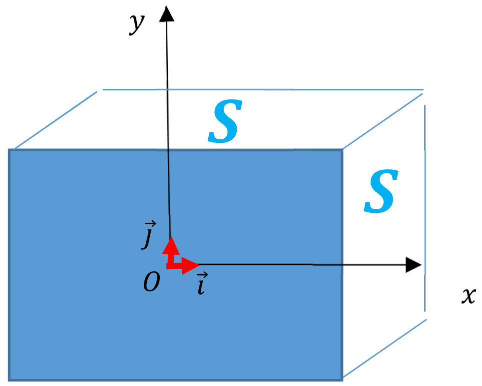
TP : CERCLE DE MOHR

1- ***ETAT DE CONTRAINTE PLANE : Rappel de cours***

Soit un élément plan soumis aux contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy}dans le plan (O, x, y). Le tenseur des contraintes s'écrit dans ces conditions :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Illustrons cela par un dessin : Représentons tout d'abord l'élément avec son système d'axe (O, x, y) et ses vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$de la base.



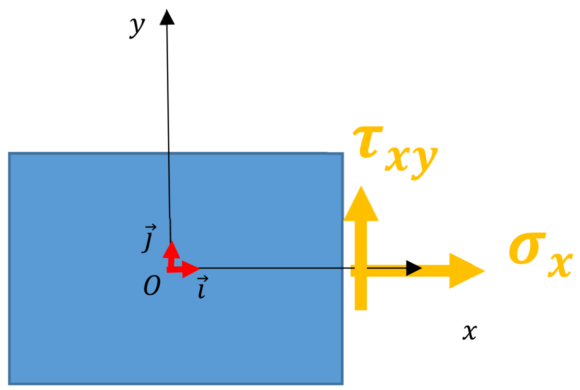
Sur la face de surface S et de normale $\vec{\imath}$ (Face de droite), on a le vecteur contrainte définit par

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{\imath} \; = \sigma_x$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{\jmath} \; = \tau_{xy}$

Soit graphiquement :



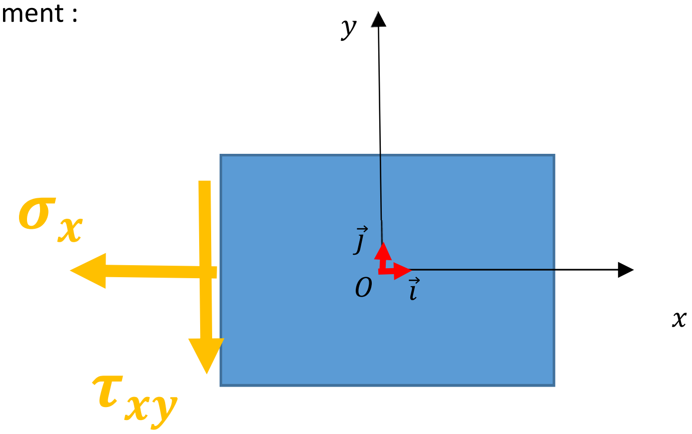
Sur la face de surface S et de normale $-\vec{\imath}$ (Face de gauche), on a le vecteur contrainte définit par

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{pmatrix}$$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{\imath} \; = -\sigma_x$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{\jmath} \; = -\tau_{xy}$

Soit graphiquement :



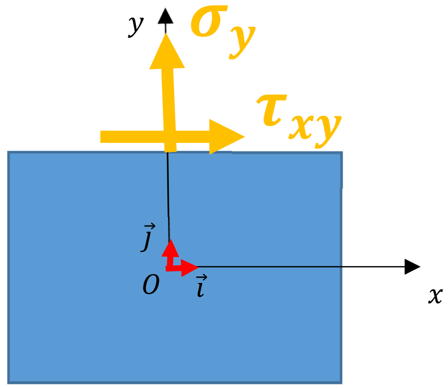
Sur la face de surface S et de normale $\vec{j}$ (Face du haut), on a le vecteur contrainte définit par

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix}$$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{\imath} = \tau_{xy}$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{j} = \sigma_y$

Soit graphiquement :



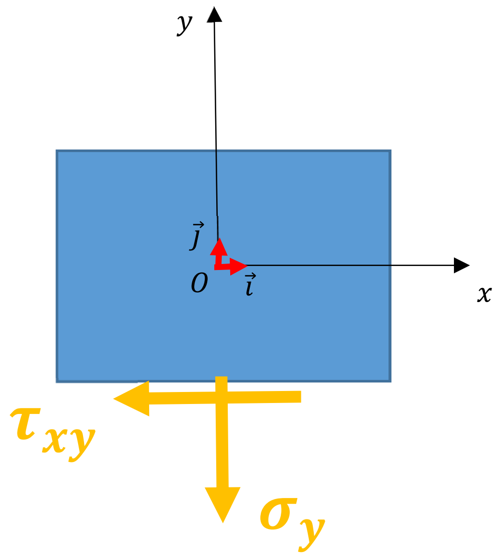
Sur la face de surface S et de normale $-\vec{j}$ (Face du bas), on a le vecteur contrainte définit par

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{pmatrix}$$

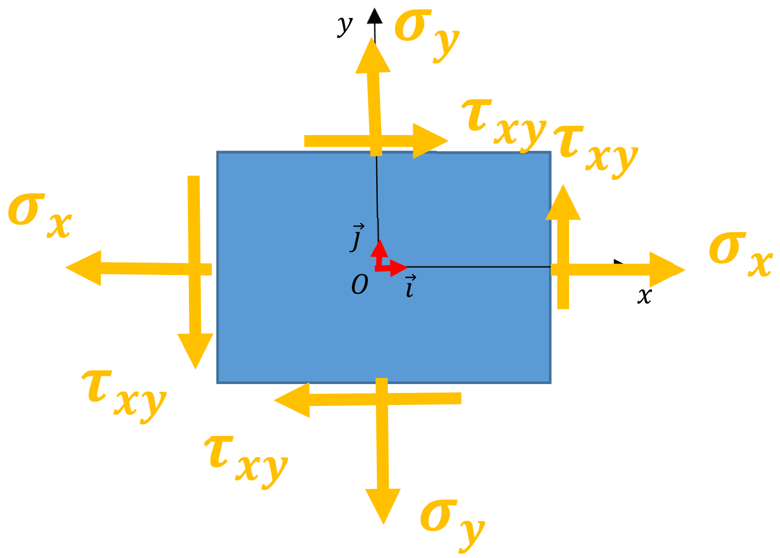
La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{\imath} = -\tau_{xy}$

