>Racine</i>	$r_0 = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1}{2\tau}$
<i>Solution "temporaire"</i>	$x_1(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$
$(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R})^2$	
<i>Solution particulière</i>	$x_2(t) = \frac{D}{\omega_0^2}$
<i>Solution totale</i>	$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

## 25 Débarras de formules en tout genre

**Formule 25.1.** *Moment cinétique*

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \quad \heartsuit$$

**Formule 25.2.** *Moment d'une force*

$$\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

**Formule 25.3.** *Puissance d'une force*

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

**Formule 25.4.** *Puissance d'un couple*

$$P = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} \quad \text{avec } \vec{\Gamma} \text{ le couple}$$

$\vec{\omega}$  la vitesse de rotation (vecteur rotation)

**Formule 25.5.** *Puissance électrique instantanée consommée par un dipôle*

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

**Formule 25.6.** *Energie contenue dans un condensateur*

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

**Formule 25.7.** *Energie contenue dans une bobine*

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

**Formule 25.8.** *Lois d'Ohm "locale"*

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec } \gamma \text{ la conductivité du milieu } \underline{\text{dans lequel est calculé } \vec{E}}.$$

**Formule 25.9.** *Différents flux*

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

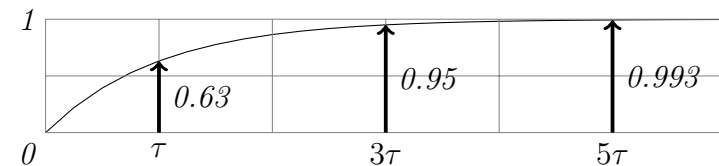
$$\phi_{\text{électrique}} = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

$$\phi_{\text{magnétique}} = \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$$

**Formule 25.10.** *Dérivées en coordonnées cylindriques canoniques*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \end{array} \right.$$

**Formule 25.11.** *Temps caractéristiques — solution exponentielle équation différentielle*



$$\left[ \begin{array}{ll} f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & \tau = 1 \\ t = \tau & \Rightarrow x = 0,63x_{max} \\ t = 3\tau & \Rightarrow x = 0,95x_{max} \\ t = 5\tau & \Rightarrow x = 0,993x_{max} \end{array} \right.$$



**Formule 25.12.** *Poussée d'archimède*

$$\vec{\pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}} \vec{g} \quad \heartsuit$$

NB : Les 9/10 d'un glaçon sont immergés.

**Formule 25.13.** *Différentiel de la pression dans un fluide*

$$dp = -\rho g dz \quad \heartsuit$$

**Proposition 25.14.** *Méthode détermination équa. diff. ressort*

Il faut penser à déterminer  $l_{eq}$  pour le réinjecter dans le PFD afin d'obtenir un second membre nul dans l'équation différentielle finale.

**Formule 25.15.** *Pression en atmosphère isotherme*

$$p(z) = p_0 \exp\left(\frac{-z Mg}{RT_0}\right) = p_0 \exp\left(\frac{-z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg} \quad \text{avec} \quad M_{\text{air}} = 29 \text{g.mol}^{-1} \quad \heartsuit$$

ou

$$p(z) = p_0 \exp\left(\frac{-E_p}{k_B T_0}\right) \quad \heartsuit \quad \text{avec} \quad E_p = mgz \quad \text{l'énergie potentiel de pesanteur d'une particule.}$$

**Constante 25.16.** *Constante de Boltzmann*

$$k_B = \frac{R}{N} \quad \heartsuit$$

**Formule 25.17.** *Loi de Curie*

$$\overline{M_{z \text{tot}}} = N \frac{m^2 B}{kT}$$

**Formule 25.18.** *Capacité thermique à volume constant*

$$C_V = \frac{d\overline{E_{\text{tot}}}}{dT} = N \frac{d\overline{\epsilon}}{dT}$$

**Théorème 25.19.** *Théorème de fluctuation dissipation*

$$(\Delta E_{\text{tot}})^2 = kT^2 C_V$$

**Formule 25.20.** *.)*

$$\frac{\Delta E_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{\Delta \epsilon}{\overline{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

**Formule 25.21.** *Vitesse quadratique moyenne*

$$v^{*2} = \overline{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \heartsuit$$

**Formule 25.22.** *Travail élémentaire*

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

$$\text{NB : } \Delta E_c = -\Delta E_p$$

**Formule 25.23.** *Parabolisation de l'énergie potentielle*

$$E_p(x) \approx E_{p \text{min}} + \frac{1}{2} E_p''(x_{eq})(x - x_{eq})^2 \quad \heartsuit$$

**Formule 25.24.** *Volume infinitésimal en cylindrique*

$$d\tau = r^2 \cdot dr \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi$$

**Formule 25.25.** *Relation de Planck Einstein*

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \heartsuit \heartsuit$$

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda_0} \vec{u} = \hbar \vec{k} \quad \heartsuit \heartsuit$$

**Formule 25.26.** *Relation de De Broglie*

$$\nu_{DB} = \frac{E}{h} \quad \heartsuit \heartsuit$$

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} \quad \heartsuit \heartsuit$$

**Formule 25.27.** *Inégalité de Heisenberg*

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad \heartsuit$$

**Formule 25.28.** *Modèle de Bohr*

$$mv2\pi r = nh \quad \text{ou} \quad L_{Oz} = n\hbar; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$m$  : masse de l'électron.

$r$  : rayon de sa trajectoire circulaire.

**Proposition 25.29.** *Déviation lumière : prisme et réseau*

- **Prisme** : Le bleu est le plus dévié.
- **Réseau** : Le bleu est le moins dévié.

## Cinquième partie

# Postscriptum

## 26 Abréviations

- *NPC* : Ne pas confondre.
- *ESR* : Etat standard de référence.