

# Note de calcul : détermination du couple d'un rotor Savonius

## Problème

Dans l'optique de prédire les performances d'un rotor Savonius il faut commencer par déterminer le couple moyen qui lui est appliqué pour un vent incident donné : c'est l'objectif de cette note de calcul. Tous les calculs menés ici sont fait de manière purement analytique.

## Démarche

Pour déterminer le couple appliqué au rotor, l'étude portée ici utilise les différents efforts aérodynamiques créés par le vent sur les pales.

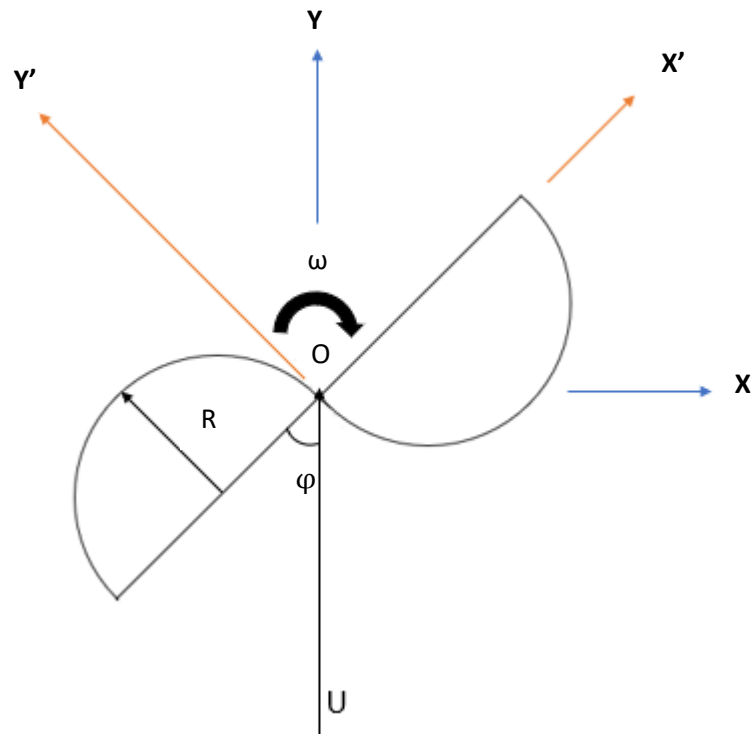
## Description du problème et paramétrage

Un rotor Savonius est composé de deux demi-tubes : l'un d'eux est convexe, l'autre concave. C'est cette différence géométrique qui permet la mise en rotation : on a une différence des efforts de traînée et une « addition » des efforts de portance, qui créent un moment et met en rotation le système.



Rotor Savonius

L'étude du rotor sera faite en 2D, vu la géométrie du rotor : l'étude est alors menée dans un plan où la hauteur n'a aucune influence. La situation est la suivante :



Avec :

- $R_0(x,y,z)$  le repère lié au référentiel (repère fixe)
- $R_1(X',Y',z)$  le repère lié au rotor (repère mobile)
- $U$  la vitesse du vent (considérée ici comme constante, soit loin du rotor et de ses perturbations)
- $\varphi$  l'angle que fait le vent avec le rotor ( $\varphi = 90^\circ$  quand les pales font face au vent, soit quand  $R_0=R_1$ )
- $\omega = d\varphi/dt$ , la vitesse angulaire du rotor
- $R$  le rayon des demi-tubes
- $L$  la hauteur du rotor
- $P$  le centre de poussée, point d'application de toutes les résultantes aérodynamiques pour la pale sortante (du vent) quelque part sur l'axe de symétrie du tube (à déterminer expérimentalement pour plus de rigueur),
- $P'$  le centre de poussée, point d'application de toutes les résultantes aérodynamiques pour la pale entrante (dans le vent), quelque part sur l'axe de symétrie du tube
- $C_z$  le coefficient de portance (identique pour les deux pales)
- $C_x$  le coefficient de trainée de la pale sortante (partie « creuse »)
- $C_x'$  le coefficient de trainée de la pale entrante (partie « bombée »)

La suite de l'étude sera menée dans le repère  $R_0$ , tandis que le vent sera lui décomposé dans le repère  $R_1$  de manière à simplifier l'étude. Cette hypothèse, bien que peu rigoureuse, permet dans une première approche de considérer que les coefficients  $C_z$ ,  $C_x$ , et  $C_x'$  sont constants.

## Détermination du couple

Puisque l'étude est menée dans le repère  $R_0$ , le vent  $U$  peut être décomposé en deux composantes dans le repère  $R_1$  :

Une composante radiale  $\overline{U_r} = U |\cos(\varphi)| \overline{X'}$

Une composante tangentielle  $\overline{U_t} = U \sin(\varphi) \overline{Y'}$

Enfin, le rotor étant également animé d'un mouvement de rotation, les pales sont soumises à un vent relatif qui est issu de la composition des vitesses.