La composante normale sur cette face est donnée par : $\vec{T}.\vec{j} = -\sigma_y$

Soit graphiquement :



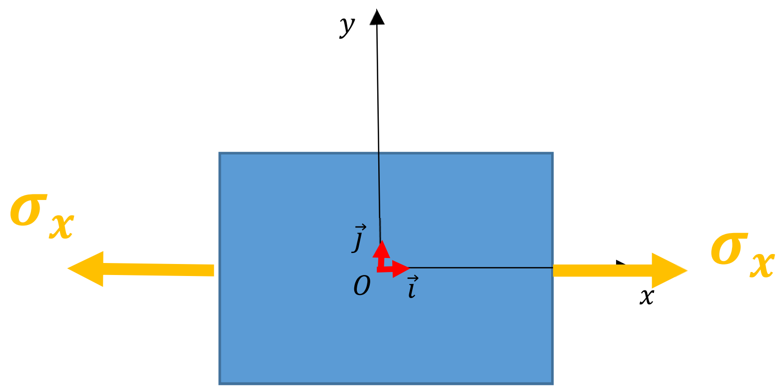
D’où finalement, la répartition des contraintes sur toutes les faces :



2- *UN EXEMPLE SIMPLE : TRACTION*

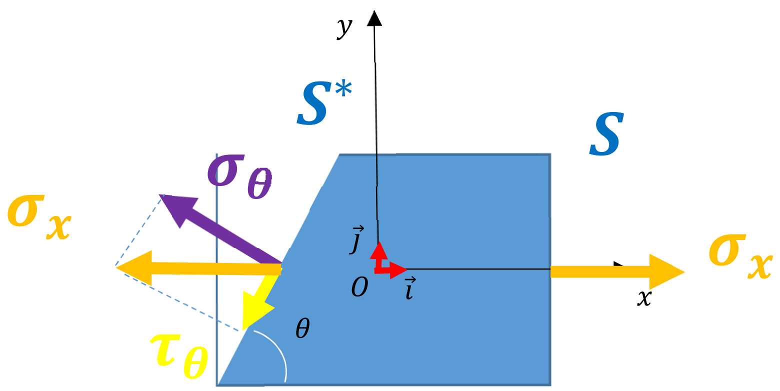
Reprenons notre élément plan. Le tenseur des contraintes s'écrit dans ce cas

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Et si l'une des deux facettes n'étaient pas orienté suivant l'un des axes du plan définit par le repère(O, x, y).

Regardons le cas de figure suivant toujours dans l'exemple de la traction simple



En utilisant l'angle θ, on pourrait simplement écrire :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\tau_\theta}{\sigma_x} \\ \sin\theta = \dfrac{\sigma_\theta}{\sigma_x} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \tau_\theta = \sigma_x \cos\theta \\ \sigma_\theta = \sigma_x \sin\theta \end{cases}$$

En fait ce résultat n'est pas correct car la contrainte σ_x s'exerce à droite sur une surface S et à gauche sur une surface S^* plus grande. Pour avoir l'équilibre des forces, on écrit donc : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\tau_\theta S^*}{\sigma_x S} \\ \sin\theta = \frac{\sigma_\theta S^*}{\sigma_x S} \end{cases}$ Soit $\begin{cases} \tau_\theta = \sigma_x \cos\theta \frac{S}{S^*} \\ \sigma_\theta = \sigma_x \sin\theta \frac{S}{S^*} \end{cases}$

Par construction géométrique, on a $\frac{S}{S^*} = \sin\theta$, d'où :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x \sin^2\theta \\ \tau_\theta = \sigma_x \cos\theta \sin\theta \end{cases}$$

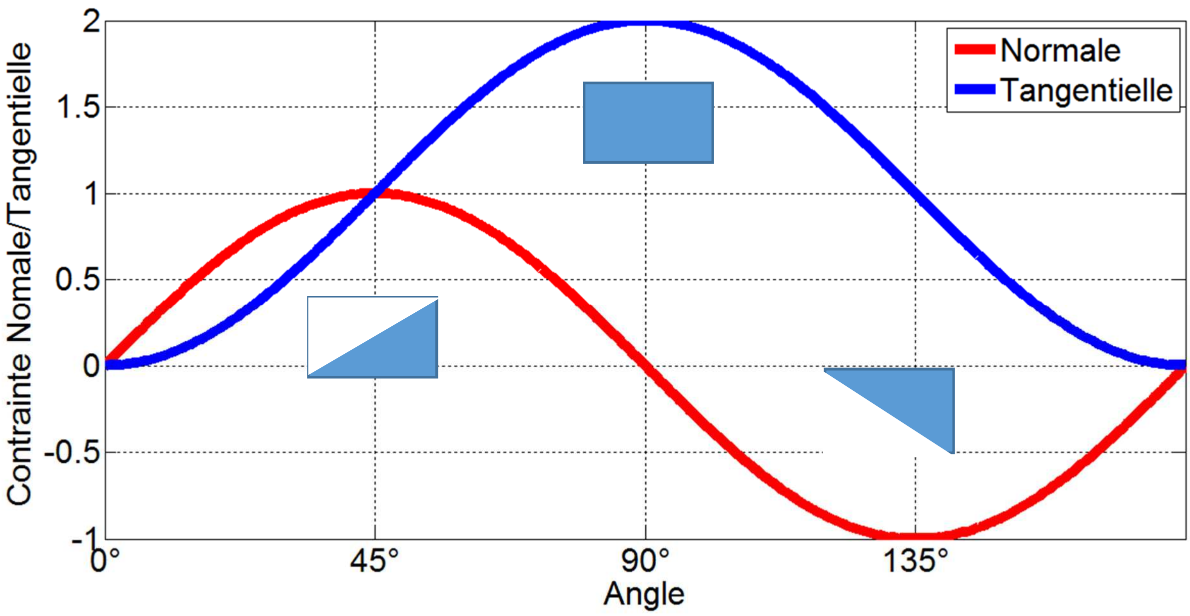
Les relations trigonométriques donnent :

