

Bonjour,

Je comprends pas grand chose aux notations de Dirac, et surtout comment manipuler une expression avec des notations de Dirac, comment factoriser? Comment faire commuter deux termes (à quel prix)? Comment changer l'ordre de produits scalaires?

Par le cours j'ai :

$|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ des kets, vecteurs représentant l'état quantique dans l'espace de Hilbert.

$\langle\psi|$ $\langle\phi|$ les bras associés (transposées complexes des kets) Ils se décomposent dans une base $\{|a\rangle\}$ de la façon suivante :

Pour un ket: $|\phi\rangle = \sum_a \langle a|\phi\rangle |a\rangle$

Pour un bra: $\langle\psi| = \sum_a \langle\psi|a\rangle \langle a|$

Le produit scalaire est défini comme suit :

$$(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$$

Les relations de la base (orthogonalité et fermeture) sont :

$$\sum_a |a\rangle \langle a| = 1 \text{ (fermeture)}$$

$$\langle a_l|a_m\rangle = \delta_{lm} \text{ (orthogonalité)}$$

$$\alpha|a\rangle = A|a\rangle \text{ (et } \alpha \text{ est un opérateur)}$$

Donc ce que je ne comprends pas :

Le produit scalaire est défini comme précédemment, mais sur quoi s'applique l' "étoile" qui indique que c'est le conjugué? Sur le produit entier (donc les deux termes) ou seulement sur le ket? est-ce qu'on peut écrire les choses suivantes ? $\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\psi|^*|\phi\rangle^*$ (le ket et le bra sont conjugués, ou seulement le ket ($\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\psi||\phi\rangle^*$)?)

Est-ce à dire que si l'étoile (la conjugaison) s'applique sur le ket uniquement : $\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\psi| \langle\phi|$ (l'étoile conjugue mon ket et le transforme en bra?)

Est-ce qu'on peut changer l'ordre de deux blocs de termes qui forment un produit scalaire? (soient $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle, |v\rangle$ des kets quelconques) Peut-on écrire la chose suivante? :

$$\langle x|y\rangle \langle z|v\rangle = \langle x|y\rangle (\langle z|v\rangle) = (\langle z|v\rangle) \langle x|y\rangle = \langle z|v\rangle \langle x|y\rangle$$

A présent, voilà le type de "transformation d'expressions qu'on a dans le cours et les TDs, comment faire pour faire ceci (la partie ci-dessus est

extraite de ce que mon prof à fait):

$$\langle \phi | (\alpha | \phi \rangle) = \Sigma_a \Sigma_{a'} \langle a | \phi \rangle A | a \rangle \langle \phi | a' \rangle \langle a' | \quad (1)$$

$$\langle \phi | (\alpha | \phi \rangle) = \Sigma_a \Sigma_{a'} \langle a | \phi \rangle A \langle a' | a \rangle \langle \phi | a' \rangle \quad (2)$$

$$= \Sigma_a A \langle \phi | a \rangle \langle a | \phi \rangle \quad (3)$$

$$= \Sigma_a A | \langle \phi | a \rangle |^2 \quad (4)$$

(0)

Là je comprends pas comment mon prof établit le développement ci-dessus. Comment passe-t-il de (1) à (2)? Est-ce à dire que $|a \rangle \langle a'| = \langle a'| a \rangle$? Pourquoi? Comment? Puis comment réduit-il l'expression pour passer à (3)? Et pour passer à (4)? (Est-ce qu'on a que : $(\langle \psi | a \rangle)^* = \langle a | \psi \rangle$)

De mon côté j'ai essayé avec les éléments précédents de mon cours, j'obtiens (je sais pas si c'est "permis" de faire ce que je fais, ou encore s'il n'y a pas des étapes qui peuvent être abrégées en utilisant d'autre propriétés (pour faire ceci j'ai supposé que je pouvais "changer l'ordre" comme dans ma question un peu plus haute avec x,y,z,v)): J'obtiens :

$$\langle \phi | (\alpha | \phi \rangle) = (\alpha | \phi \rangle) \langle \phi | = \Sigma_a \Sigma_{a'} \langle a | \phi \rangle A | a \rangle \langle \phi | a' \rangle \langle a' |$$

$$= \Sigma_a \Sigma_{a'} \langle a | \phi \rangle A | a \rangle (\langle \phi | a' \rangle) \langle a' |$$

$$= \Sigma_a \Sigma_{a'} A (\langle \phi | a' \rangle) \langle a | \phi \rangle | a \rangle \langle a' | \quad (\text{j'utilise la propriété dont je ne suis pas du tout sûr pour inverser l'ordre des produits scalaires et pour bouger "A" qui m'a tout l'air d'être un scalaire})$$

$$= \Sigma_a \Sigma_{a'} A (\langle \phi | a' \rangle) \langle a | \phi \rangle | a \rangle \langle a' | | a \rangle \langle a | \quad (\text{je fais apparaître une relation de fermeture parce que c'est égal à 1 de toute façon})$$

$$= \Sigma_a \Sigma_{a'} A \langle \phi | a' \rangle \langle a | \phi \rangle | a \rangle \langle a' | a \rangle \langle a |$$

$$= \Sigma_a \Sigma_{a'} A \langle \phi | a' \rangle \langle a | \phi \rangle | a \rangle (\langle a' | a \rangle) \langle a | \quad (\text{je change l'ordre})$$

$$= \Sigma_a \Sigma_{a'} A \langle \phi | a' \rangle \langle a | \phi \rangle (\langle a' | a \rangle) | a \rangle \langle a |$$

J'utilise l'orthogonalité (non nul Si et seulement si $a=a'$):

$$= \Sigma_a A \langle \phi | a \rangle \langle a | \phi \rangle | a \rangle \langle a |$$

$$= \Sigma_a A \langle \phi | a \rangle \langle a | \phi \rangle \quad (\text{j'utilise la relation de fermeture})$$

J'utilise une potentielle propriété selon laquelle $(\langle \psi | a \rangle)^* = \langle a | \psi \rangle$

$$= \Sigma_a A \langle \phi | a \rangle (\langle \phi | a \rangle)^*$$

$$= \Sigma_a A | \langle \phi | a \rangle |^2$$