4TPM102U P&I - DST MECANIQUE DU SOLIDE (2016-2017)
ELEMENTS DE CORRECTION

<u>Exercice 1. Horloge</u>

1. L'aiguille des secondes parcourt un tour en $T = 60\ \mathrm{s}$
2. Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est dirigé selon $-\vec{e}_z$ (rotation dans le sens des aiguilles d'une montre) : $\vec{\omega} = -\|\vec{\omega}\|\vec{e}_z$, avec $\|\vec{\omega}\| = \frac{2\pi}{T}$. A.N. : $\|\vec{\omega}\| \approx 0.105\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

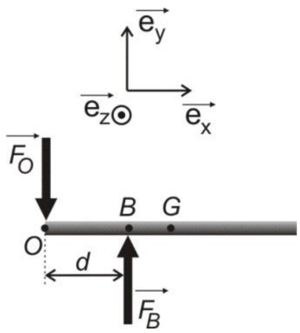
Pour les questions 3 à 5, on utilise $\overrightarrow{OA} = L\cos\theta\,\vec{e}_x + L\sin\theta\,\vec{e}_y$.
On note S l'aiguille des secondes : $\vec{v}_{S/R}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$, soit $\vec{v}_{S/R}(A) = -L\|\vec{\omega}\|\left(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y\right)$

3. $\theta = \pi/2 \;\Rightarrow\; \vec{v}_{S/R}(A) = -L\|\vec{\omega}\|\vec{e}_x$ et $\left\|\vec{v}_{S/R}(A)\right\| = 8{,}4\ \mathrm{mm.s^{-1}}$
4. $\theta = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}_{S/R}(A) = -L\|\vec{\omega}\|\vec{e}_y$ et $\left\|\vec{v}_{S/R}(A)\right\| = 8{,}4\ \mathrm{mm.s^{-1}}$
5. $\theta = \pi/3 \;\Rightarrow\; \vec{v}_{S/R}(A) = -\frac{L\|\vec{\omega}\|}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$ et $\left\|\vec{v}_{S/R}(A)\right\| = 8{,}4\ \mathrm{mm.s^{-1}}$

<u>Exercice 2. Equilibre d'une canne à pêche</u>

1. <u>Cas d'une canne à pêche avec une répartition de masse homogène</u>

   a. Les forces s'appliquant sur la canne à pêche sont
   - En O : $\overrightarrow{F_O} = F_O\vec{e}_y$ avec $F_O < 0$
   - En B : $\overrightarrow{F_B} = F_B\vec{e}_y$ avec $F_B > 0$
   - En G : le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$

   Moments exercés en O par chacune de ces forces :
   - $\vec{M}_{\overrightarrow{F_0}\to\mathrm{canne}}(O) = \vec{0}$
   - $\vec{M}_{\overrightarrow{F_B}\to\mathrm{canne}}(O) = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} = d\vec{e}_x \wedge F_B\vec{e}_y = dF_B\vec{e}_z$
   - $\vec{M}_{\vec{P}\to\mathrm{canne}}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \frac{L}{2}\vec{e}_x \wedge (-mg)\vec{e}_y = \frac{-mgL}{2}\vec{e}_z$

   La canne à pêche est en équilibre statique. L'équation vectorielle relative aux *moments* du principe fondamental de la statique appliqué en O implique :
   $$\vec{M}_{\overrightarrow{F_0}\to\mathrm{canne}}(O) + \vec{M}_{\overrightarrow{F_B}\to\mathrm{canne}}(O) + \vec{M}_{\vec{P}\to\mathrm{canne}}(O) = \vec{0}\ .$$
   Donc : $\overrightarrow{F_B} = \frac{mgL}{2d}\vec{e}_y$

   A.N. : $\left\|\overrightarrow{F_B}\right\| = 45\ \mathrm{N}$

   b. La canne à pêche est en équilibre statique. L'équation vectorielle du principe fondamental de la statique relative aux *forces* implique :
   $$\overrightarrow{F_O} + \overrightarrow{F_B} + \vec{P} = \vec{0}\ .$$
   Donc $\overrightarrow{F_O} = -\overrightarrow{F_B} - \vec{P} = -\frac{mgL}{2d}\vec{e}_y + mg\vec{e}_y = mg\left(1 - \frac{L}{2d}\right)\vec{e}_y$

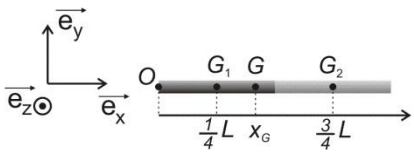
   A.N. : $\left\|\overrightarrow{F_O}\right\| = 15\ \mathrm{N}$

2. <u>Cas d'une canne à pêche avec une répartition de masse non homogène</u>

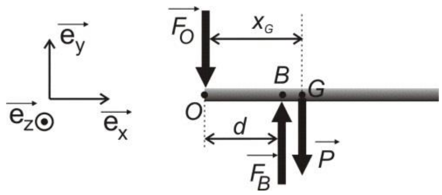
   a. $mx_G = \frac{2m}{3}x_{G_1} + \frac{m}{3}x_{G_2}$

   avec $x_{G_1} = \frac{1}{4}L$ et $x_{G_2} = \frac{3}{4}L$

   $\Rightarrow\; x_G = \frac{5}{12}L$

   b. L'égalité vectorielle relative aux moments obtenue en 1a est toujours valable :
   $$\vec{M}_{\overrightarrow{F_0}\to\mathrm{canne}}(O) + \vec{M}_{\overrightarrow{F_B}\to\mathrm{canne}}(O) + \vec{M}_{\vec{P}\to\mathrm{canne}}(O) = \vec{0}\ .$$
   Seul $\vec{M}_{\vec{P}\to\mathrm{canne}}(O)$ est modifié :