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ et $\cos\theta \sin\theta = \frac{sin2\theta}{2}$

En reportant cela dans les composantes du vecteur contrainte :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \tau_\theta = \dfrac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

<u>Interprétation :</u>

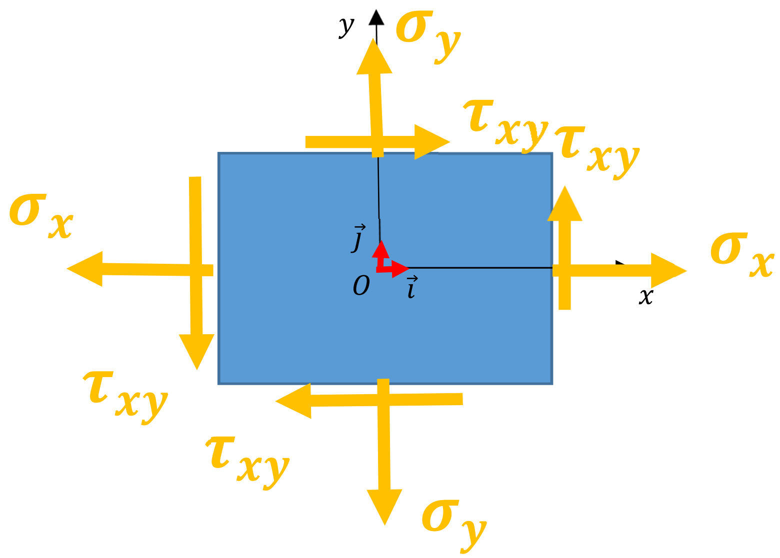


3- *UN AUTRE EXEMPLE SIMPLE : TRACTION+CISAILLEMENT*

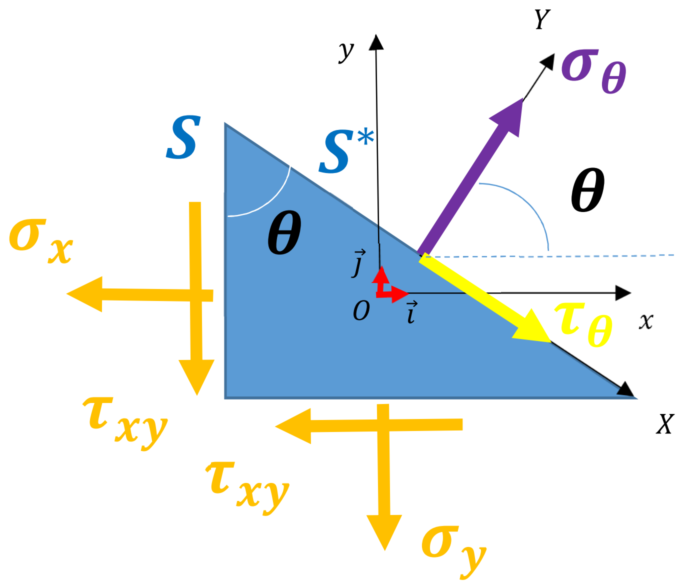
Reprenons le cas général d'un tenseur des contraintes

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

On a donc, la configuration suivante en termes de contrainte sur les 4 faces de l'élément

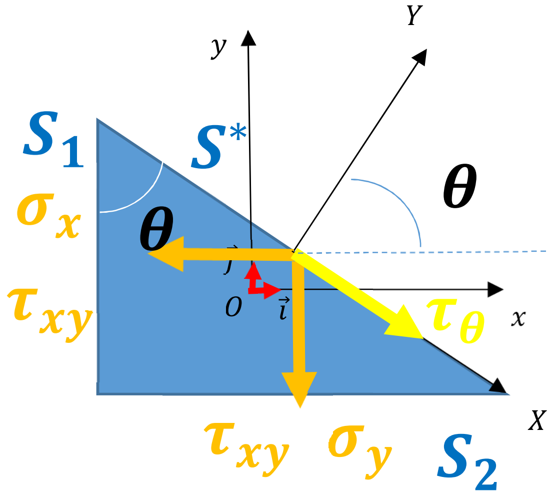


Imaginons cette fois comme précédemment, que l'élément ai la forme suivante :



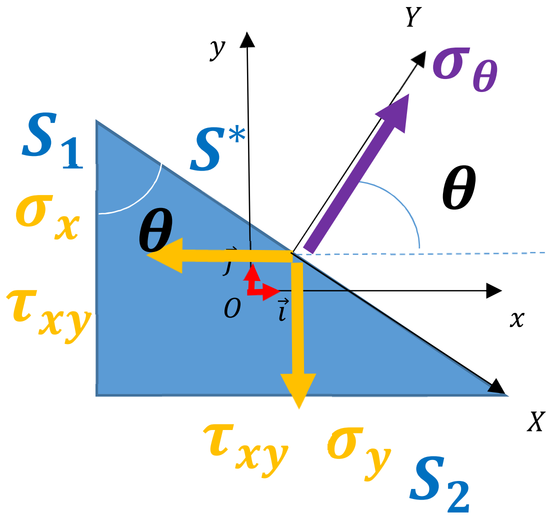
Essayons d'exprimer les vecteurs contraintes σ_θ, τ_θ en fonction des contraintes σ_x, $\sigma_y$et τ_{xy}. Appliquons l'équilibre des forces dans le repère (X, Y).

