Corrigé du TD6

Jeudi 2 avril 2020

A. Vecteur de Poynting

1. L'onde électromagnétique, polarisée selon Oz, se propage dans le plan (Oxy). Le champ électrique s'écrit $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\,\vec{u}_z$ avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\,(\sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\,\vec{u}_y)$ le vecteur d'onde. L'onde proposée ici est une onde progressive, plane et homogène (OPPH).

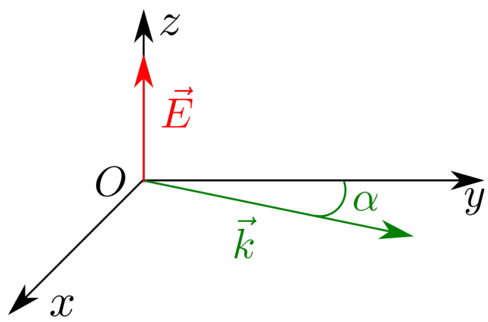

FIGURE 1 – Propagation d'une OEM dans Oxy, polarisée selon Oz

Pour une onde OPPH, le vecteur champ magnétique est donné par $\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\vec{u} \wedge \vec{E}(\vec{r},t)$ avec c la célérité de l'onde et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde. On a donc $\vec{u} = \frac{c}{\omega}\,\vec{k}$.
Notez que cette relation vectorielle se retrouve à partir de l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
On obtient :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c}\,\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0\end{pmatrix}$$

2. Le vecteur de Poynting $\vec{P}$ est défini par $\vec{P} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$. Ce vecteur dépend des coordonnées d'espace et du temps, on le notera $\vec{P}(\vec{r},t)$. Dans notre cas, on a $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\mu_0\,\omega}\,\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0\,\omega}\,(\vec{E}^2\,\vec{k} - (\vec{E}.\vec{k})\,\vec{E}) \\ &= \frac{\vec{E}^2}{\mu_0\,\omega}\,\vec{k}\end{aligned}$$

Pour obtenir cette dernière relation, nous avons pris en compte que $\vec{k} \perp \vec{E}$ ($\vec{k}.\vec{E} = 0$) et utilisé l'expression générale de transformation du double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\,\vec{C}$$

Comme $\dfrac{\vec{E}^2}{\mu_0\,\omega} > 0$, le vecteur de Poynting est dans le sens de propagation de l'onde électromagnétique.
La valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{P}(\vec{r},t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\langle \vec{P}(\vec{r},t)\rangle_t &= \frac{E_0^2}{2\,\mu_0\,\omega}\,\vec{k} \\ &= \frac{E_0^2}{2\,\mu_0\,c}\,(\sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\,\vec{u}_y)\end{aligned}$$

La densité volumique d'énergie, notée $u(\vec{r},t)$, est donnée par :

$$u(\vec{r},t) = \frac{\epsilon_0\,\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\,\mu_0}$$

En utilisant $||\ \vec{B}\ || = \frac{||\vec{E}||}{c}$ et $\epsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$, on trouve $u(\vec{r},t) = \epsilon_0\,\vec{E}^2$.
On en déduit l'expression de la valeur moyenne de la densité dénergie volumique :

$$\langle u(\vec{r},t)\rangle_t = \frac{\epsilon_0\,E_0^2}{2}$$

Pour une OPPH, on note que $\langle u(\vec{r},t)\rangle_t$ est constante dans tout l'espace.

B. **Énergie solaire**

On considère ici le champ électromagnétique généré par le soleil. Du fait de la symétrie sphérique de la source, l'onde électromagnétique créée sera une onde sphérique.
Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ s'écrira sous la forme $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(r)\,\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\,\frac{\vec{r}}{r}$.

1. À la surface du soleil ($r = R$), le vecteur de Poynting $\vec{P}(R,t)$ est défini par :

$$\vec{P}(R,t) = \frac{\vec{E}(R,t)\wedge\vec{B}(R,t)}{\mu_0}$$

On trouve $||\ \vec{P}(R,t)\ || = \epsilon_0\,c\,\vec{E}^2(R,t)$, égale à une constante sur la surface sphérique de rayon R, à un instant t donné.
Comme la puissance instantanée $\mathcal{P}(R,t)$ à la surface du soleil est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface définie par $r = R$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(R,t) &= \int\!\!\int \vec{P}(R,t).d\vec{S} \\ &= \epsilon_0\,c\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}^2(R,t)R^2\ \sin\theta\,d\theta\,d\varphi \\ &= \epsilon_0\,c\,\vec{E}^2(R,t)\times 4\pi\,R^2\end{aligned}$$

La puissance moyenne est ainsi donnée par $\langle\mathcal{P}(R,t)\rangle_t = 2\pi\,\epsilon_0\,c\,R^2\,E_0^2(R)$.
On en déduit :

$$E_0(R) = \frac{1}{R}\left[\frac{\langle\mathcal{P}(R,t)\rangle_t}{2\pi\,\epsilon_0\,c}\right]^{\frac{1}{2}}$$

On trouve $E_0(R) \approx 2\ 10^5$ V.m^{-1}.

