ANNEXE III

L'ARGUMENT EPR[1]

Les trois hypothèses de départ des auteurs de l'argument sont : (*i*) les prédictions de la mécanique quantique sont justes, (*ii*) aucune influence ne peut se propager plus vite que la lumière et (*iii*) si, en ne perturbant aucunement un système, on peut prédire avec certitude la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette quantité (critère de réalité). (On verra à l'annexe IV que, d'après les inégalités de Bell, ces trois hypothèses ne peuvent être toutes vraies.)

Considérons maintenant la description en terme de la mécanique quantique du comportement d'une particule ayant un seul degré de liberté. L'état de la particule est supposé entièrement caractérisé par la fonction d'onde ψ, qui est une fonction des variables choisies pour la description du comportement de la particule. Correspondant à chaque quantité physique observable A, il y a un opérateur qu'on peut désigner par la même lettre. Si ψ est une fonction propre de l'opérateur A, c'est-à-dire si

(1) $$\psi' \equiv A\psi = a\psi ,$$

où a est un nombre, alors la quantité physique A a avec certitude la valeur a peu importe l'état décrit par ψ dans lequel se trouve la particule. En accord avec le critère de réalité, pour une particule dans l'état donné par ψ pour lequel l'équation (1) est valable, il y a un élément de réalité correspondant à la quantité physique A. Supposons que, par exemple,

(2) $$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x} ,$$

[1] Adaptation française par l'auteur du présent travail du papier A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47 p.777, 15 mai 1935. Quelques paragraphes ont étés enlevés, quelques commentaires ajoutés.

où h est la constante de Planck, p_0 est un nombre constant quelconque, et x la variable indépendante. Puisque l'opérateur correspondant à la quantité de mouvement de la particule est

(3) $$p = (h/2\pi i)\,\partial/\partial x\,,$$

on obtient

(4) $$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\,\partial\psi/\partial x = p_0\psi\,.$$

Ainsi, dans l'état donné par (2), la quantité de mouvement a assurément la valeur p_0. Il fait donc du sens de dire que la quantité de mouvement de la particule dans l'état donné par (2) est réelle. D'autre part si l'éq. (1) ne tient pas, on ne peut plus parler d'une quantité physique A ayant une valeur particulière. C'est ce qui arrive, par exemple, avec la position de la particule. L'opérateur y correspondant, disons q, est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante. Ainsi,

(5) $$q\psi = x\psi \neq a\psi\,.$$

En accord avec la mécanique quantique, on peut seulement dire que la probabilité relative qu'une mesure de la position donnera un résultat se trouvant entre a et b est

(6) $$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi\,dx = \int_a^b dx = b - a\,.$$

Puisque cette probabilité est indépendante de a, mais dépend seulement de la différence $b - a$, on voit que toutes les valeurs de position sont également probables.

Une valeur définie de la position, pour une particule dans l'état donné par (2) ne peut donc pas être prédite, elle peut seulement être obtenue par une mesure directe. Cependant, une telle mesure perturbe la particule modifiant ainsi son état. Après que la position ait été déterminée, la particule ne sera plus dans l'état donné par l'éq. (2). La conclusion habituelle qu'on tire de cela en mécanique quantique est que *lorsque la quantité de mouvement d'une particule est connue, sa position n'a pas de réalité physique.*

Plus généralement, il est montré en mécanique quantique que, si les opérateurs correspondant à deux quantités physiques, disons A et B, ne commutent pas, alors la connaissance précise de l'une d'elle exclut une connaissance précise de l'autre. De plus, toute tentative pour déterminer cette dernière expérimentalement modifiera l'état du système de manière à détruire la connaissance de la première.

De cela il s'en suit que (1) *la description de la réalité par la fonction d'onde de la mécanique quantique est incomplète* ou (2) *lorsque les opérateurs correspondant à deux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités physiques ne peuvent avoir de réalité simultanée.* Si elles avaient une réalité simultanée (et ainsi des valeurs définies), ces valeurs entreraient dans la description complète, en accord avec la condition de complétude. Ainsi, si la fonction d'onde fournit ce genre de description complète de la réalité, elle contiendrait ces valeurs ; il serait ainsi possible de les prédire. Si ce n'était pas le cas, on serait obligés de conclure à l'énoncé alternatif (1).