Suivant l'axe X, on peut écrire :



$$\tau_\theta S^* + (\tau_{xy}S_1 + \sigma_y S_2)\cos\theta - (\tau_{xy}S_2 + \sigma_x S_1)\sin\theta = 0$$

Suivant l'axe Y, on peut écrire :



$$\sigma_\theta S^* - (\tau_{xy}S_1 + \sigma_y S_2)\sin\theta - (\tau_{xy}S_2 + \sigma_x S_1)\cos\theta = 0$$

En rassemblant les deux équations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \sigma_\theta S^* = (\tau_{xy}S_1 + \sigma_y S_2)\sin\theta + (\tau_{xy}S_2 + \sigma_x S_1)\cos\theta \\ \tau_\theta S^* = -(\tau_{xy}S_1 + \sigma_y S_2)\cos\theta + (\tau_{xy}S_2 + \sigma_x S_1)\sin\theta \end{cases}$$

Tout d'abord, peu indiquer que la surface inclinée est plus grande que les deux faces à gauche et en bas.

$\frac{S_1}{S^*} = \cos\theta$ et $\frac{S_2}{S^*} = \sin\theta$

D'où,

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \left(\tau_{xy}\cos\theta + \sigma_y \sin\theta\right)\sin\theta + \left(\tau_{xy}\sin\theta + \sigma_x\cos\theta\right)\cos\theta \\ \tau_\theta = -\left(\tau_{xy}\cos\theta + \sigma_y\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\tau_{xy}\sin\theta + \sigma_x\cos\theta\right)\sin\theta \end{cases}$$

En regroupant, les fonctions trigonométriques, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\cos\theta\sin\theta \\ \tau_\theta = \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos\theta\sin\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\tau_{xy} \end{cases}$$

Les relations trigonométriques donnent :

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ et $\cos\theta\sin\theta = \frac{sin2\theta}{2}$

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x\dfrac{1+\cos 2\theta}{2} + \sigma_y\dfrac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\tau_{xy}\dfrac{sin2\theta}{2} \\ \tau_\theta = \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\dfrac{sin2\theta}{2} + \left(\dfrac{1-\cos 2\theta}{2} - \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\tau_{xy} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}sin2\theta \\ \tau_\theta = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

4- *CERCLE DE MOHR : Formalisme*

On reprend le dernier système d'équation :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}sin2\theta \\ \tau_\theta = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

On peut remarquer que ces deux équations représentent un cercle dans le système d'axe (X, Y). En effet, on peut écrire :

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}sin2\theta \\ \tau_\theta = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

En faisant le calcul suivant $\left(\sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\right)^2 + \tau_\theta^2$, on obtient :

$$\left(\sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}sin2\theta\right)^2 + \left(\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2$$

Soit :

$$\left(\sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right)^2 + \tau_\theta^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + 2\tau_{xy}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta \, sin2\theta + \tau^2{}_{xy} sin^2 2\theta$$
$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 sin^2 2\theta - 2\tau_{xy}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sin2\theta \cos 2\theta + \tau^2{}_{xy} \cos^2 2\theta$$

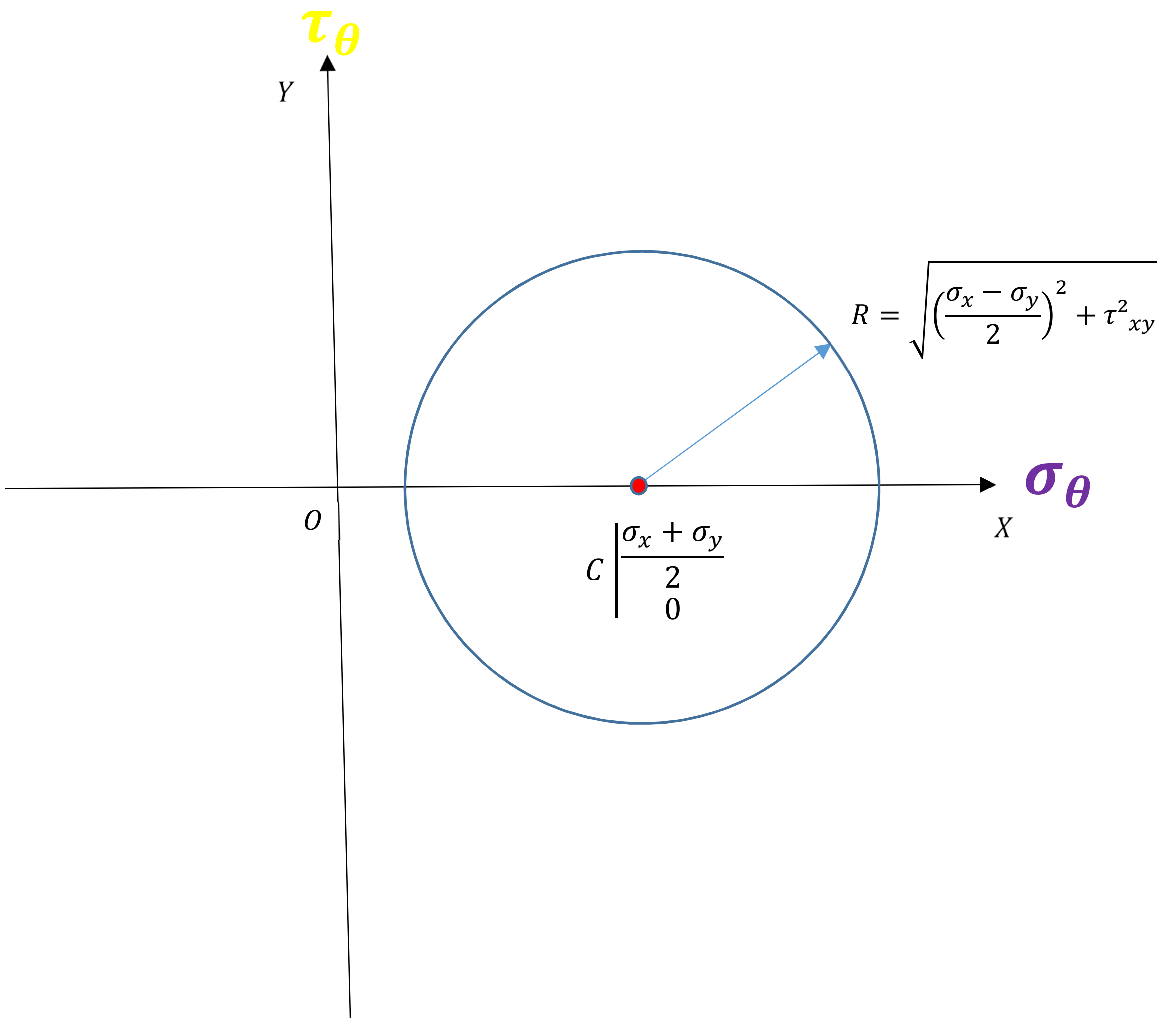
Ou encore :

