

Note de calcul : détermination du couple d'un rotor Savonius

Problème

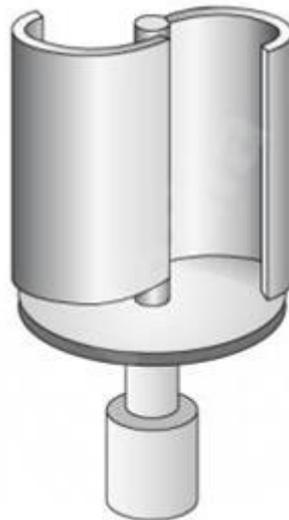
Dans l'optique de prédire les performances d'un rotor Savonius il faut commencer par déterminer le couple moyen qui lui est appliqué pour un vent incident donné : c'est l'objectif de cette note de calcul. Tous les calculs menés ici sont fait de manière purement analytique.

Démarche

Pour déterminer le couple appliqué au rotor l'étude portée ici utilise les différents efforts aérodynamiques créés par le vent sur les pales.

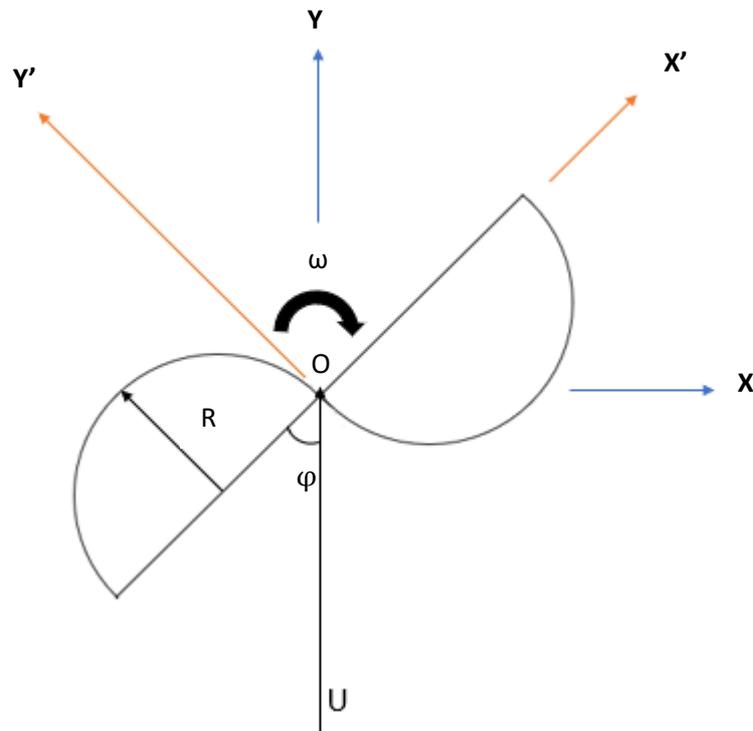
Description du problème et paramétrage

Un rotor Savonius est composé de deux demi-tubes : l'un d'eux est convexe, l'autre concave. C'est cette différence géométrique qui permet la mise en rotation : on a une différence des efforts de trainée et une « addition » des efforts de portance, qui créent un moment et met en rotation le système.



Rotor Savonius

L'étude du rotor sera faite en 2D, vu la géométrie du rotor : on se placera dans un plan où la hauteur n'a aucune influence. On a alors la situation suivante :



Avec :

- $R_0(x,y,z)$ le repère lié au référentiel (repère fixe)
- $R_1(X',Y',z)$ le repère lié au rotor (repère mobile)
- U la vitesse du vent (considérée ici comme constante, soit loin du rotor et de ses perturbations)
- φ l'angle que fait le vent avec le rotor ($\varphi = 90^\circ$ quand les pales font face au vent, soit quand $R_0=R_1$)
- $\omega = d\varphi/dt$, la vitesse angulaire du rotor
- R le rayon des demi-tubes
- L la hauteur du rotor
- P le centre de poussée, point d'application de toutes les résultantes aérodynamiques pour la pale entrante quelque part sur l'axe de symétrie du tube (à déterminer expérimentalement pour plus de rigueur),
- P' le centre de poussée, point d'application de toutes les résultantes aérodynamiques pour la pale sortante, quelque part sur l'axe de symétrie du tube
- C_z le coefficient de portance (identique pour les deux pales)
- C_x le coefficient de trainée de la pale entrante
- C_x' le coefficient de trainée de la pale sortante

La suite de l'étude sera menée dans le repère R_0 , tandis que le vent sera lui décomposé dans le repère R_1 de manière à simplifier l'étude. Cette hypothèse, bien que peu rigoureuse, permet dans une première approche de considérer que les coefficients C_z , C_x , et C_x' sont constants.

Détermination du couple

Puisque l'étude est menée dans le repère R_0 , on peut décomposer le vent U en deux composantes dans le repère R_1 :

Une composante radiale $\vec{U}_r = U |\cos(\varphi)| \vec{X}'$

Une composante tangentielle $\vec{U}_t = U \sin(\varphi) \vec{Y}'$

Enfin, le rotor étant également animé d'un mouvement de rotation, les pales sont soumises à un vent relatif qui est issu de la composition des vitesses.

On a alors les vents :

$\vec{V}_r = \vec{U}_r = U |\cos(\varphi)| \vec{X}'$ (cette composante étant radiale, la vitesse de rotation n'a aucune influence sur elle)

$\vec{V}_t = (U \sin(\varphi) + \omega R) \vec{Y}'$ (on prend ici la vitesse relative moyenne ωR , mais une vitesse moyenne quadratique serait sûrement plus adaptée)

Il faut maintenant déterminer les efforts qui sont appliqués à chacune des pales du rotor.

