

# Note de calcul : détermination du couple d'un rotor Savonius

## Problème

Dans l'optique de prédire les performances d'un rotor Savonius il faut commencer par déterminer le couple moyen qui lui est appliqué pour un vent incident donné : c'est l'objectif de cette note de calcul. Tous les calculs menés ici sont fait de manière purement analytique.

## Démarche

Pour déterminer le couple appliqué au rotor l'étude portée ici utilise les différents efforts aérodynamiques créés par le vent sur les pales.

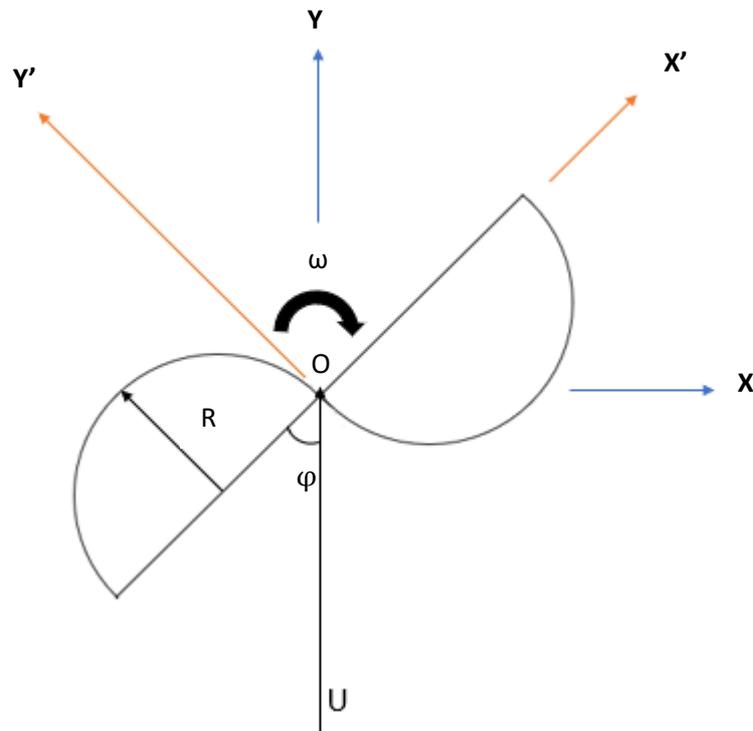
## Description du problème et paramétrage

Un rotor Savonius est composé de deux demi-tubes : l'un d'eux est convexe, l'autre concave. C'est cette différence géométrique qui permet la mise en rotation : on a une différence des efforts de traînée et une « addition » des efforts de portance, qui créent un moment et met en rotation le système.



Rotor Savonius

L'étude du rotor sera faite en 2D, vu la géométrie du rotor : on se placera dans un plan où la hauteur n'a aucune influence. On a alors la situation suivante :



Avec :

- $R_0(x,y,z)$  le repère lié au référentiel (repère fixe)
- $R_1(X',Y',z)$  le repère lié au rotor (repère mobile)
- $U$  la vitesse du vent (considérée ici comme constante, soit loin du rotor et de ses perturbations)
- $\varphi$  l'angle que fait le vent avec le rotor ( $\varphi = 90^\circ$  quand les pales font face au vent, soit quand  $R_0=R_1$ )
- $\omega = d\varphi/dt$ , la vitesse angulaire du rotor
- $R$  le rayon des demi-tubes
- $L$  la hauteur du rotor
- $P$  le centre de poussée, point d'application de toutes les résultantes aérodynamiques pour la pale entrante quelque part sur l'axe de symétrie du tube (à déterminer expérimentalement pour plus de rigueur),
- $P'$  le centre de poussée, point d'application de toutes les résultantes aérodynamiques pour la pale sortante, quelque part sur l'axe de symétrie du tube
- $C_z$  le coefficient de portance (identique pour les deux pales)
- $C_x$  le coefficient de trainée de la pale entrante
- $C_x'$  le coefficient de trainée de la pale sortante

La suite de l'étude sera menée dans le repère  $R_0$ , tandis que le vent sera lui décomposé dans le repère  $R_1$  de manière à simplifier l'étude. Cette hypothèse, bien que peu rigoureuse, permet dans une première approche de considérer que les coefficients  $C_z$ ,  $C_x$ , et  $C_x'$  sont constants.

## Détermination du couple

Puisque l'étude est menée dans le repère  $R_0$ , on peut décomposer le vent  $U$  en deux composantes dans le repère  $R_1$  :

Une composante radiale  $\vec{U}_r = U |\cos(\varphi)| \vec{X}'$

Une composante tangentielle  $\vec{U}_t = U \sin(\varphi) \vec{Y}'$

Enfin, le rotor étant également animé d'un mouvement de rotation, les pales sont soumises à un vent relatif qui est issu de la composition des vitesses.