$$\left(\sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}$$

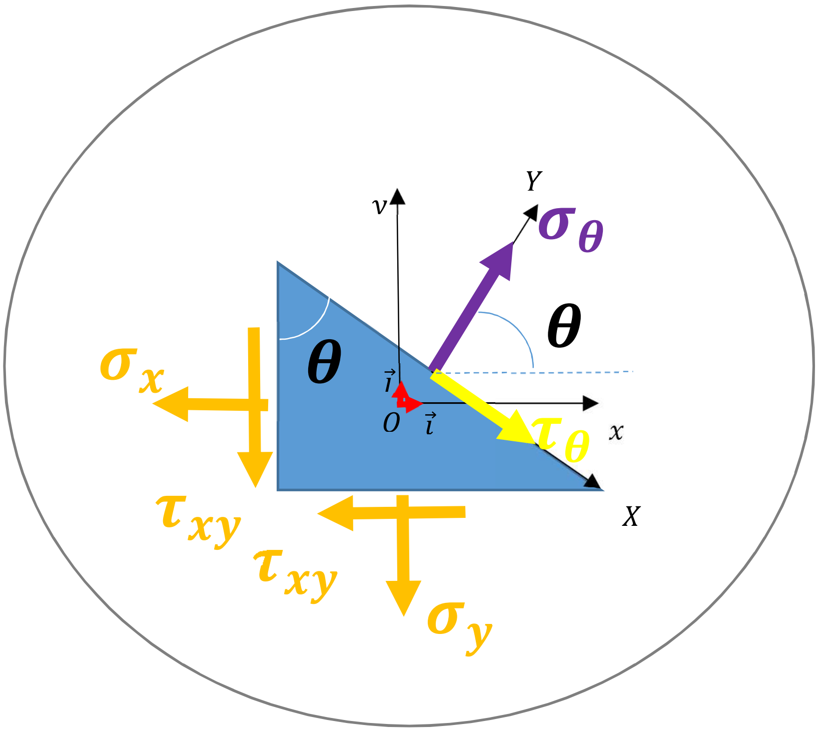
C'est l'équation d'un cercle centré dans le repère (X, Y) en $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$ et

de rayon $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}}$. C'est ce que l'on appelle le cercle de Mohr.

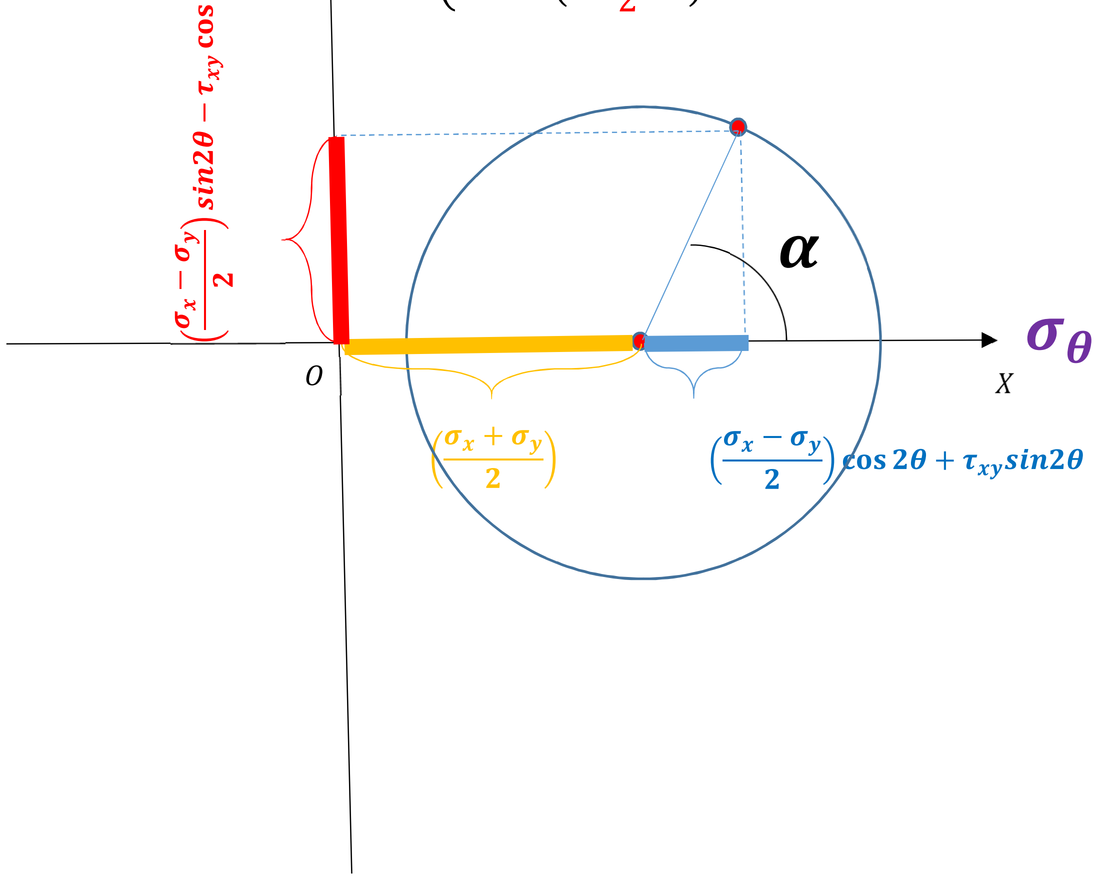
Dessinons le système (X, Y) dont les deux axes sont orientés suivant les deux contraintes σ_θ et τ_θ



