Université Côte d'Azur **Année 2019-20**
Licence 1 **Mécanique 2**

Devoir Maison 4

Exercice 1 - Une boule de billard qui roule et glisse

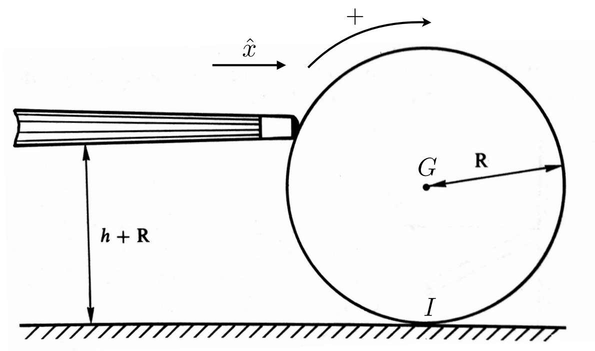

Figure 1

1) On lance à la main une boule de billard avec une vitesse initiale v_0, sans lui donner de mouvement de rotation. Initialement la boule glisse sans rouler. Puis elle glisse et roule en même temps et après un certain temps elle se met à rouler sans glisser. Montrer que la vitesse de la boule de billard au moment où le glissement s'arrête est $\frac{5}{7}v_0$.

2) On frappe une boule de billard à une hauteur $h + R$ au dessus du sol avec une queue de billard. La queue est horizontale et contenue dans le plan vertical passant par le centre G de la boule comme le montre la figure 1. Montrer que l'on doit frapper à une hauteur $h = \frac{2}{5}R$ pour que la boule se mette à rouler sans glissement.

3) Discuter le mouvement de la boule pour $0 \leqslant h < \frac{2}{5}R$ et $\frac{2}{5}R < h \leqslant R$. Montrer que dans ce dernier cas la force de frottement accélère la boule !

Aide 1 : Soit I le point de contact entre la boule et le sol et G le centre de masse de la boule. On note $\dot{x}_I$ et $\dot{x}_G$ les vitesses horizontales respectives de I et G.

i) Dans le cas général où la boule roule et glisse à la fois, alors

$$\dot{x}_G = \dot{x}_I + \omega R$$

où $\dot{x}_I$ est la vitesse de glissement et ω la vitesse de roulement de la boule (les sens positifs des vitesses horizontales et de la vitesse de rotation sont définis sur la figure 1).

ii) Dans le cas où la boule glisse sans rouler on a $\omega = 0$ et donc $\dot{x}_G = \dot{x}_I$.

iii) Dans le cas où le glissement est nul on a $\dot{x}_I = 0$ et donc $\dot{x}_G = \omega R$.

Aide 2 : Le moment d'inertie d'une boule homogène de masse M et de rayon R calculé par rapport à un axe passant par G est : $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Aide 3 : On note $Z = \int F\mathrm{d}t$ l'impulsion exercée par la queue de billard sur la boule. On peut montrer que cette impulsion permet de générer des conditions initiales à la boule telle que :

$$\begin{aligned} Mv_0 &= Z \\ I\omega_0 &= Zh \end{aligned}$$

où $v_0 = \dot{x}_G(t=0)$ est la vitesse initiale du centre G de la boule, $\omega_0 = \omega(t=0)$ la vitesse de rotation initiale de la boule, M la masse de la boule, I son moment d'inertie et h la hauteur définie sur la figure 1. On définit comme instant initial la date à laquelle l'impulsion prend fin.

Exercice 2 - Force centrale en $1/r^3$

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel Galiléen (R), à une force :

$$\vec{F} = -\frac{a}{r^3}\hat{r}$$

où $\hat{r}$ est un vecteur unitaire de la base polaire de centre O, a une constante positive et r la distance entre O et M. A l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\hat{x}$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y})$ où $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont les vecteurs de la base cartésienne de centre O. On note θ l'angle entre la direction de $\hat{x}$ et $\overrightarrow{OM}$.

1) Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.

2) Montrer que $r^2\dot{\theta} = C$, avec C une constante que vous exprimerez en fonction de r_0, v_0 et α.

3) Montrer que $\vec{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $E_p(r)$ dont elle dérive (on prendra $E_p(\infty) = 0$).

4) Montrer que l'énergie mécanique de M est de la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\mathrm{eff}}(r)$$

où $E_{p\mathrm{eff}}(r)$ est une énergie potentielle effective que vous exprimerez en fonction des données du problème.

5) r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion [1].

6) On suppose que la particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \pi/2$.

(a) Etablir que $\dot{r} = \frac{r_0 v_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$. En déduire que $\dot{r} = -r_0 v_0 u'$ avec $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ et $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.

(b) Exprimer l'énergie mécanique en fonction de u et u'. En déduire que u vérifie l'équation :

$$u'' + \eta^2 u = 0$$

où $u'' = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$ et $\eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2}}$.

(c) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.

(d) Tracer la trajectoire pour $\eta = 0.1$ et $r_0 = 1\,\mathrm{m}$.

1. On dit qu'une particule est dans un état de diffusion si elle possède une vitesse non nulle à l'infini.