On a alors les vents :

$\vec{V}_r = \vec{U}_r = U |\cos(\varphi)| \vec{X}'$  (cette composante étant radiale, la vitesse de rotation n'a aucune influence sur elle)

$\vec{V}_t = (U \sin(\varphi) + \omega R) \vec{Y}'$  (on prend ici la vitesse relative moyenne  $\omega R$ , mais une vitesse moyenne quadratique serait sûrement plus adaptée)

Il faut maintenant déterminer les efforts qui sont appliqués à chacune des pales du rotor.

Chacune des deux pales est soumise à deux efforts qui sont la trainée et la portance, respectivement dus aux vents  $V_t$  et  $V_r$ .

Pour simplifier l'étude on étudie la pale entrante pour  $\varphi$  variant  $[0, \pi]$  et la pale sortante pour  $\varphi$  allant de  $[\pi, 2\pi]$ , puis on multiplie le moment obtenu par 2.

### Pale entrante :

Deux forces sont appliquées sur la pale entrante : la trainée ( $F_x$ ) et la portance ( $F_z$ ).

$$\vec{F}_x = 0.5 \rho S_x C_x V_t^2 \vec{Y}'$$

$$\vec{F}_z = 0.5 \rho S_z C_z V_r^2 \vec{Y}'$$

Avec :

$\rho$  la masse volumique de l'air,  $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$  considérée comme constante

$C_x$  le coefficient de trainée de la pale entrante, constant puisque c'est le vent qui est changeant,  $C_x = 1,4$  pour un demi-tube (concave)

$C_z$  le coefficient de portance de la pale entrante, constant puisque c'est le vent qui est changeant, sa valeur reste à déterminer

$S_x$  la surface projetée,  $S_x = 2LR$

$S_z$  la surface portée,  $S_z = 2LR$

D'où :

$$\overrightarrow{F_x} = 0.5\rho C_x 2LR (U \sin(\varphi) + \omega R)^2 \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{F_z} = 0.5\rho C_z 2LR (U \cos(\varphi))^2 \overrightarrow{Y'}$$

Chacune de ces deux forces créent alors un moment autour de l'axe  $\vec{Z}$  :

$$\overrightarrow{M_x} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_x} = (-R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_x 2LR (U \sin(\varphi) + \omega R)^2 \overrightarrow{Y'} = -R^2 \rho C_x L (U \sin(\varphi) + \omega R)^2 \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{M_z} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_z} = (-R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_z 2LR (U \cos(\varphi))^2 \overrightarrow{Y'} = -R^2 \rho C_z L (U \cos(\varphi))^2 \vec{Z}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{M_{entr}} = -R^2 \rho L (C_z (U \cos(\varphi))^2 + C_x (U \sin(\varphi) + \omega R)^2) \vec{Z}$$

### Pale sortante :

Le même raisonnement peut alors être effectué pour cette pale :

$$\overrightarrow{F_{x'}} = 0.5\rho S_x C_{x'} V_t'^2 \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{F_{z'}} = 0.5\rho S_z C_z V_r'^2 \overrightarrow{Y'}$$

Où  $\rho$ ,  $S_x$ ,  $S_z$  et  $C_z$  restent inchangé par rapport à la pale entrante.

$C_x'$  est le coefficient de trainée de la pale sortante, convexe puisque c'est le vent qui est changeant.

$C_x = 0,4$  pour un demi-hémisphère creux (convexe)

Avec :

$$\overrightarrow{V_t'} = (U \sin(\varphi) - \omega R) \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{V_r'} = U |\cos(\varphi)| \overrightarrow{X'}$$

Alors :

$$\overrightarrow{M_{x'}} = \overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{F_{x'}} = (R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_{x'} 2LR (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 \overrightarrow{Y'} = R^2 \rho C_{x'} L (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{M_{z'}} = \overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{F_{z'}} = (R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_z 2LR (U \cos(\varphi))^2 \overrightarrow{Y'} = R^2 \rho C_z L (U \cos(\varphi))^2 \vec{Z}$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{M_{sort}} = R^2 \rho L (C_{x'} (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 + C_z (U \cos(\varphi))^2)$$

On peut alors en déduire le moment total moyen sur un tour :

$$\overrightarrow{M_{moy}} = 2 * [\int_0^\pi R^2 \rho L (-C_z (U \cos(\varphi))^2 - C_x (U \sin(\varphi) + \omega R)^2) d\varphi + \int_\pi^{2\pi} R^2 \rho L (C_{x'} (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 + C_z (U \cos(\varphi))^2) d\varphi]$$

$$\overline{Mmoy} = 2R^2\rho L \left[ \int_0^\pi (-CzU^2\cos^2(\varphi) - Cx(U^2\sin^2(\varphi) + \omega^2R^2 + 2\omega RUsin(\varphi)))d\varphi + \int_\pi^{2\pi} (C'x(U^2\sin^2(\varphi) - 2\omega RUsin(\varphi) + \omega^2R^2) + CzU^2\cos^2(\varphi))d\varphi \right]$$

$$\overline{Mmoy} = 2R^2L\rho [-Cx (0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 + 2RU\omega) - 2CxRU\omega + Cx' (U^2\pi + 2R\pi\omega^2 + 2RU\omega) - Cx' (0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 - 2RU\omega)]$$