

I. Etude préliminaire

1- Données du système

L'étude porte sur une centrifugeuse d'entraînement pour les astronautes. Celle-ci est constituée de trois sous ensembles :

- le bâti noté (0).
- le bras (OA) noté (1). Celui-ci est monté sur le bâti par une liaison qui permet une rotation sur l'axe $O\vec{z}_0$. On note $\overrightarrow{OA} = a\vec{y}_1$.
- une cabine, avec un pilote noté (2). Le centre de masse de ce solide noté G_2 est géométriquement confondu avec le point A. Ce solide (2) est en liaison complexe avec (1). Cette liaison permet deux rotations simultanées autour de l'axe $A\vec{x}_1$ et $A\vec{z}$.

On admettra pour les pièces du système les données suivantes :

- le solide (1) est sans masse.
- le solide (2) est un cylindre de masse M.
- le système est plongé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.

2- Paramétrage du système :

Pour mener à bien cette étude, quatre repères ont été définis :

R0 : Galiléen lié au bâti (0) ($O, \vec{x}_0 \vec{y}_0 \vec{z}_0$)

R1 : Galiléen lié au bras (1) ($O, \vec{x}_1 \vec{y}_1 \vec{z}_1$)

R2 : Galiléen lié à la cabine (2) ($A, \vec{x}_2 \vec{y}_2 \vec{z}_2$)

R : Galiléen lié à la cabine (2) ($A, \vec{x} \vec{y} \vec{z}$)

Le bâti (0) est galiléen. Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$.

3- Les mouvements du système :

Le bras (1) est lié au bâti (0) par une liaison pivot. Le paramètre de mouvement du bras (1) par rapport au bâti (0) est θ :

$$\boxed{\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)} \quad \text{avec } \vec{OA} = a\vec{y}_1$$

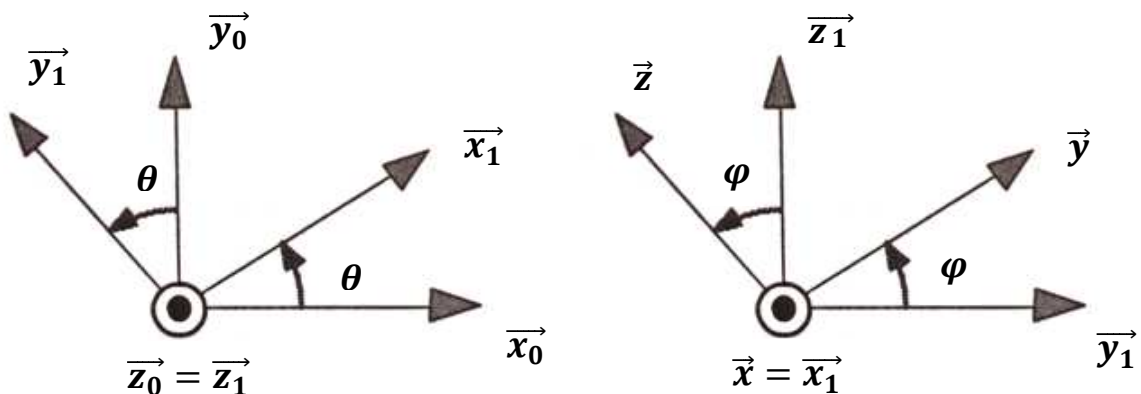
La cabine (2) est liée au bras par une liaison complexe permettant deux rotations simultanées, une autour de l'axe $A\vec{x}_1$ et une autre autour de $A\vec{z}$. Le paramètre du mouvement de roulis de la cabine (2) par rapport au bras (1) est φ .

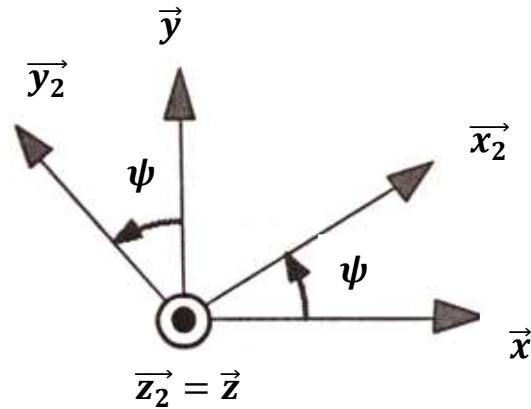
$$\boxed{\varphi(t) = (\vec{y}_1, \vec{y})}$$

Le paramètre du mouvement de tangage de la cabine (2) par rapport au bras (1) est ψ .

$$\boxed{\psi(t) = (\vec{x}, \vec{x}_2)}$$

A l'arrêt, les angles θ et α sont nuls.