On peut donc représenter n'importe quelle situation sur le cercle se rapportant à une configuration particulière de l'élément :



$$\begin{cases} \sigma_\theta = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} sin2\theta \\ \tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$



5- CERCLE DE MOHR : Contraintes normales maximales

Cherchons les conditions sur θ qui vérifient des contraintes normales maximales/minimales :

On a : $\begin{cases} \sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} sin2\theta \\ \tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$

Calculons la dérivée $\frac{d\sigma_\theta}{d\theta}$:

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + 2\tau_{xy} cos2\theta$$

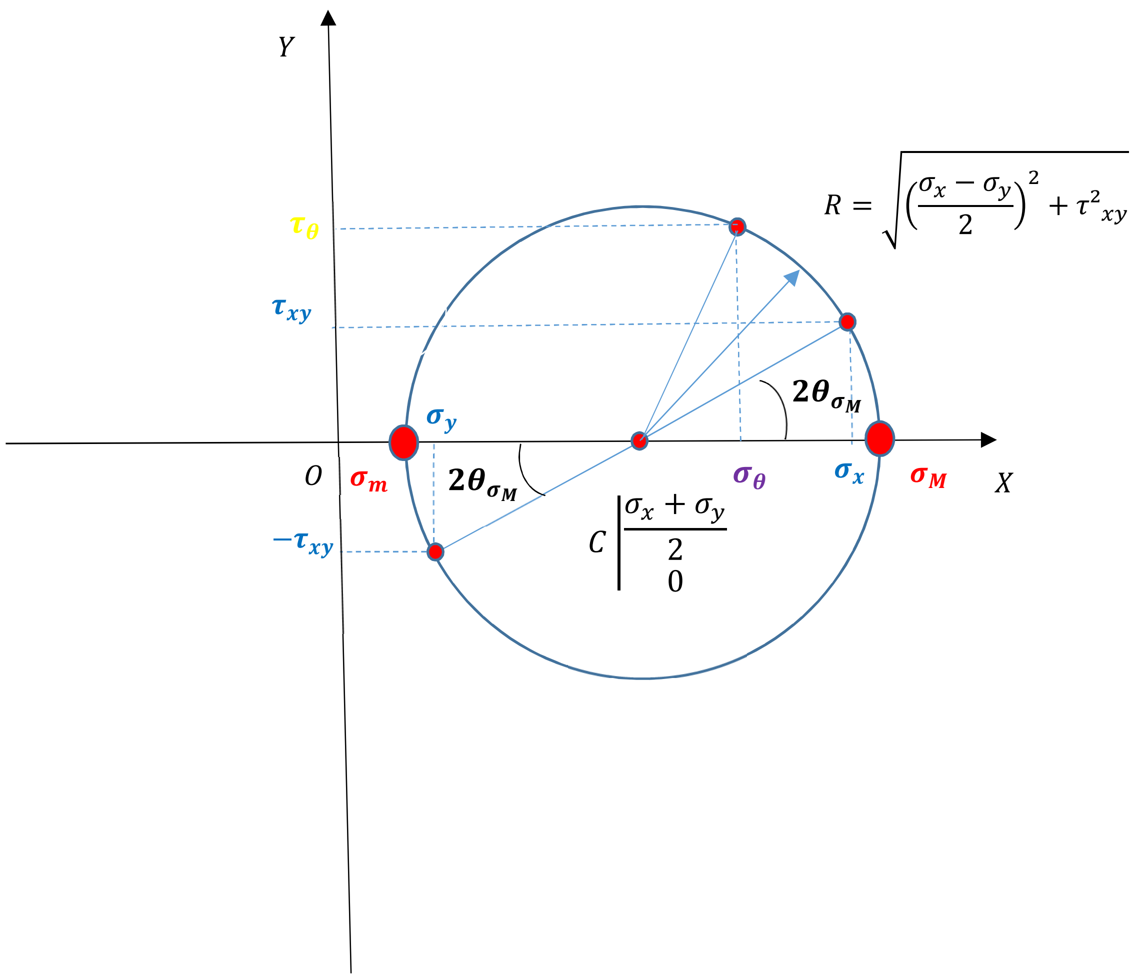
Recherchons la condition où $\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0;$

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + 2\tau_{xy} cos2\theta = 0 \rightarrow \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta - \tau_{xy} cos2\theta = 0$$

Ce qui est intéressant c'est que la condition qui vérifient l'existence d'un maximum de la contrainte normale est que la contrainte tangentielle soit nulle.