Chacune des deux pales est soumise à deux efforts qui sont la trainée et la portance, respectivement dus aux vents V_t et V_r .

Pour simplifier l'étude on étudie la pale entrante pour φ variant $[0, \pi]$ et la pale sortante pour φ allant de $[\pi, 2\pi]$, puis on multiplie le moment obtenu par 2.

Pale entrante :

Deux forces sont appliquées sur la pale entrante : la trainée (F_x) et la portance (F_z).

$$\vec{F}_x = 0.5 \rho S_x C_x V_t^2 \vec{Y}'$$

$$\vec{F}_z = 0.5 \rho S_z C_z V_r^2 \vec{Y}'$$

Avec :

ρ la masse volumique de l'air, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ considérée comme constante

C_x le coefficient de trainée de la pale entrante, constant puisque c'est le vent qui est changeant, $C_x = 1,4$ pour un demi-tube (concave)

C_z le coefficient de portance de la pale entrante, constant puisque c'est le vent qui est changeant, sa valeur reste à déterminer

S_x la surface projetée, $S_x = 2LR$

S_z la surface portée, $S_z = 2LR$

D'où :

$$\overrightarrow{F_x} = 0.5\rho C_x 2LR(U\sin(\varphi) + \omega R)^2 \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{F_z} = 0.5\rho C_z 2LR(U\cos(\varphi))^2 \overrightarrow{Y'}$$

Chacune de ces deux forces créent alors un moment autour de l'axe \vec{Z} :

$$\overrightarrow{M_x} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_x} = (-R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_x 2LR(U\sin(\varphi) + \omega R)^2 \overrightarrow{Y'} = -R^2\rho C_x L(U\sin(\varphi) + \omega R)^2 \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{M_z} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_z} = (-R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_z 2LR(U\cos(\varphi))^2 \overrightarrow{Y'} = -R^2\rho C_z L(U\cos(\varphi))^2 \vec{Z}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{M_{entr}} = -R^2\rho L(C_z(U\cos(\varphi))^2 + C_x(U\sin(\varphi) + \omega R)^2) \vec{Z}$$

Pale sortante :

Le même raisonnement peut alors être effectué pour cette pale :

$$\overrightarrow{F_{x'}} = 0.5\rho S_x C_{x'} V_t'^2 \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{F_{z'}} = -0.5\rho S_z C_z V_r'^2 \overrightarrow{Y'}$$

Où ρ , S_x , S_z et C_z restent inchangé par rapport à la pale entrante.

C_x' est le coefficient de trainée de la pale sortante, convexe puisque c'est le vent qui est changeant.

$C_x=0,4$ pour un demi-hémisphère creux (convexe)

Avec :

$$\overrightarrow{V_t'} = (U\sin(\varphi) - \omega R) \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{V_r'} = U|\cos(\varphi)| \overrightarrow{X'}$$

Alors :

$$\overrightarrow{M_{x'}} = \overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{F_{x'}} = (R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho C_{x'} 2LR(U\sin(\varphi) - \omega R)^2 \overrightarrow{Y'} = R^2\rho C_{x'} L (U\sin(\varphi) - \omega R)^2 \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{M_{z'}} = \overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{F_{z'}} = (R \overrightarrow{X'}) \wedge (-0.5\rho C_z 2LR(U\cos(\varphi))^2) \overrightarrow{Y'} = -R^2\rho C_z L(U\cos(\varphi))^2 \vec{Z}$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{M_{sort}} = R^2\rho L(C_{x'}(U\sin(\varphi) - \omega R)^2 - C_z(U\cos(\varphi))^2)$$

On peut alors en déduire le moment total moyen sur un tour :

$$\overrightarrow{M_{moy}} = \frac{1}{2\pi} 2 * [\int_0^\pi R^2\rho L (-C_z(U\cos(\varphi))^2 - C_x(U\sin(\varphi) + \omega R)^2) d\varphi + \int_\pi^{2\pi} R^2\rho L (C_{x'}(U\sin(\varphi) - \omega R)^2 - C_z(U\cos(\varphi))^2) d\varphi]$$

$$\overline{Mmoy} = \frac{1}{\pi} R^2 \rho L \left[\int_0^\pi (-CzU^2 \cos^2(\varphi) - Cx(U^2 \sin^2(\varphi) + \omega^2 R^2 + 2\omega RU \sin(\varphi))) d\varphi + \int_\pi^{2\pi} (Cx'(U^2 \sin^2(\varphi) - 2\omega RU \sin(\varphi) + \omega^2 R^2) - CzU^2 \cos^2(\varphi)) d\varphi \right]$$

$$\overline{Mmoy} = \frac{1}{\pi} R^2 L \rho [-Cx (0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 + 2RU\omega) - 2CxRU\omega + Cx' (U^2\pi + 2R^2\pi\omega^2 + 2RU\omega) - Cx' (0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 - 2RU\omega) - Cz\pi U^2]$$

$$\overline{Mmoy} = \frac{1}{\pi} R^2 L \rho [-Cx (0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 + 4RU\omega) + Cx' (0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 + 4RU\omega) - Cz\pi U^2]$$

$$\overline{Mmoy} = \frac{1}{\pi} R^2 L \rho [(Cx' - Cx)(0.5U^2\pi + \pi R^2\omega^2 + 4RU\omega) - Cz\pi U^2]$$

Ou encore, dans le but de résoudre une équation différentielle :

$$\overline{Mmoy} = \frac{1}{\pi} R^2 L \rho [(Cx' - Cx)\pi R^2\omega^2 + (Cx' - Cx)4RU\omega - Cz\pi U^2 + (Cx' - Cx)0.5U^2\pi]$$

Qui est alors de la forme $\overline{Mmoy} = A\omega^2 + B\omega + C$