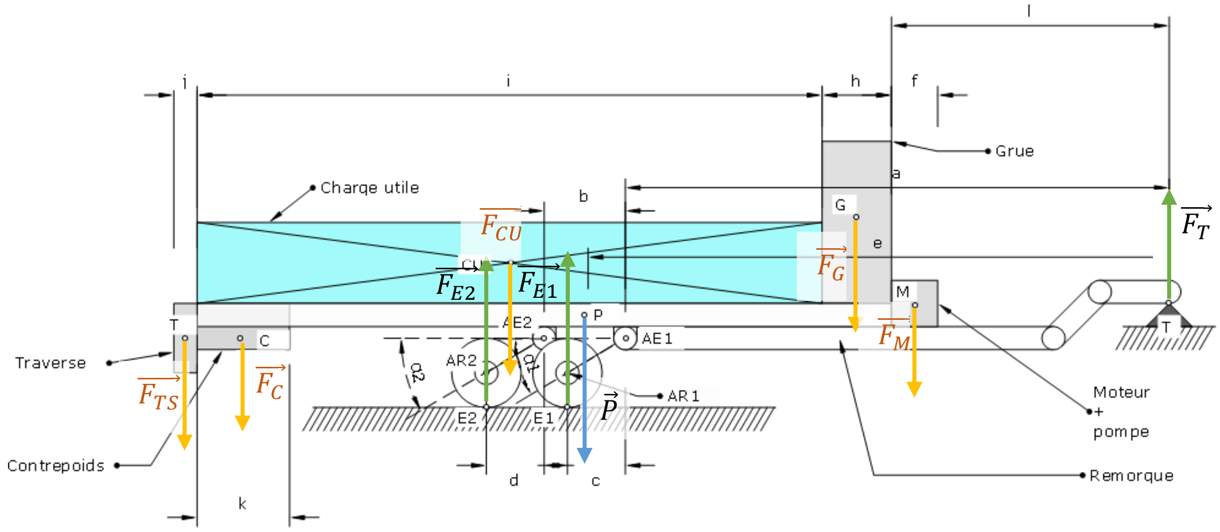
Modélisation :



Avec :

$$\overrightarrow{F_{TS}} = -1962.\vec{y}$$
$$\overrightarrow{F_G} = -3875.\vec{y}$$
$$\overrightarrow{F_M} = -785.\vec{y}$$
$$\vec{P} = -17069.y$$

La somme des masses en charge est connue et sera notée SM=2500*9,81=24525 N

j=100 mm
h=500 mm
l=1494 mm
e=4394 mm
f=500 mm
a+c=m
a+b+d=m+n
m=4173 mm
n=725 mm

k est inconnue mais pourrait être imposée

Pour simplifier les calculs, on choisira de calculer $\overrightarrow{F_C}$ en fin de plateau. Le calcul au point C sera fait plus tard en fonction des contraintes dues à la réalisation du contrepoids.

En P :

$$\overrightarrow{F_{TS}} \wedge \overrightarrow{PTS} + \overrightarrow{F_C} \wedge \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{F_{CU}} \wedge \overrightarrow{PCU} + \vec{P} \wedge \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{F_G} \wedge \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{F_M} \wedge \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{F_T} \wedge \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{F_{E1}} \wedge \overrightarrow{PE1} + \overrightarrow{F_{E2}} \wedge \overrightarrow{PE2} = \vec{0}$$

$$F_{TS}.\left(e-l-h-i-\frac{j}{2}\right).\vec{z} + F_C.(e-l-h-i).\vec{z} + F_{CU}.\left(e-l-h-\frac{i}{2}\right).\vec{z} + P.(0).\vec{z} + F_G.\left(e-l-\frac{h}{2}\right).\vec{z} + F_M.\left(e-l+\frac{f}{2}\right).\vec{z} + F_T.(e).\vec{z} + F_{E1}.(e-a-c).\vec{z} + F_{E2}.(e-a-c-d).\vec{z} = \vec{0}$$

$$F_{TS}.\left(e-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(e-l-h-i)+F_{CU}.\left(e-l-h-\frac{i}{2}\right)+F_G.\left(e-l-\frac{h}{2}\right)$$
$$+F_M.\left(e-l+\frac{f}{2}\right)+F_T.(e)+F_{E1}.(e-a-c)+F_{E2}.(e-a-b-d)=0$$