D'où les vents :

$\overline{V_r} = \overline{U_r} = U |\cos(\varphi)| \overline{X'}$  (cette composante étant radiale, la vitesse de rotation n'a aucune influence sur elle)

$\overline{V_t} = \pm((U \sin(\varphi) - \omega R)) \overline{Y'}$  pour la pale sortante. Le signe reste à déterminer puisqu'on ne connaît pas à priori le signe de  $U \sin(\varphi) - \omega R$ . La vitesse relative moyenne  $\omega R$  est utilisée ici, mais une vitesse moyenne quadratique serait sûrement plus adaptée.

$\overline{V_t'} = (U \sin(\varphi) + \omega R) \overline{Y'}$  pour la pale entrante.

Il faut maintenant déterminer les efforts qui sont appliqués à chacune des pales du rotor.

Chacune des deux pales est soumise à deux efforts qui sont la trainée et la portance, respectivement dus aux vents  $V_t$ ,  $V_t'$  et  $V_r$ .

Pour simplifier l'étude, le système est étudié pour  $\varphi$  variant de 0 à  $\pi$ , puis le résultat sera multiplié par 2 pour obtenir le moment théorique sur un tour, et enfin divisé par  $2\pi$  pour obtenir le moment moyen.

### Pale sortante :

Deux forces sont appliquées sur la pale sortante : la trainée ( $F_x$ ) et la portance ( $F_z$ ).

$\vec{F}_x = \pm 0.5\rho S_x C_x V t^2 \vec{Y}'$ . Le signe de cette force de trainée dépend elle-même de la direction du vent  $\vec{V}t$ .

Si  $(U \sin(\varphi) - \omega R) > 0$  alors on a  $\vec{F}_x = F_x \vec{Y}'$ . Dans le cas contraire  $\vec{F}_x = - F_x \vec{Y}'$ .

$$\vec{F}_z = 0.5\rho S_z C_z V r^2 \vec{Y}'$$

Avec :

$\rho$  la masse volumique de l'air,  $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$  considérée comme constante

$C_x$  le coefficient de trainée de la pale sortante, constant puisque c'est le vent qui est changeant,  $C_x=1,4$  pour un demi-tube (concave)

$C_z$  le coefficient de portance de la pale sortante, constant puisque c'est le vent qui est changeant, sa valeur reste à déterminer

$S_x$  la surface projetée,  $S_x = 2LR$

$S_z$  la surface portée,  $S_z = 2LR$

D'où :

$$\vec{F}_x = 0.5\rho C_x 2LR (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 \vec{Y}' \text{ ou } \vec{F}_x = -0.5\rho C_x' 2LR (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 \vec{Y}' \text{ (selon le signe du vent } Vt)$$

$$\vec{F}_z = 0.5\rho C_z 2LR (U \cos(\varphi))^2 \vec{Y}'$$

Chacune de ces deux forces crée alors un moment autour de l'axe  $\vec{Z}$  :

$$\vec{M}_x = \vec{OP} \wedge \vec{F}_x = (-R \vec{X}') \wedge (\pm F_x \vec{Y}')$$

$$\vec{M}_z = \vec{OP} \wedge \vec{F}_z = (-R \vec{X}') \wedge 0.5\rho C_z 2LR (U \cos(\varphi))^2 \vec{Y}' = -R^2 \rho C_z L (U \cos(\varphi))^2 \vec{Z}$$

Pour déterminer le moment créé par la force  $\vec{F}_x$ , l'étude doit être scindée.

En effet, si  $U \sin(\varphi) - \omega R > 0$  alors il y a bien un moment de poussée qui a tendance à mettre en rotation le système. Alors  $\vec{F}_x = 0.5\rho C_x 2LR (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 \vec{Y}'$

Si  $U \sin(\varphi) - \omega R < 0$  alors il y a un moment de "freinage" qui a tendance à stopper la rotation. Donc

$$\vec{F}_x = -0.5\rho C_x' 2LR (\omega R - U \sin(\varphi))^2 \vec{Y}'.$$

La direction de cette force ( $\pm \vec{Y}'$ ) est dépendante de l'angle  $\varphi$  (et de la vitesse de rotation). Il existe alors un angle,  $a^*$  tel que  $\varphi = a^*$  et  $\varphi = \pi - a^*$  soient solution de l'équation  $\omega R - U \sin(\varphi) = 0$ . Comme l'étude de la pale sortante se fait uniquement sur l'intervalle  $[0, \pi]$  alors le moment de la force de trainée peut être décomposé en : un moment de "freinage" sur l'intervalle  $[0, a^*]$ , de poussée sur  $]a^*, \pi - a^*]$  et de nouveau un moment de "freinage" sur  $] \pi - a^*, \pi]$ .