En mécanique quantique, il est généralement admis que la fonction d'onde contient effectivement la description complète de la réalité physique du système dans l'état auquel elle correspond. À première vue, cette hypothèse est tout à fait raisonnable, car l'information contenue dans la fonction d'onde semble correspondre exactement à ce qui peut être mesuré sans modifier l'état du système. On montrera, cependant, que cette hypothèse prise avec le critère de réalité donné plus haut mène à une contradiction.

Pour ce faire, supposons que nous avons deux systèmes, I et II, auxquels nous permettons d'interagir entre $t = 0$ et $t = T$, temps après lequel on suppose qu'il n'y a plus d'interaction entre les deux parties. De plus, on suppose que l'état des deux systèmes avant $t = 0$ est connu. On peut alors calculer avec l'aide de l'équation de Schrödinger l'état du système combiné $\mathrm{I} + \mathrm{II}$ à n'importe quel temps ultérieur ; en particulier, pour tout $t > T$. Désignons donc la fonction d'onde correspondante par Ψ. On ne peut pas, par contre, calculer l'état dans lequel un des deux systèmes est laissé après l'interaction. Ceci, selon la mécanique quantique, peut être fait seulement avec l'aide de mesures supplémentaires, par un processus connu comme la *réduction du paquet d'ondes*. Considérons l'essentiel de ce processus.

Supposons a_1, a_2, a_3, … les valeurs propres d'une quantité quelconque A en relation avec le système I et $u_1(x_1)$, $u_2(x_1)$, $u_3(x_1)$, ... les fonctions propres correspondantes, où x_1 représente les variables utilisées pour décrire le premier système. Alors Ψ, considérée comme une fonction de x_1, peut être exprimée comme

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{7}$$

où x_2 représente les variables utilisés pour décrire le second système. Ici, les $\psi_n(x_2)$ représentent simplement les coefficients de l'expansion de Ψ en une série de fonction orthogonales $u_n(x_1)$. Supposons maintenant que la quantité A est mesurée et qu'il est trouvé qu'elle ait la valeur a_k. On en conclu alors qu'après la mesure, le premier système est laissé dans l'état donné par la fonction d'onde $u_k(x_1)$, et le second système est laissé dans l'état donné par la fonction d'onde $\psi_k(x_2)$. C'est ça le processus de réduction du paquet d'ondes ; le paquet d'ondes donné par la série infinie (7) est réduite au simple terme $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$.

L'ensemble des fonctions $u_n(x_1)$ est déterminé par le choix de la quantité physique *A*. Si, au lieu de cela, nous avions choisi de mesurer une autre quantité, disons *B*, ayant les valeurs propres b_1, b_2, b_3,... et les fonctions propres $\upsilon_1(x_1)$, $\upsilon_2(x_1)$, $\upsilon_3(x_1)$,... on aurait obtenu, au lieu de l'équation (7), l'expansion

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2)\upsilon_s(x_1), \tag{8}$$

où les φ_s sont les nouveaux coefficients. Maintenant, si on mesure la quantité *B* et qu'on trouve qu'elle a la valeur b_r, on conclue qu'après la mesure le premier système est laissé dans l'état donné par $\upsilon_r(x_1)$ et le second système est laissé dans l'état donné par $\varphi_r(x_2)$.

On voit alors que, grâce à deux mesures différentes effectuées sur le premier système, le second système peut être laissé dans des états avec des fonctions d'ondes différentes. D'un autre côté, puisqu'au moment de la mesure les deux systèmes n'interagissent plus, tout ce qui se passe dans le premier système ne peut pas amener de changements réels dans le second système. Cela est, bien entendu, simplement l'énoncé de ce qu'on entend par une absence d'interaction entre les deux systèmes. Ainsi, *il est possible d'assigner deux différentes fonctions d'ondes* (ψ_k et φ_r dans notre exemple) *à la même réalité* (le second système après l'interaction avec le premier). En d'autres mots, en mesurant deux quantités sur le premier système, on oblige le second système à avoir deux réalités différentes, malgré qu'il n'y ait aucune information qui se propage d'un système à l'autre. Par exemple, ces deux réalités pourraient correspondre à sa vitesse et sa position.