On sait que :

$$\sum_i^n \vec{F_i}=\vec{0}$$

Soit :

$$\overrightarrow{F_{TS}}+\overrightarrow{F_C}+\overrightarrow{F_{CU}}+\vec{P}+\overrightarrow{F_G}+\overrightarrow{F_M}+\overrightarrow{F_T}+\overrightarrow{F_{E1}}+\overrightarrow{F_{E2}}=\vec{0}$$

$$F_{TS}.\vec{y}+F_C.\vec{y}+F_{CU}.\vec{y}+P.\vec{y}+F_G.\vec{y}+F_M.\vec{y}+F_T.\vec{y}+F_{E1}.\vec{y}+F_{E2}.\vec{y}=\vec{0}$$

$$F_{TS}+F_C+F_{CU}+P+F_G+F_M+F_T+F_{E1}+F_{E2}=0$$

$$F_{E1}=-F_{TS}-F_C-F_{CU}-P-F_G-F_M-F_T-F_{E2}$$

Donc :

$$F_{TS}.\left(e-l-h-i-\frac{j}{2}\right)-F_{TS}.(e-a-c)+F_C.(e-l-h-i)-F_C.(e-a-c)$$
$$+F_{CU}.\left(e-l-h-\frac{i}{2}\right)-F_{CU}.(e-a-c)-P.(e-a-c)+F_G.\left(e-l-\frac{h}{2}\right)$$
$$-F_G.(e-a-c)+F_M.\left(e-l+\frac{f}{2}\right)-F_M.(e-a-c)+F_T.(e)-F_T.(e-a-c)$$
$$+F_{E2}.(e-a-b-d)-F_{E2}.(e-a-c)=0$$

$$F_{TS}.\left(-l-h-i-\frac{j}{2}+a+c\right)+F_C.(-l-h-i+a+c)+F_{CU}.\left(-l-h-\frac{i}{2}+a+c\right)$$
$$+P.(-e+a+c)+F_G.\left(-l-\frac{h}{2}+a+c\right)+F_M.\left(-l+\frac{f}{2}+a+c\right)+F_T.(a+c)$$
$$+F_{E2}.(-a-b-d+a+c)=0$$

En sachant que $a+b+d=m+n$ et que $a+c=m$, on en déduit l'équation 1 :

$$F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(m-l-h-i)+F_{CU}.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right)+P.(m-e)$$
$$+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)+F_T.(m)+F_{E2}.(n)=0 \quad (1)$$

En E1 :

$$\overrightarrow{F_{TS}}\wedge\overrightarrow{E1TS}+\overrightarrow{F_C}\wedge\overrightarrow{E1C}+\overrightarrow{F_{CU}}\wedge\overrightarrow{E1CU}+\vec{P}\wedge\overrightarrow{E1P}+\overrightarrow{F_G}\wedge\overrightarrow{E1G}+\overrightarrow{F_M}\wedge\overrightarrow{E1M}+\overrightarrow{F_T}\wedge\overrightarrow{E1T}+\overrightarrow{F_{E1}}$$
$$\wedge\overrightarrow{E1E1}+\overrightarrow{F_{E2}}\wedge\overrightarrow{E1E2}=\vec{0}$$

$$F_{TS}.\left(a+c-l-h-i-\frac{j}{2}\right).\vec{z}+F_C.(a+c-l-h-i).\vec{z}+F_{CU}.\left(a+c-l-h-\frac{i}{2}\right).\vec{z}$$
$$+P.(a+c-e).\vec{z}+F_G.\left(a+c-l-\frac{h}{2}\right).\vec{z}+F_M.\left(a+c-l+\frac{f}{2}\right).\vec{z}$$
$$+F_T.(a+c).\vec{z}+F_{E1}.(0).\vec{z}+F_{E2}.(a+c-a-b-d).\vec{z}=\vec{0}$$

$$F_{TS}.\left(a+c-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(a+c-l-h-i)+F_{CU}.\left(a+c-l-h-\frac{i}{2}\right)+P.(a+c-e)$$
$$+F_G.\left(a+c-l-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(a+c-l+\frac{f}{2}\right)+F_T.(a+c)$$
$$+F_{E2}.(a+c-a-b-d)=0$$

Ou en sachant que $a+b+d=m+n$ et que $a+c=m$:

$$F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(m-l-h-i)+F_{CU}.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right)+P.(m-e)$$
$$+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)+F_T.(m)+F_{E2}.(-n)=0$$

$$n.F_{E2}=F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(m-l-h-i)+F_{CU}.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right)+P.(m-e)$$
$$+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)+F_T.(m)$$