$\vec{M}_{\vec{P}\to\text{canne}}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \frac{5L}{12}\vec{e}_x \wedge (-mg)\vec{e}_y = -\frac{5}{12}mgL\,\vec{e}_z$

Donc : $\overrightarrow{F_B} = \frac{5L}{12d}mg\vec{e}_y$.

A.N. : $\|\overrightarrow{F_B}\| = 37{,}5\ \mathrm{N}$

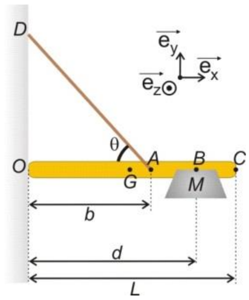
c. L'égalité vectorielle relative aux forces obtenue en 1b est toujours valable : $\overrightarrow{F_O} + \overrightarrow{F_B} + \vec{P} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{F_O} = -\overrightarrow{F_B} - \vec{P} = -\frac{5L}{12d}mg\vec{e}_y + mg\vec{e}_y = mg\left(1 - \frac{5L}{12d}\right)\vec{e}_y$

A.N. : $\|\overrightarrow{F_B}\| = 7.5\ \mathrm{N}$

Le cas de cette canne à pêche avec une répartition de masse inhomogène est donc plus favorable au pêcheur

<u>Exercice 3. Equilibre d'une enseigne</u>



1. Les forces s'appliquant sur la poutre sont :
   - En O la réaction du mur $\vec{R}$
   - En G le poids $\overrightarrow{P_P}$
   - En A la tension de la corde $\vec{T}$
   - En B le poids de l'enseigne $\overrightarrow{P_E}$

2. Egalité vectorielle du principe fondamental de la statique relative aux forces appliqué à la poutre : $\vec{R} + \overrightarrow{P_P} + \vec{T} + \overrightarrow{P_E} = \vec{0}$, avec
   - $\vec{R} = R\vec{e}_x$ (pas de frottement)
   - $\overrightarrow{P_P} = -mg\vec{e}_y$
   - $\vec{T} = -T\cos\theta\,\vec{e}_x + T\sin\theta\,\vec{e}_y$ ($\vec{T}$ colinéaire à la corde)
   - $\overrightarrow{P_E} = -Mg\vec{e}_y$

   Projection de l'égalité vectorielle sur (Oy) : $T\sin\theta - mg - Mg = 0$, d'où : $T = \frac{m+M}{\sin\theta}g$

   Projection de l'égalité vectorielle sur (Ox) : $R - T\cos\theta = 0$, d'où : $R = \frac{m+M}{\tan\theta}g$

3. Le point A est le point le plus judicieux pour faire le bilan des moments :
   - $\vec{T}$ s'applique en A donc $\vec{M}_{\vec{T}\to\text{poutre}}(A) = \vec{0}$
   - $\vec{R}$ est portée par $\vec{e}_x$ donc $\vec{M}_{\vec{R}\to\text{poutre}}(A) = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} = -b\vec{e}_x \wedge R\vec{e}_x = \vec{0}$

   La poutre est en équilibre statique. L'équation vectorielle relative aux *moments* du principe fondamental de la statique appliqué en A implique :

   $$\vec{M}_{\vec{R}\to\text{poutre}}(A) + \vec{M}_{\overrightarrow{P_P}\to\text{poutre}}(A) + \vec{M}_{\vec{T}\to\text{poutre}}(A) + \vec{M}_{\overrightarrow{P_E}\to\text{poutre}}(A) = \vec{0}\ .$$

   $\vec{M}_{\overrightarrow{P_P}\to\text{poutre}}(A) = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P_P} = \left(\frac{L}{2} - b\right)\vec{e}_x \wedge (-mg)\vec{e}_y = mg\left(b - \frac{L}{2}\right)\vec{e}_z$

   $\vec{M}_{\overrightarrow{P_E}\to\text{poutre}}(A) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{P_P} = (d-b)\vec{e}_x \wedge (-Mg)\vec{e}_y = -Mg(d-b)\vec{e}_z$

   Donc : $mg\left(b - \frac{L}{2}\right)\vec{e}_z - Mg(d-b)\vec{e}_z = \vec{0}$

   Puis : $d = b + \left(b - \frac{L}{2}\right)\frac{m}{M}$

   A.N. : $d = 3{,}5\ \mathrm{m}$

   Remarque : si un étudiant a choisi un point différent du point A mais a obtenu la bonne réponse, il a tous les points (il a juste passé un peu plus de temps sur la question…)

4. Il suffit de reprendre la question précédente en remplaçant d par L :

   $L = b + \left(b - \frac{L}{2}\right)\frac{m}{M}$

   D'où : $M = \frac{2b-L}{2(L-b)}m$.   A.N. : $M = 10\ \mathrm{kg}$.