2. $r_T = c \times \Delta t$. On trouve $r_T \approx 1{,}5\ 10^8$ km.
3. Dans le cas d'une onde sphérique se propageant dans le vide, l'onde ne va pas être atténuée. La puissance moyenne va donc être constante en fonction de la distance à la source émettrice (voir relation précécente). On en déduit que l'amplitude du champ électrique pour une onde sphérique va être proportionnelle à $\frac{1}{r}$. On en déduit :

$$E_0(r) = \frac{R}{r}\, E_0(R)$$

En particulier, le champ électrique à la surface de la Terre sera donné par $E_0(r_T) = \frac{R}{r_T}\, E_0(R)$.
On trouve $E_0(r_T) \approx 10^3$ V.m^{-1}.
L'intensité solaire à la surface de la Terre sera égale à $\mathcal{I} = \frac{\langle P(R,t)\rangle_t}{4\pi r_T^2}$.
On trouve $\mathcal{I} \approx 1{,}34$ kW.m^{-2}.

C. **Onde électromagnétique cylindrique et vecteur de Poynting**
Le champ électrique complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = E(\rho)\, e^{i(\omega t - k\rho)}\, \vec{u}_z$$

L'onde cylindrique est polarisée suivant (Oz) et se propage suivant le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$. Les surfaces d'onde sont telles que $\rho = C^{te}$ (surface d'un cylindre, d'axe de révolution (Oz) et de rayon ρ). L'onde est homogène, l'amplitude du champ électrique est constante sur une surface d'onde cylindrique.

1. Pour déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(\vec{r},t)$, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. À partir de l'expression du vecteur rotationnel dans le système de coordonnées cylindriques, on en déduit :

$$\vec{rot}\underline{\vec{E}} = -\left[\frac{dE(\rho)}{d\rho} - i\,k\,E(\rho)\right] e^{i(\omega t - k\rho)}\, \vec{u}_\theta = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

On trouve finalement :

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = -\left[\frac{i}{\omega}\,\frac{dE(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{c}\,E(\rho)\right] e^{i(\omega t - k\rho)}\, \vec{u}_\theta$$

Le champ magnétique est orthoradial et ne dépend que de la variable d'espace ρ. On note que $\vec{B} \perp \vec{k}$ et $\vec{B} \perp \vec{E}$. Du fait de la dépendence de l'amplitude du champ électrique en fonction de ρ, un déphasage apparaît entre les champs électrique et magnétique. Ce déphasage sera explicité à la fin de l'exercice.

2. La valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle\vec{\mathcal{P}}(\rho)\rangle$ est donnée par :

$$\langle\vec{\mathcal{P}}(\rho)\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathcal{R}\left[\underline{\vec{E}}(\rho) \wedge \underline{\vec{B}}^*(\rho)\right]$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}(\rho) \wedge \underline{\vec{B}}^*(\rho) &= E(\rho)\, e^{i(\omega t - k\rho)}\, \vec{u}_z \wedge \left[\frac{i}{\omega}\,\frac{dE(\rho)}{dt} - \frac{1}{c}\,E(\rho)\right] e^{-i(\omega t - k\rho)}\, \vec{u}_\theta \\
&= E(\rho)\, \left[\frac{i}{\omega}\,\frac{dE(\rho)}{d\rho} - \frac{1}{c}\,E(\rho)\right] \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta \\
&= E(\rho)\, \left[-\frac{i}{\omega}\,\frac{dE(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{c}\,E(\rho)\right] \vec{u}_\rho
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\langle\vec{\mathcal{P}}(\rho)\rangle = \frac{E^2(\rho)}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{u}_\rho$$

La puissance moyenne P rayonnée à travers un cylindre d'axe (Oz) est égale au flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers la surface du cylindre. On obtient :

$$\begin{aligned} P &= \int\int \langle\vec{\mathcal{P}}(\rho)\rangle.d\vec{S} \\ P &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h}\frac{E^2(\rho)}{2\,\mu_0\,c}\,\rho d\theta\,dz \\ &= \frac{E^2(\rho)}{2\,\mu_0\,c}\,2\pi\rho\,h \end{aligned}$$

3. À partir de l'expression précédente, on trouve :

$$E(\rho) = \left[\frac{\mu_0\,c\,P}{\pi\,h}\right]^{\frac{1}{2}} \times \rho^{-\frac{1}{2}}$$

Dans le cas d'une onde cylindrique se propageant sans atténuation, l'amplitude du champ électrique est $\propto \rho^{-\frac{1}{2}}$.