En reprenant l'équation 1, on obtient l'équation 2 :

$$2.F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+2.F_C.(m-l-h-i)+2.F_{CU}.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right)+2.P.(m-e)$$
$$+2.F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)+2.F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)+2.F_T.(m)=0$$

(2)
$$F_T=-\frac{1}{m}.(F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(m-l-h-i)+F_{CU}.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right)+P.(m-e)$$
$$+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)$$

Cela nous permet d'écrire à vide l'équation 3 :

$$F_T=-\frac{1}{m}.(F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right)+F_C.(m-l-h-i)+P.(m-e)+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)$$
$$+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right))$$

$$F_T=\frac{i}{m}.(F_{TS}+F_C)-\frac{1}{m}.F_C.(m-l-h)-\frac{1}{m}.(F_{TS}.\left(m-l-h-\frac{j}{2}\right)+P.(m-e)$$
$$+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right))$$

(3)
$$F_T=\frac{1}{m}.(i.(F_{TS}+F_C)-F_C.(m-l-h)-F_{TS}.\left(m-l-h-\frac{j}{2}\right)+P.(m-e)+F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)$$
$$+F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right))$$

Et l'équation 4 en pleine charge, où SM est la somme des masses :

$$\overrightarrow{F_{E1}}+\overrightarrow{F_{E2}}+\overrightarrow{F_T}=-\overrightarrow{F_{TS}}-\overrightarrow{F_C}-\overrightarrow{F_{CU}}-\vec{P}-\overrightarrow{F_G}-\overrightarrow{F_M}=SM.\vec{y}$$

Donc :

$$F_{CU}=-SM-F_{TS}-F_C-P-F_G-F_M$$

Ce qui nous permet de déduire l'équation 4 à partir de l'équation 2 :

$$F_T = -\frac{1}{m}.(F_{TS}.\left(m-l-h-i-\frac{j}{2}\right) - F_{TS}.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right) + F_C.(m-l-h-i)$$
$$- F_C.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right) + P.(m-e) - P.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right) + F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)$$
$$- F_G.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right) + F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right) - F_M.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right)$$
$$- SM.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right))$$

$$F_T = -\frac{1}{m}.(F_{TS}.\left(-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}\right) + F_C.\left(-\frac{i}{2}\right) + P.\left(l+h-e+\frac{i}{2}\right) + F_G.\left(\frac{h}{2}+\frac{i}{2}\right) + F_M.\left(\frac{f}{2}+h+\frac{i}{2}\right)$$
$$- SM.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right))$$

$$F_T = -\frac{1}{m}.(F_{TS}.\left(-\frac{i}{2}-\frac{j}{2}\right) + F_C.\left(-\frac{i}{2}\right) - P.\left(-l-h+e-\frac{i}{2}\right) - F_G.\left(-\frac{h}{2}-\frac{i}{2}\right)$$
$$- F_M.\left(-\frac{f}{2}-h-\frac{i}{2}\right) - SM.\left(m-l-h-\frac{i}{2}\right))$$

$$F_T = -\frac{1}{m}.(-\frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM) + F_{TS}.\left(-\frac{j}{2}\right) - P.(-l-h+e)$$
$$- F_G.\left(-\frac{h}{2}\right) - F_M.\left(-\frac{f}{2}-h\right) - SM.(m-l-h))$$

(4) $$F_T = \frac{1}{m}.(\frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM) - F_{TS}.\left(-\frac{j}{2}\right) + P.(-l-h+e)$$
$$+ F_G.\left(-\frac{h}{2}\right) + F_M.\left(-\frac{f}{2}-h\right) + SM.(m-l-h))$$

D'après (3) et (4) :

$$\frac{1}{m}.\left(i.(F_{TS}+F_C) - F_C.(m-l-h) - F_{TS}.\left(m-l-h-\frac{j}{2}\right) + P.(m-e)\right.$$
$$\left. + F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right) + F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{m}.(\frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM) - F_{TS}.\left(-\frac{j}{2}\right)$$
$$+ P.(-l-h+e) + F_G.\left(-\frac{h}{2}\right) + F_M.\left(-\frac{f}{2}-h\right) + SM.(m-l-h))$$

$$i.(F_{TS}+F_C) - \frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM) - F_C.(m-l-h)$$
$$- F_{TS}.\left(m-l-h-\frac{j}{2}\right) + F_{TS}.\left(-\frac{j}{2}\right) + P.(m-e) - P.(-l-h+e)$$
$$+ F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right) - F_G.\left(-\frac{h}{2}\right) + F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right) - F_M.\left(-\frac{f}{2}-h\right)$$
$$= SM.(m-l-h)$$