En effet, on a $\tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta = 0$

Soit ici, la condition sur θ : $tan(2\theta_{\sigma_M}) = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}$



Calculons les valeurs maximales des contraintes normales :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta_{\sigma_M}} - \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta_{\sigma_M} + \tau_{xy} sin2\theta_{\sigma_M} \\ \tau_{\theta_{\sigma_M}} = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sin2\theta_{\sigma_M} - \tau_{xy}\cos 2\theta_{\sigma_M} \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} \sigma_{\theta_{\sigma_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \cos 2\theta_{\sigma_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy} tan2\theta_{\sigma_M}\right) \\ \tau_{\theta_{\sigma_M}} = \cos 2\theta_{\sigma_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) tan2\theta_{\sigma_M} - \tau_{xy}\right) \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} \sigma_{\theta_{\sigma_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \cos 2\theta_{\sigma_M}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}\right) \\ \tau_{\theta_{\sigma_M}} = \cos 2\theta_{\sigma_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)} - \tau_{xy}\right) = 0 \end{cases}$

Ou encore : $\begin{cases} \sigma_{\theta_{\sigma_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^2 2\theta_{\sigma_M}}}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}\right) \\ \tau_{\theta_{\sigma_M}} = \cos 2\theta_{\sigma_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)} - \tau_{xy}\right) = 0 \end{cases}$

Finalement, on obtient : $\begin{cases} \sigma_{\theta_{\sigma_M}} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}} \\ \tau_{\theta_{\sigma_M}} = 0 \end{cases}$

On aurait pu utiliser une autre méthode en calculant les valeurs propres associées au tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Faisons une recherche des valeurs propres et des vecteurs propres associés à cette matrice

- Valeurs propres : $det(\bar{\bar{\sigma}} - \lambda\bar{\bar{I}}) = 0$

  Soit $det\begin{pmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{pmatrix} = 0$, on obtient l'équation caractéristique :

  $(\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau^2{}_{xy} = 0 \rightarrow \lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\lambda + \sigma_x\sigma_y - \tau^2{}_{xy} = 0$

  Cherchons le discriminant de cette équation : $\Delta = (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau^2{}_{xy})$

  soit :

  $$\Delta = \sigma^2{}_x + \sigma^2{}_y + 2\sigma_x\sigma_y - 4\sigma_x\sigma_y + 4\tau^2{}_{xy} = \sigma^2{}_x + \sigma^2{}_y - 2\sigma_x\sigma_y + 4\tau^2{}_{xy}$$

  D'où :

  $$\Delta = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2{}_{xy} = 4\left\{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}\right\}$$

  Les valeurs propres sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sigma_m = \dfrac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}} \\ \lambda_2 = \sigma_M = \dfrac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}} \end{cases}$$

6- CERCLE DE MOHR : Contraintes tangentielles maximales

Cherchons les conditions sur θ qui vérifient des contraintes tangentielles maximales/minimales :

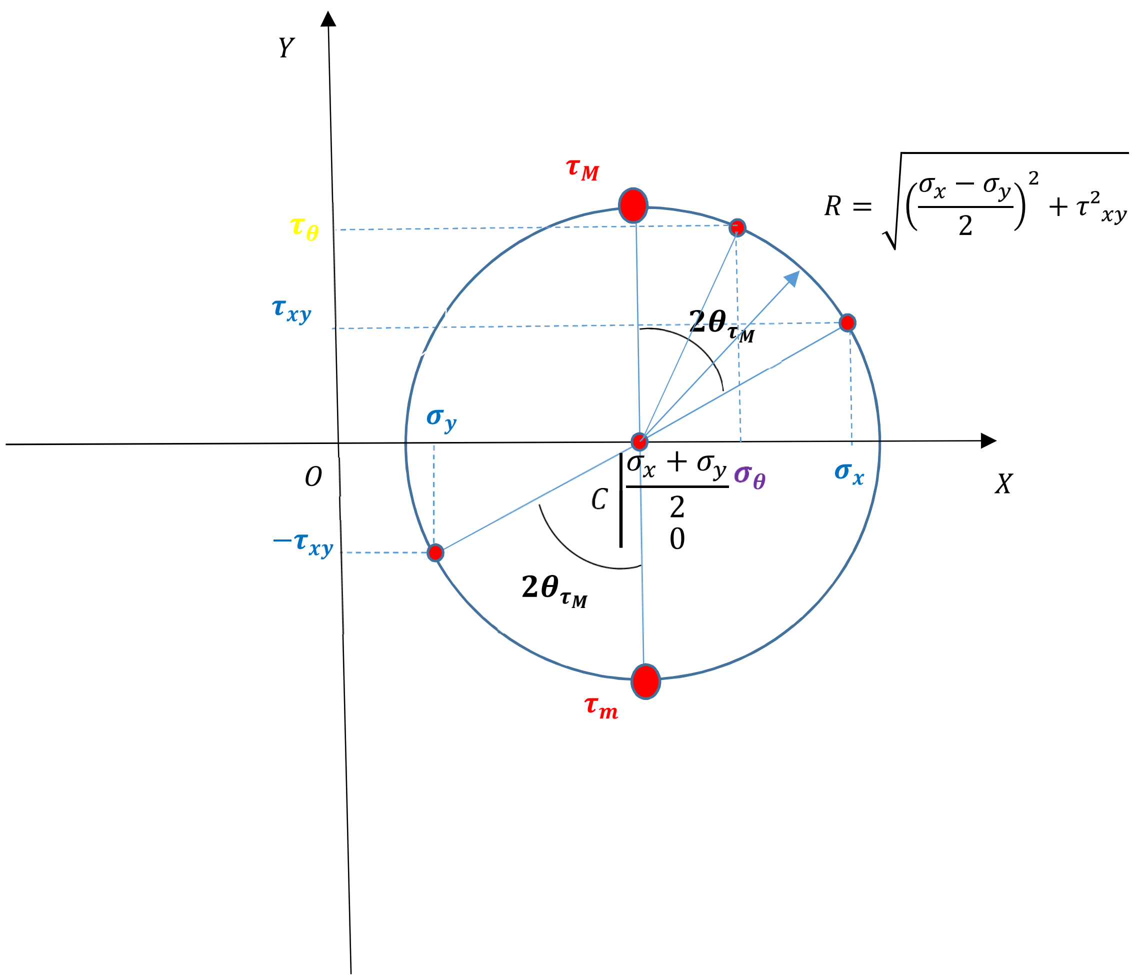
On a : $\begin{cases} \sigma_\theta - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} sin2\theta \\ \tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$

