CAPDEVILA Pierre

Soit S un système isolé et soit R un référentiel galiléen dans lequel on effectue les mesures. Le principe de conservation d'énergie stipule que l'énergie totale de S reste constante au cours du temps. Cette énergie est la somme de termes nombreux et variés, que l'on peut regrouper en grandes familles : énergie cinétique, énergie potentielle (élastique, gravitationnelle, électrostatique), calorifique, de rayonnement, chimique, etc… Appelons $E_{\mathrm{C}}(t)$ l'énergie cinétique totale de S à l'instant t, et $E_{\mathrm{X}}(t)$ la somme des autres termes. Le principe de conservation d'énergie permet d'écrire :

$$E_{\mathrm{X}}(t)+E_{\mathrm{C}}(t)=C \qquad (1)$$

Où C est l'énergie totale de S. E_{X} et E_{C} peuvent varier au cours du temps : lors de chocs non élastiques entre objets par exemple, l'énergie cinétique peut diminuer et l'énergie thermique augmenter. Par contre C reste constante, quoi qu'il arrive à l'intérieur de S.

Supposons que S soit constitué de n objets de masses $m_1, m_2 \cdots m_n$ animés, à un instant t, de vitesses $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n$, alors :

$$E_{\mathrm{C}}(t)=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\cdots+\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}^2$$

Utilisons maintenant un autre référentiel galiléen R', dont la vitesse mesurée dans R est $\vec{V}$. Les vitesses des mêmes objets à l'instant t sont $\overrightarrow{w_1}=\vec{v}_1-\vec{V}$, $\overrightarrow{w_2}=\vec{v}_2-\vec{V}$ … $\overrightarrow{w_{\mathrm{n}}}=\vec{v}_{\mathrm{n}}-\vec{V}$ et le principe de conservation d'énergie permet d'écrire :

$$E_{\mathrm{X}}(t)+\frac{1}{2}m_1\vec{w}_1^2+\frac{1}{2}m_2\vec{w}_2^2+\cdots+\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}\vec{w}_{\mathrm{n}}^2=C' \qquad (2)$$

Où C' est l'énergie totale de S mesurée dans R', qui est constante dans le temps, quoi qu'il arrive à l'intérieur de S.

On note que C' est différente de C car l'énergie cinétique dépend du référentiel galiléen choisi. De toutes manières on sait que l'énergie totale de S n'est définie qu'à une constante additive près. Par contre l'énergie E_{X} est la même que dans (1) car elle ne contient que des termes pour lesquels le changement de référentiel n'a pas d'incidence.

Développons l'expression (2) :

$$E_{\mathrm{X}}(t)+\frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1-\vec{V}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2-\vec{V}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}\left(\vec{v}_{\mathrm{n}}-\vec{V}\right)^2=C'$$

$$E_{\mathrm{X}}(t)+\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2+\cdots+\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}^2+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\right)\vec{V}^2-\vec{V}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right)=C'$$

$$C+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\right)\vec{V}^2-\vec{V}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right)=C'$$

$$\vec{V}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right)=C-C'+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\right)\vec{V}^2$$

Comme $\left(m_1+m_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\right)$ et $\vec{V}$ sont des constantes, l'expression $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}$ est nécessairement constante dans le temps, quoi qu'il arrive à l'intérieur de S. C'est le principe de la conservation de la quantité de mouvement.