Notons $K = \left[\frac{\mu_0\,c\,P}{\pi\,h}\right]^{\frac{1}{2}}$. Comme $E(\rho) = K\,\rho^{-\frac{1}{2}}$. On en déduit $\frac{dE(\rho)}{d\rho} = -\frac{E(\rho)}{2\,\rho}$. Injectons ce résultat dans l'expression du vecteur champ magnétique obtenue à la question 1-. On obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}}(\vec{r},t) &= -\frac{E(\rho)}{c}\left[1 - i\frac{c}{2\,\omega\rho}\right]e^{i(\omega t - k\rho)}\,\vec{u}_\theta \\ &= -\frac{E(\rho)}{c}\sqrt{1+(\frac{c}{2\,\omega\rho})^2}\,e^{i(\omega t - k\rho+\varphi)}\,\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

avec $\tan\varphi = -\frac{c}{2\,\omega\rho}$.

D. **Cylindrique chargé en rotation**

1. La surface interne du cylindre est chargée uniformément avec la densité de charge σ. Lorsque cette distribution de charge est en rotation à la vitesse angulaire ω, la nappe de courant engendrée est similaire à celle d'un solénoïde. On sait que le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde de n spires par mètre parcouru par un courant I est $B = \mu_0 nI$. Ici et comme représenté sur la figure 2, la charge contenue dans la surface élémentaire d^2S vaut

$$d^2Q = \sigma d^2S = \sigma R\,d\theta\,dz$$

Le courant correspondant au déplacement de cette charge pendant le temps dt est

$$dI = \frac{d^2Q}{dt} = \frac{\sigma R\,d\theta\,dz}{dt} = \sigma R\,\omega\,dz$$

où l'on a introduit la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ – ce qui signifie que l'angle $d\theta$ doit être défini à partir du petit déplacement de la charge pendant dt.

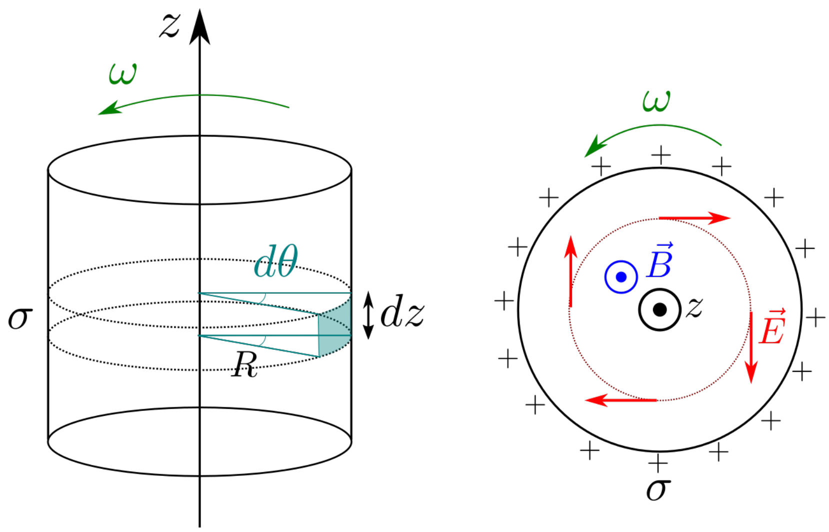

FIGURE 2 – Face interne et chargée du cylindre en rotation

La densité linéique de courant, c'est-à-dire le courant circulant dans la bande de hauteur dz est donc :

$$\frac{dI}{dz} = \sigma R\,\omega$$

Cette grandeur $\frac{dI}{dz}$, qui s'exprime en A/m, correspond dans le solénoïde ordinaire au terme nI. Finalement, le champ créé à l'intérieur du cylindre en rotation uniforme s'écrirait

$$B = \mu_0 \frac{dI}{dz} = \mu_0\,\sigma R\,\omega$$

Si la rotation n'est pas uniforme, ce champ sera celui au voisinage immédiat de la paroi interne.

