

Devoir libre 6

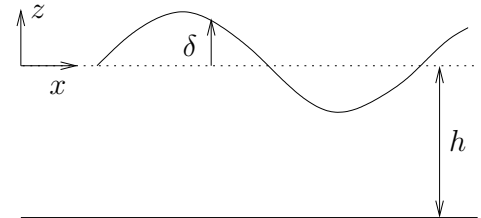
Problème : Étude de la houle : ondes de gravitation.

Ce problème étudie certains aspects de la propagation des ondes à la surface de l'eau et le comportement des vagues à l'abord des côtes.

L'eau est supposée être un fluide incompressible, homogène, sans viscosité et de masse volumique ρ .

On considère une étendue d'eau de profondeur h . Une onde s'y propage, correspondant à une variation δ de la hauteur de la surface que l'on supposera être de la forme $\delta = \delta_0 \cos(kx - \omega t)$, où δ_0 , ω et $k\vec{u}_x$ sont respectivement l'amplitude, la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde de gravitation ($k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde).

On suppose l'amplitude δ_0 petite devant la longueur d'onde et on ne retient systématiquement que les termes d'ordre le plus bas.



A. Potentiel des vitesses

1. En présence de la gravitation dont l'intensité est g , quelle est l'équation (équation d'Euler) régissant la vitesse $\vec{v}$ de l'eau ?
2. On suppose que le mouvement de l'eau est irrotationnel. On pose donc $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$. Justifier ce choix et préciser la contrainte que l'incompressibilité du fluide impose au potentiel Φ .
3. Montrer que l'équation d'Euler se simplifie en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = C(t),$$

où P est la pression dans le fluide et C une grandeur ne dépendant que du temps.

Montrer que l'on peut choisir $C = P_0/\rho$ où P_0 est la pression à la surface de l'eau. On gardera cette valeur de C dans toute la suite.

4. Vérifier que pour $z < 0$, le potentiel peut s'exprimer de la façon suivante,

$$\Phi = \Phi_0 \sin(kx - \omega t) \left(e^{kz} + \alpha e^{-kz} \right).$$

Que vaut la composante selon z de la vitesse en $z = -h$? En déduire la valeur de α et son domaine de variation.

B. Relation de dispersion des ondes de gravitation

5. Comment la relation obtenue à la question 3 s'exprime-t-elle à la surface en tenant compte de l'hypothèse des petites variations de la hauteur d'eau ?
6. Avec cette même hypothèse on peut montrer que $v_z = \partial \delta / \partial t$, v_z étant la composante suivant z de la vitesse à la surface du fluide. En déduire une relation entre ω , k , α , δ_0 et Φ_0 .
7. Déduire des questions 5 et 6 la relation de dispersion $\omega(k)$. Vérifier que dans le cas d'une eau infiniment profonde, cette relation se réduit à $\omega^2 = gk$. Que devient-elle dans le cas contraire où h est très petit ?
8. Déterminer la vitesse de phase des ondes de gravitation pour h infiniment grand (eau profonde) et pour h très petit (eau peu profonde). À quelle condition (sur h) le milieu peut-il être considéré comme non dispersif ?

C. Vagues en eau profonde

9. Donner la forme simplifiée du potentiel Φ lorsque h tend vers l'infini.
10. En déduire les composantes v_x et v_z de la vitesse et montrer que les particules de fluide ont un mouvement circulaire dont le rayon dépend de la profondeur.

D. Comportement des vagues à l'abord des côtes

En appliquant les résultats des parties précédentes, on désire expliquer certains comportements des vagues à l'abord d'une plage. La hauteur d'eau varie entre le rivage et la haute mer, où on la supposera infinie. On considérera que cette variation est lente de sorte que la relation de dispersion obtenue reste applicable, localement, en tout point.

11. On considère, en haute mer, une onde de période T se propageant vers le rivage, perpendiculairement à celui-ci. Quelle est sa longueur d'onde ? Pourquoi varie-t-elle lorsque l'onde s'approche du rivage, et que vaut-elle au bord lorsque h est petit ?

A.N. : $T = 8\text{ s}$, $h = 1\text{ m}$.

12. On tient maintenant compte du fait que les ondes provenant du large arrivent avec une incidence quelconque. Montrer qualitativement que les lignes de crête ont tendance à s'aligner avec le rivage.

Exercice : Puissance volumique de viscosité.

Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η est en écoulement permanent de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$.

1. Déterminer la puissance volumique $\mathcal{P}_{\text{vol}}$ des forces intérieures de viscosité.

2. Application à un écoulement de Couette

Le fluide, dont la pression ne dépend pas de x , est entre deux plans horizontaux distants de e . Le plan inférieur est immobile et le plan supérieur est animé d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. Calculer la puissance dissipée.

3. Application à un écoulement de Poiseuille plan

De l'eau s'écoule entre deux plans horizontaux immobiles distants de $e = 0,5\text{ mm}$, avec une vitesse moyenne de 1 m/s . Calculer la puissance dissipée dans un parallélépipède de longueur L (selon Ox) et de largeur a (selon Oz). Si on négligeait tout transfert thermique, calculer en Kelvin par seconde quelle serait l'augmentation de température aux points où la puissance est maximale.

Données : eau : $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}\text{ Pl}$; $\rho = 1,0 \cdot 10^3\text{ kg.m}^{-3}$; capacité thermique massique, $c = 4,3\text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.