

Problème VI

questions 15 à 19 pour tous, suivantes facultatives

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 4(a).

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = l$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe (O, \hat{u}_y) dirigé par le vecteur $\hat{u}_y = \hat{u}_z \wedge \hat{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1 \hat{u}_x + N_1 \hat{u}_z$ appliquée au point O et satisfaisant aux lois de COULOMB avec un coefficient de frottement f . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2 \hat{u}_x + N_2 \hat{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de COULOMB avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1 , N_1 , T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note \vec{F} la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de (O, \hat{u}_y) et on note α l'angle (positif) entre \vec{BO} et \vec{BC} .

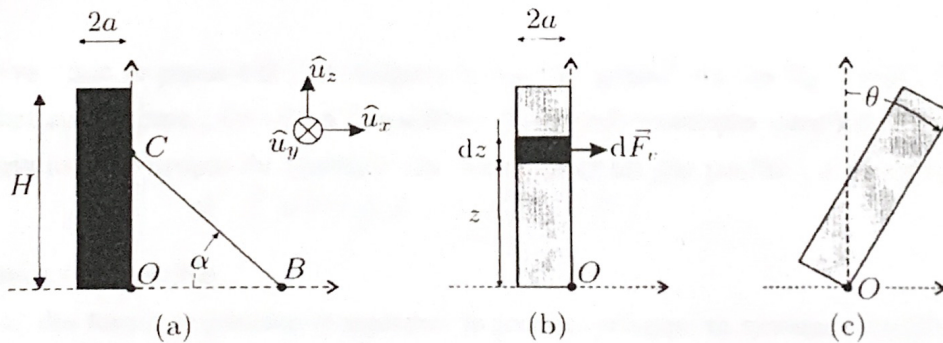


FIGURE 4 Chute d'un arbre

┃ 16 — Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g . En déduire l'expression de la valeur maximale F_{\max} de F en fonction de f , m , g et α .

┃ 17 — L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O .

┃ 18 — Exprimer le moment Γ_y du poids de l'arbre par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) dans la situation initiale décrite par la figure 4(a).

┃ 19 — Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe (O, \hat{u}_y) ?