2. Le champ électrique peut avoir deux origines :
   — le champ coulombien vu en statique et correspondant à la solution de l'équation de Maxwell-Gauss : $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Par symétrie à l'intérieur du cylindre, ce champ est nul.
   — le champ créé par des variations de $\vec{B}$, selon la loi de Maxwell-Faraday : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Ici les variations de $\vec{B}$ sont seulement selon Oz. Le rotationnel de $\vec{E}$ est dans la même direction, indiquant que les lignes de champ vont s'enrouler autour de Oz. Le système étant aussi invariant par translation selon Oz et rotation autour de cet axe, le champ électrique sera de la forme :

$$\vec{E} = E(r)\;\vec{u}_\theta$$

La norme du champ électrique peut se trouver avec la forme intégrale de Maxwell-Faraday, c'est-à-dire en intégrant sur une ligne de champ circulaire centrée sur Oz, comme celle représentée sur la partie droite de la figure 2 :

$$e = \int \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

L'intégrale de circulation vaut juste :

$$\int \vec{E}.d\vec{\ell} = 2\pi r E(r)$$

Près de la surface interne du cylindre, on prendra $r = R$.
Pour le terme de flux, nous allons recourir à une approximation assez naturelle dans le contexte de l'énoncé (rotation d'un système matériel) même si on ne vous donne pas d'indication stricte à ce sujet : on va supposer négligeable le temps de propagation du champ magnétique à l'intérieur du cylindre [1]. Dans ce cas, on peut considérer que la valeur du champ magnétique est la même partout dans le cylindre, et imposée par la vitesse angulaire à un instant donné selon l'expression de la question précédente. Alors le flux traverse une section du cylindre vaut :

$$\Phi = \pi R^2 B = \pi R^3 \mu_0 \, \sigma \, \omega$$

Si $\omega = at$, alors on a

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^3 \mu_0 \, \sigma a$$

d'où

$$E(R) = \frac{-\frac{d\Phi}{dt}}{2\pi R} = -\frac{1}{2}\mu_0 R^2 \sigma a$$

Au final :

$$\vec{E}(R) = -\frac{1}{2}\mu_0 R^2 \sigma a \, \vec{u}_\theta$$

3. On a donc pour le vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}(-\frac{1}{2}\mu_0 R^2 \sigma a \, \vec{u}_\theta) \wedge (\mu_0 \sigma R \omega \, \vec{u}_z) = -\frac{1}{2}\mu_0 R^3 \sigma^2 \omega a \, \vec{u}_r$$

C'est un vecteur radial qui pointe vers l'intérieur du cylindre. L'énergie électromagnétique va donc entrer dans le cylindre (si $a > 0$).

4. On prend comme surface de Poynting un cylindre qui se superpose à notre cylindre en rotation, sur une hauteur h. Pour appliquer le théorème de Poynting, il faut raisonner sur une surface fermée mais ici aucune énergie ne sort par les faces plates du cylindre, puisque le vecteur $\vec{P}$ est radial. On peut donc calculer la puissance sortante en intégrant sur la paroi cylindrique de hauteur h :

$$\mathcal{P} = \int \vec{P}.d\vec{S} = P.2\pi Rh = -\pi\mu_0 R^4 \sigma^2 \omega a = -\pi\mu_0 R^4 \sigma^2 a^2 t$$

puisque $\omega = at$. C'est une puissance sortante négative, donc entrante dans le cylindre !
Vérifions que c'est cohérent avec l'énergie magnétique contenue dans le même cylindre de hauteur h. La densité d'énergie magnétique est

$$\frac{dE_m}{d\mathcal{V}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

donc pour le champ supposé uniforme, le cylindre contient l'énergie :

$$E_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.2\pi Rh = \frac{(\mu_0 \sigma R a t)^2}{2\mu_0}$$

et sa variation par unité de temps est :

$$\frac{dE_m}{dt} = \pi\mu_0 R^4 \sigma^2 a^2 t = -\mathcal{P}$$

C'est cohérent ! L'énergie qui entre s'accumule dans le cylindre.

1. C'est identique à l'approximation que l'on fait lorsque l'on étudie des circuits électriques dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), en négligeant le temps de propagation des signaux électriques dans les fils.

5. Si $\omega = 0$, on se retrouve dans le cas du solénoïde ordinaire - bien qu'avec une surface chargée électriquement. Le champ magnétique est uniforme et surtout constant dans le cylindre, donc il n'y a aucune variation de flux et le champ électrique est nul partout à l'intérieur. Le vecteur de Poynting est donc nul aussi : pas de flux d'énergie, et pas d'accumulation non plus.