Phys206/ Ondes électromagnétiques
Travaux dirigés N°6

Ondes électromagnétiques (2)

A - Vecteur de Poynting

On considère une onde progressive plane homogène se propageant parallèlement au plan xOy dans une direction faisant un angle α avec l'axe Oy, et polarisée selon l'axe Oz. Le champ électrique à l'origine O s'écrit $\vec{E}\,(0,0,0,t) = E_0 \cos\omega t\ \vec{u}_z$.

1. Écrire l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans tout l'espace.
2. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{P}(M,t)$ et la densité d'énergie $u(M,t)$ en tout point M de l'espace, ainsi que leurs moyennes temporelles.

B - Énergie solaire

Le Soleil émet une onde électromagnétique sphérique caractérisée par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui satisfont la relation vectorielle $\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{u} \wedge \vec{E}$ comme pour une onde plane où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire radial au point considéré. On raisonnera sur une onde monochromatique de pulsation ω.

1. Le rayon du Soleil est noté R. Exprimer le vecteur de Poynting à la surface du Soleil, $\vec{P}(R)$, en fonction de $E(R)$. Calculer l'amplitude du champ électrique à la surface du Soleil, $E_0(R)$, sachant que $R = 7\,10^8$ m et que le soleil rayonne une puissance totale $P = 3,8\,10^{26}$ W.
2. La lumière du Soleil met 8 minutes et 20 secondes pour parvenir sur Terre. Calculer la distance Terre-Soleil r_T.

   Quelle est l'amplitude du champ électrique $E(r_T)$ à son arrivée sur Terre ? En déduire l'intensité du rayonnement solaire à la surface de la Terre.

C - Onde électromagnétique cylindrique et vecteur de Poynting

On étudie une onde électromagnétique progressive cylindrique et monochromatique émise par des sources situées le long d'un axe Oz. En coordonnées cylindriques, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M,t) = E(\rho)\exp(i[\omega t - k\rho])\ \vec{u}_z$$

où $E(\rho)$ est réel.

1. Déterminer le champ magnétique associé à cette onde. Commenter son expression.
2. Exprimer la valeur moyenne $\langle \vec{P}(\rho) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \vec{E}(\rho) \wedge \vec{B}^*(\rho) \right\}$ du vecteur de Poynting.

   En déduire la puissance moyenne P rayonnée à travers un cylindre d'axe (Oz) de hauteur h.
3. Exprimer de $E(\rho)$ en fonction de ρ, P, k, h, ω et μ_0.

Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z):

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

D - Cylindre chargé en rotation

Un cylindre creux, de rayon intérieur R très petit comparé à sa longueur L, porte sur sa surface interne des charges dont la densité surfacique σ est uniforme. On fait tourner le cylindre autour de son axe Oz avec une accélération angulaire $\dot{\omega} = a$ constante. Le cylindre est constitué d'un matériau isolant, aussi le mouvement ne modifie-t-il pas la densité surfacique de charge. On considèrera le cylindre comme un solénoïde infini

1. Exprimer l'intensité linéïque de courant associée à la rotation du cylindre, puis le champ magnétique en tout point de la surface interne du cylindre.
2. Pourquoi observe-t-on un champ électrique à l'intérieur du cylindre ? Exprimer ce champ en tout point de la surface interne du cylindre.
3. Exprimer le vecteur de Poynting en tout point de la surface interne du cylindre.
4. Exprimer le flux sortant à travers la surface interne du cylindre. Comparer ce flux au taux de variation de l'énergie magnétique contenue à l'intérieur du cylindre dans le volume délimité par la surface interne à travers laquelle on a calculé le flux du vecteur.
5. Reprendre les questions dans le cas où la vitesse angulaire est constante. Commenter.