Licence 2ème année — Année 2005-2006

Examen de Mécanique du Solide

Lundi 23 janvier 2006 (14h00 – 15h40)

Exercice 1

Une boule homogène de rayon a et de masse m est abandonnée sans vitesse initiale au pôle supérieur d'une boule homogène plus grande, fixe, de rayon b. On notera μ_s le facteur de frottement entre ces deux solides et on fera l'étude relativement au référentiel fixe d'origine O, O étant aussi le centre de la boule de rayon b. On appellera G le centre de masse de la boule de rayon a, $\dot{\varphi}\overline{e_z}$ le vecteur vitesse de rotation de cette dernière et θ l'angle que fait la direction OG avec l'horizontale.

1) Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la boule de rayon a. Projeter le résultat sur les axes radial et orthoradial définis, respectivement, par les vecteurs unitaires $\overline{e_r}$ et $\overline{e_\theta}$.
2) Appliquer le théorème du moment cinétique pour obtenir une troisième équation. On rappelle que le moment d'inertie d'une boule de masse m et de rayon a, par rapport à tout axe qui passe par son centre de masse vaut : $\frac{2}{5}ma^2$.
3) Relier $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$ en utilisant la condition de roulement sans glissement.
4) Combiner les résultats des trois premières questions pour établir une équation du mouvement sous la forme d'une équation différentielle du deuxième ordre en θ :
$$\ddot{\theta} = -\frac{5}{7}g\frac{\cos\theta}{a+b}.$$
5) Intégrer cette équation en utilisant les conditions initiales données au début de l'énoncé $\left(\theta(t=0)=\frac{\pi}{2} \text{ et } \dot{\theta}(t=0)=0\right)$. En déduire l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ, a, b et g (accélération de la pesanteur).
6) Etablir, en fonction de μ_s et de θ, l'inégalité traduisant l'absence de glissement. Tracer, en fonction de θ, le graphe qui permet de traduire cette inégalité et en déduire les différentes phases du mouvement lorsque θ diminue à partir de la position initiale $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Une tige AB d'épaisseur négligeable, de longueur 2ℓ et de masse M, est mobile autour d'un axe horizontal passant par son extrémité A. L'extrémité B est fixée à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un support immobile.

1) Dans la position d'équilibre du système, AB est horizontale et le ressort est vertical. Utiliser le théorème du moment cinétique pour exprimer la force F_0 exercée en B par le ressort à l'équilibre en fonction de M et de l'accélération de la pesanteur g (figure a).

2) On écarte d'un petit angle α la barre de sa position d'équilibre et on l'abandonne à elle-même. On admettra que B se déplace sur la verticale. On admet que la force exercée par le ressort en B s'écrit maintenant $F = F_0 + k\Delta x$ où k est la raideur du ressort et Δx son allongement. Déterminer Δx sachant que α est suffisamment petit pour faire l'approximation $\sin\alpha \approx \alpha$. Déterminer la période T_0 des oscillations de petites amplitudes de ce dispositif en fonction de M et de k en appliquant le théorème du moment cinétique en A (figure b).

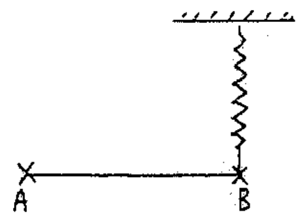

figure a

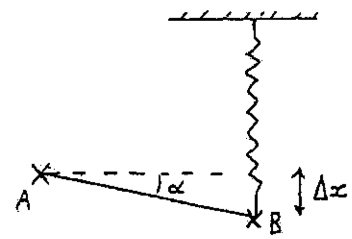

figure b