4- Description des liaisons :

Bilan : Pivot (1)/(0) ; pivot (2)/(1) ; pivot (2)/(1) ; Actionneurs (couples) ; pesanteur sur(2).

$$\text{Pivot (1)/(0)} \rightarrow [T \ 1 \rightarrow 0] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{10}} \\ \overrightarrow{M_{O,10}} \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\text{Pivot (2)/(1) (roulis)} \rightarrow [T \ 2 \rightarrow 1] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{21}} \\ \overrightarrow{M_{A,21}} \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{Pivot (2)/(1) (tangage)} \rightarrow [T \ 2 \rightarrow 1] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{21}} \\ \overrightarrow{M_{A,21}} \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{Pesanteur} \rightarrow [T \ \pi \rightarrow 2] = \begin{bmatrix} M \vec{g} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$\text{Moteur principal} \rightarrow [T \ \text{moteur principal}] = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\text{Moteur de roulis} \rightarrow [T \ \text{moteur de roulis}] = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{12, \text{roulis}} \cdot \vec{y} \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{Moteur de tangage} \rightarrow [T \ \text{moteur de tangage}] = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{12, \text{tangage}} \cdot \vec{x} \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

II. Détermination de l'accélération « ressentie » par le pilote.

C'est l'accélération ressentie au niveau de la tête du pilote qui est le paramètre important pour l'étude des phénomènes physiologiques. Pour simplifier les lois de commande de la centrifugeuse, on installe donc le siège pilote dans la nacelle de telle façon que le point A, centre de la tête du pilote se trouve aligné sur les axes de rotation des deux liaisons pivot bras / anneau et anneau / nacelle.

Le système est composé de deux types de mouvement, un mouvement d'entraînement de paramètre $\theta(t)$ et de deux autres mouvements relatifs de paramètre $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

$$[\Omega_{2/1}] = {}_A \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t)\vec{x}_1 + \dot{\psi}(t)\vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$[\Omega_{1/0}] = {}_O \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t)\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = {}_A \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t)\vec{z}_1 \\ -a\dot{\theta}(t)\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

$$[\Omega_{2/0}] = {}_A \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t)\vec{x}_1 + \dot{\psi}(t)\vec{z}_2 + \dot{\theta}(t)\vec{z}_1 \\ -a\dot{\theta}(t)\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \vec{z}_2 = \cos \varphi(t)\vec{z}_1 - \sin \varphi(t)\vec{y}_1$$

$$[\Omega_{2/0}] = {}_A \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t)\vec{x}_1 + \dot{\psi}(t) \cos \varphi(t)\vec{z}_1 - \dot{\psi}(t) \sin \varphi(t)\vec{y}_1 + \dot{\theta}(t)\vec{z}_1 \\ -a\dot{\theta}(t)\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

A partir de là, nous savons que la vitesse $\overrightarrow{V_{A(2/0)}} = -a\dot{\theta}(t)\vec{x}_1$

On peut alors en déduire l'accélération du système :

$$\overrightarrow{a_{A(2/0)}} = -a\ddot{\theta}(t)\vec{x}_1 - a\dot{\theta}(t) \frac{d\vec{x}_1}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_{A(2/0)}} = -a\ddot{\theta}(t)\vec{x}_1 + (-a\dot{\theta}(t)\dot{\varphi}(t)\vec{x}_1 - a\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t)\vec{z}_2 - a\dot{\theta}^2(t)\vec{z}_1) \wedge \vec{x}_1$$

$$\text{Or } \vec{z}_2 = \cos \varphi(t)\vec{z}_1 - \sin \varphi(t)\vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{a_{A(2/0)}} = -a\ddot{\theta}(t)\vec{x}_1 - a\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t) \cos \varphi(t)\vec{y}_1 - a\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t) \sin \varphi(t)\vec{z}_1 - a\dot{\theta}^2(t)\vec{y}_1$$

Afin de connaître les accélérations dans les 3 directions que « ressent » le pilote, on projette cette accélération dans le repère R lié à la cabine.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \vec{y}_1 &= \cos \varphi(t) \vec{y} - \sin \varphi(t) \vec{z} \\ \vec{z}_1 &= \cos \varphi(t) \vec{z} + \sin \varphi(t) \vec{y}\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{A(2/0)}} &= -a\ddot{\theta}(t)\vec{x} - a\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t)[\cos^2 \varphi(t)\vec{y} - \cos \varphi(t) \sin \varphi(t)\vec{z} + \sin^2 \varphi(t) \vec{y} \\ &\quad + \sin \varphi(t) \cos \varphi(t)\vec{z}] - a\dot{\theta}^2(t)[\cos \varphi(t)\vec{y} - \sin \varphi(t)\vec{z}]\end{aligned}$$

Soit :

- $\overrightarrow{ax}$, l'accélération longitudinale ressentie par le pilote, dans les phases de freinage ou d'accélération de l'avion par exemple.
- $\overrightarrow{ay}$, l'accélération latérale, qui doit rester la plus faible possible car une accélération latérale de quelques g peut être mortelle.
- $\overrightarrow{az}$, l'accélération verticale, pratiquement égale à l'accélération résultante. C'est à partir de cette composante, donnée dans les profils d'accélération d'entraînement des pilotes, que l'on commande la vitesse de rotation du bras.

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \overrightarrow{ax} &= -a\ddot{\theta}(t) \\ \overrightarrow{ay} &= -a\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t) - a\dot{\theta}^2(t) \cos \varphi(t) \\ \overrightarrow{az} &= +a\dot{\theta}^2(t) \sin \varphi(t)\end{aligned}$$