Maintenant, il serait possible que les deux fonctions d'ondes, ψ_k et φ_r, soient les fonctions propres de deux opérateurs qui ne commutent pas, correspondants aux quantités physiques P et Q, respectivement. On peut montrer plus facilement que cela puisse se produire par un exemple. Supposons que les deux systèmes sont des particules et que

$$\Psi\left(x_1, x_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \tag{9}$$

où x_0 est une constante quelconque. Supposons que A est la quantité de mouvement de la première particule; ensuite, tel qu'on l'a vu dans l'équation (4), ses fonctions propres seront

$$u_p\left(x_1\right) = e^{(2\pi i/h)px_1} \tag{10}$$

correspondant aux valeurs propres p. Puisque nous avons ici le cas d'un spectre continu, l'équation (7) s'écrira maintenant

$$\Psi\left(x_1, x_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p\left(x_2\right) u_p\left(x_1\right) dp, \tag{11}$$

où

$$\psi_p\left(x_2\right) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}. \tag{12}$$

Ce ψ_p est évidemment la fonction propre de l'opérateur

$$P = \left(h/2\pi i\right) \partial/\partial x_2, \tag{13}$$

correspondant à la valeur propre $-p$ de la quantité de mouvement de la seconde particule. D'un autre côté, si B est la position de la première particule, il a comme fonction propre

$$v_x\left(x_1\right) = \delta\left(x_1 - x\right), \tag{14}$$

correspondant à la valeur propre x, où l'on reconnaît la fonction delta de Dirac. L'équation (8), dans ce cas, devient

$$\Psi\left(x_1, x_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x\left(x_2\right) v_x\left(x_1\right) dx, \tag{15}$$

où

$$\varphi_x\left(x_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p}\, dp = h\delta\left(x - x_2 + x_0\right). \tag{16}$$

Ce φ_x est la fonction propre de l'opérateur $Q = x_2$ correspondant à la valeur propre $x + x_0$ de la position de la seconde particule. Puisque $PQ - QP = h/2\pi i$, on a montré qu'il est en général possible pour ψ_k et φ_r d'être des fonctions propres de deux opérateurs qui ne commutent pas, correspondant à des quantités physiques.

En retournant maintenant au cas général considéré dans les équations (7) et (8), on assume que ψ_k et φ_r sont en effet les fonctions propres d'opérateurs quelconques *P* et *Q* qui ne commutent pas, correspondants aux valeurs propres p_k et q_r, respectivement. Ainsi, en mesurant l'une ou l'autre de *A* ou *B*, nous sommes en mesure de prédire avec certitude, et sans perturber d'aucune façon le second système, l'une ou l'autre de la valeur de la quantité *P* (c'est-à-dire p_k) ou la valeur de la quantité *Q* (c'est-à-dire q_r). En accord avec notre critère de réalité, on doit dans le premier cas considérer la quantité *P* comme étant un élément de la réalité, et dans le second la quantité *Q* comme un élément de la réalité. Or, tel qu'on l'a vu, les deux fonctions d'onde ψ_k et φ_r correspondent à la même réalité.

On a prouvé plus tôt que soit (1) la description de la réalité par la fonction d'onde de la mécanique quantique est incomplète ou (2) lorsque les opérateurs correspondants à deux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités physiques ne peuvent avoir de réalité simultanée. Ensuite, partant de l'hypothèse que la fonction d'onde donne une description complète de la réalité physique, on arrive à la conclusion que deux quantités physiques, avec des opérateurs qui ne commutent pas, peuvent avoir une réalité simultanée. Ainsi, la négation de (1) conduit à la négation de la seule autre alternative (2). Nous sommes forcés de conclure que la fonction d'onde de la mécanique quantique ne donne pas une description complète de la réalité physique.