$$i.(F_{TS}+F_C) - \frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM) - F_C.(m-l-h) - F_{TS}.(m-l-h)$$
$$+ P.(m-l-h) + F_G.(m-l) + F_M.(m-l+f+h)$$
$$= SM.(m-l-h)$$

$$i.\left((F_{TS}+F_C)-\frac{1}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM)\right)$$
$$= SM.(m-l-h)+F_C.(m-l-h)+F_{TS}.(m-l-h)$$
$$-P.(m-l-h)-F_G.(m-l)-F_M.(m-l+f+h)$$

(5) $$i = \frac{SM.(m-l-h)+F_C.(m-l-h)+F_{TS}.(m-l-h)-P.(m-l-h)-F_G.(m-l)-F_M.(m-l+f+h)}{F_{TS}+F_C-\frac{1}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM)}$$

Ainsi que :

$$i.(F_{TS}+F_C)-\frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM)-F_C.(m-l-h)$$
$$= -F_{TS}.\left(-\frac{j}{2}\right)+P.(-l-h+e)+F_G.\left(-\frac{h}{2}\right)+F_M.\left(-\frac{f}{2}-h\right)$$
$$+SM.(m-l-h)+F_{TS}.\left(m-l-h-\frac{j}{2}\right)-P.(m-e)$$
$$-F_G.\left(m-l-\frac{h}{2}\right)-F_M.\left(m-l+\frac{f}{2}\right)$$

$$\frac{i}{2}.(2F_{TS}+2F_C)-\frac{i}{2}.(F_{TS}+F_C-P-F_G-F_M-SM)-\frac{i}{2}.\frac{2}{i}.F_C.(m-l-h)$$
$$= F_{TS}.(m-l-h)+P.(-l-h-m+2e)-F_G.(m-l)$$
$$+F_M.(-f-m+l-h)+SM.(m-l-h)$$

$$\frac{i}{2}.\left(F_{TS}+F_C+P+F_G+F_M+SM-\frac{2}{i}.F_C.(m-l-h)\right)$$
$$= F_{TS}.(m-l-h)+P.(-l-h-m+2e)-F_G.(m-l)$$
$$+F_M.(-f-m+l-h)+SM.(m-l-h)$$

$$F_{TS}+F_C+P+F_G+F_M+SM-\frac{2}{i}.F_C.(m-l-h)$$
$$= \frac{2}{i}.\big(F_{TS}.(m-l-h)+P.(-l-h-m+2e)-F_G.(m-l)$$
$$+F_M.(-f-m+l-h)+SM.(m-l-h)\big)$$

$$F_C-\frac{2}{i}.F_C.(m-l-h)$$
$$= \frac{2}{i}.\big(F_{TS}.(m-l-h)+P.(-l-h-m+2e)-F_G.(m-l)$$
$$+F_M.(-f-m+l-h)+SM.(m-l-h)\big)-F_{TS}-P-F_G-F_M-SM$$

$$F_C.\left(\frac{i-2(m-l-h)}{i}\right)$$
$$= \frac{2}{i}.\big(F_{TS}.(m-l-h)+P.(-l-h-m+2e)-F_G.(m-l)$$
$$+F_M.(-f-m+l-h)+SM.(m-l-h)\big)-F_{TS}-P-F_G-F_M-SM$$

(6) $$F_C = 2.\frac{F_{TS}.(m-l-h) + P.(-l-h-m+2e) - F_G.(m-l) + F_M.(-f-m+l-h) + SM.(m-l-h)}{i-2(m-l-h)} - i.\frac{F_{TS}+P+F_G+F_M+SM}{i-2(m-l-h)}$$

Avec des valeurs numériques :

$$i = \frac{-24525*(2179) + F_C.(2179) - 1962*(2179) + 17069*(2179) + 3875*(2679) + 785*(3679)}{-1962 + F_C - \frac{1}{2}.(F_C - 1962 + 17069 + 3875 + 785 + 24525)}$$

$$i = \frac{2179.F_C - 7252682}{\frac{1}{2}.F_C + 20184}$$

Et

$$F_C = 2.\frac{-1962*(2179) - 17069*(2621) + 3875*(2679) - 785*(-3679) - 24525*(2179)}{i-2(2179)} - i.\frac{-1962-17069-3875-785-24525}{i-2(2179)}$$

$$F_C = \frac{-178367764 + 48216i}{i-4358}$$

En remplaçant F_C dans (3) et (4), on obtient :

$$F_T = \frac{1}{4173}*(i*\left(-1962 + \frac{-178367764+48216i}{i-4358}\right) - \frac{-178367764+48216i}{i-4358} * (2179) + 1962.(2129) - 17069*(-221) - 3875*(2429) - 785*(2929))$$