Calculons la dérivée $\frac{d\tau_\theta}{d\theta}$: $\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + 2\tau_{xy} sin2\theta$

Recherchons la condition où $\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0$; $\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + 2\tau_{xy} sin2\theta = 0 \rightarrow \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} sin2\theta = 0$

Ce qui est intéressant c'est que la condition qui vérifient l'existence d'un maximum de la contrainte tangentielle est que la contrainte normale soit nulle. En effet, on a $\sigma_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) cos2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = 0$

Soit ici, la condition sur θ : $tan(2\theta_{\tau_M}) = -\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}{\tau_{xy}}$



Calculons les valeurs maximales des contraintes tangentielles :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta_{\tau_M}} - \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta_{\tau_M} + \tau_{xy} sin2\theta_{\tau_M} \\ \tau_{\theta_{\tau_M}} = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sin2\theta_{\tau_M} - \tau_{xy}\cos 2\theta_{\tau_M} \end{cases}$$

Soit : $$\begin{cases} \sigma_{\theta_{\tau_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \cos 2\theta_{\tau_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy} tan2\theta_{\tau_M}\right) \\ \tau_{\theta_{\tau_M}} = \cos 2\theta_{\tau_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) tan2\theta_{\tau_M} - \tau_{xy}\right) \end{cases}$$

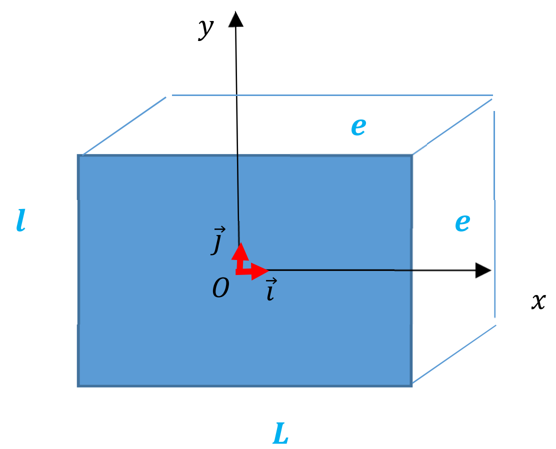
D'où : $$\begin{cases} \sigma_{\theta_{\tau_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \cos 2\theta_{\tau_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) - \tau_{xy}\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}{\tau_{xy}}\right) = 0 \\ \tau_{\theta_{\tau_M}} = -\cos 2\theta_{\tau_M}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}}{\tau_{xy}}\right) \end{cases}$$

Ou encore : $$\begin{cases} \sigma_{\theta_{\tau_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \cos 2\theta_{\tau_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) - \tau_{xy}\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}{\tau_{xy}}\right) = 0 \\ \tau_{\theta_{\tau_M}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1+tan^2 2\theta_{\tau_M}}}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}}{\tau_{xy}}\right) \end{cases}$$

Finalement, on obtient : $$\begin{cases} \sigma_{\theta_{\tau_M}} - \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) = \cos 2\theta_{\tau_M}\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) - \tau_{xy}\frac{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)}{\tau_{xy}}\right) = 0 \\ \tau_{\theta_{\tau_M}} = \mp\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}} \end{cases}$$

7- *CERCLE DE MOHR : TRAVAUX PRATIQUES*

Soit une plaque rectangulaire d'une épaisseur de $e = 1mm$, de longueur $L = 300\ mm$ et largeur $l = 150\ mm$ tel que représentée sur le dessin. On considère pour ce problème de calcul de contrainte comme un problème plan.



On applique sur cet élément les forces suivantes (exprimées en kN) :

$$\begin{cases} x = -\frac{L}{2}: & \overrightarrow{F_1} = -30\vec{\imath}; \overrightarrow{T_1} = +15\vec{\jmath} \\ x = +\frac{L}{2}: & \overrightarrow{F_2} = +30\vec{\imath}; \overrightarrow{T_2} = -15\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{l}{2}: & \overrightarrow{F_3} = -30\vec{\jmath}; \overrightarrow{T_3} = +30\vec{\imath} \\ x = +\frac{l}{2}: & \overrightarrow{F_4} = +30\vec{\imath}; \overrightarrow{T_4} = -30\vec{\imath} \end{cases}$$

1- Dessiner les forces appliquées sur la plaque.
2- Quel type de sollicitation subi cette plaque ?
3- Calculer pour chaque face les contraintes σ_x, $\sigma_y$et τ_{xy} associées à chacune des forces. Donner les unités.
4- En déduire le tenseur des contraintes associé à ces contraintes.
5- Calculer les contraintes normales maximales σ_m, σ_M . On utilisera les deux méthodes précisées dans les paragraphes précédents.
6- En déduire l'angle $\boldsymbol{\theta_{\sigma_M}}$pour lequel on réalise ces contraintes normales maximales
7- Calculer les contraintes tangentielles maximales τ_m, τ_M
8- En déduire l'angle $\boldsymbol{\theta_{\tau_M}}$pour lequel on réalise ces contraintes tangentielles maximales
9- Tracer le cercle de Mohr relatif à ces états de contraintes