(3) $$F_T = \frac{1}{4173}*\left(-1962*i + \frac{-178367764*i + 48216*i^2}{i-4358} + 2179 * \frac{178367764-48216i}{i-4358} - 3664193\right)$$

Et

$$F_T = \frac{1}{4173}*\left(\frac{i}{2}*\left(-1962 + \frac{-178367764+48216i}{i-4358} + 17069 + 3875 + 785 + 24525\right) + 1962*(-50) - 17069*2400 - 3875*(-250) - 785*(-750) - 24525*2179\right)$$

(4) $$F_T = \frac{1}{4173}*\left(\frac{-178367764*i + 48216*i^2}{2i-8716} + 23346*i - 92946175\right)$$

Etant donné que $196 \leq F_T \leq 490$ pour la remorque à vide et en charge, on a :

$$\begin{cases} 196 \leq \frac{1}{4173} * \left(-1962 * i + \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{i - 4358} + 2179 * \frac{178367764 - 48216i}{i - 4358} - 3664193\right) \leq 490 \\ 196 \leq \frac{1}{4173} * \left(\frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{2i - 8716} + 23346 * i - 92946175\right) \leq 490 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{4173} * \left(-1962 * i + \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{i - 4358} + 2179 * \frac{178367764 - 48216i}{i - 4358} - 3664193\right) \geq 196 \\ \frac{1}{4173} * \left(-1962 * i + \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{i - 4358} + 2179 * \frac{178367764 - 48216i}{i - 4358} - 3664193\right) \leq 490 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4173} * \left(\frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{2i - 8716} + 23346 * i - 92946175\right) \geq 196 \\ \frac{1}{4173} * \left(\frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{2i - 8716} + 23346 * i - 92946175\right) \leq 490 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} -1962 * i + \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{i - 4358} + 2179 * \frac{178367764 - 48216i}{i - 4358} \geq 4482101 \\ -1962 * i + \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{i - 4358} + 2179 * \frac{178367764 - 48216i}{i - 4358} \leq 5708963 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{2i - 8716} + 23346 * i \geq 93764083 \\ \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{2i - 8716} + 23346 * i \leq 94990945 \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{-1962 * i * (i - 4358)}{i - 4358} + \frac{-178367764 * i + 48216 * i^2}{i - 4358} + \frac{2179 * (178367764 - 48216i)}{i - 4358} - \frac{4482101 * (i - 4358)}{i - 4358} \geq 0$$

$$\frac{46254 * i^2 - 279362133 * i + 2179 * (178367764 + 8964202)}{i - 4358} \geq 0$$

Pour que l'inéquation soit vrai, il faut que :

$$\begin{cases} 46254 * i^2 - 279362133 * i + 2179 * (178367764 + 8964202) \geq 0 \\ i - 4358 > 0 \end{cases}$$

Ou que :

$$\begin{cases} 46254 * i\hat{}2 - 279362133 * i + 2179 * (178367764 + 8964202) \leq 0 \\ i - 4358 < 0 \end{cases}$$

Donc :

$$46254 * i^2 - 279362133 * i + 2179 * (178367764 + 8964202) \geq 0$$

Est de la forme $ax^2 - bx + c$, donc :

$$a\left(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$
$$= a\left(\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

Donc :

$$46254 * (\left(i - \frac{279362133}{2*46254}\right)^2 + \frac{2179*(178367764+8964202)}{46254} - \left(\frac{279362133}{2*46254}\right)^2) \geq 0$$

$$\left(i - \frac{279362133}{2*46254}\right)^2 + \frac{2179*(178367764+8964202)}{46254} - \left(\frac{279362133}{2*46254}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(i - \frac{279362133}{2*46254}\right)^2 \geq \left(\frac{279362133}{2*46254}\right)^2 - \frac{2179*(178367764+8964202)}{46254}$$

$$i \geq \sqrt[2]{\left(\frac{279362133}{2*46254}\right)^2 - \frac{2179*(178367764+8964202)}{46254}} + \frac{279362133}{2*46254}$$