Il y a donc 3 forces de trainée qui créent 3 moments, deux de ces moments sont des moments de freinage, et le dernier est un moment qui a tendance à mettre en rotation le système.

$$\begin{aligned}\overline{Mx1} &= \int_0^{a^*} R^2 \rho Cx' L (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi \vec{Z} \\ \overline{Mx2} &= \int_{a^*}^{\pi-a^*} -R^2 \rho Cx L (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi \vec{Z} \\ \overline{Mx3} &= \int_{\pi-a^*}^{\pi} R^2 \rho Cx' L (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi \vec{Z}\end{aligned}$$

Seulement, ce résultat est incomplet. En effet, il faut prendre en compte le masquage de la pale sortante par la pale entrante. De ce fait, la surface S perçue par la pale sortante en est diminuée. Ce phénomène n'apparaît que pour  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$  et s'accroît plus l'angle se rapproche de  $\pi$ . La surface est alors dépendante de  $\varphi$  et peut être exprimée comme  $S(\varphi) = S \sin(\varphi)$ . Il faut alors redécomposer les moments précédents pour prendre en compte ce phénomène de masquage. Les moments en liens avec la trainée (responsable de la rotation) sont alors :

$$\begin{aligned}\overline{Mx1} &= \int_0^{a^*} R^2 \rho Cx' L (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi \vec{Z} \\ \overline{Mx2} &= \int_{a^*}^{\pi/2} -R^2 \rho Cx L (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi \vec{Z} \\ \overline{Mx3} &= \int_{\pi/2}^{\pi-a^*} -R^2 \rho Cx L \sin(\varphi) (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi \vec{Z} \\ \overline{Mx4} &= \int_{\pi-a^*}^{\pi} R^2 \rho Cx' L \sin(\varphi) (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi \vec{Z}\end{aligned}$$

Il en est de même pour l'effort de portance, qui doit également être décomposé en deux composantes à cause du masquage par la deuxième pale, soit :

$$\overline{Mz} = \left[ - \int_0^{\pi/2} Cz (U \cos(\varphi))^2 d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} Cz \sin(\varphi) (U \cos(\varphi))^2 d\varphi \right] \vec{Z}$$

D'où le moment moyen pour la pale sortante sur un tour :

$$\begin{aligned}\overline{Msort} &= \frac{1}{2\pi} \left[ 2 \left[ \int_0^{a^*} R^2 \rho Cx' L (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi - \int_{a^*}^{\pi/2} R^2 \rho Cx L (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi - \right. \right. \\ &\quad \left. \int_{\pi/2}^{\pi-a^*} R^2 \rho Cx L \sin(\varphi) (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi + \int_{\pi-a^*}^{\pi} R^2 \rho Cx' L \sin(\varphi) (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} R^2 \rho Cz L (U \cos(\varphi))^2 d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} Cz \sin(\varphi) (U \cos(\varphi))^2 d\varphi \right] \vec{Z}\end{aligned}$$

### Pale entrante :

Le même raisonnement peut alors être effectué pour cette pale :

$$\overrightarrow{Fx'} = 0.5\rho Sx Cx' Vt'^2 \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{Fz'} = -0.5\rho Sz Cz Vr'^2 \overrightarrow{Y'}$$

Où  $\rho$ ,  $Sx$ ,  $Sz$  et  $Cz$  restent inchangé par rapport à la pale entrante, et  $Cx' = 0,4$ .

Avec :

$$\overrightarrow{Vt'} = (U\sin(\varphi) + \omega R) \overrightarrow{Y'}$$

$$\overrightarrow{Vr'} = U|\cos(\varphi)| \overrightarrow{X'}$$

Alors :

$$\overrightarrow{Mx'} = \overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{Fx'} = (R \overrightarrow{X'}) \wedge 0.5\rho Cx' 2LR (U\sin(\varphi) + \omega R)^2 \overrightarrow{Y'} = R^2 \rho Cx' L (U\sin(\varphi) + \omega R)^2 \overrightarrow{Z}$$

$$\overrightarrow{Mz'} = \overrightarrow{OP'} \wedge \overrightarrow{Fz'} = (R \overrightarrow{X'}) \wedge (-0.5\rho Cz 2LR (U\cos(\varphi))^2) \overrightarrow{Y'} = -R^2 \rho Cz L (U\cos(\varphi))^2 \overrightarrow{Z}$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{Me} = R^2 \rho L (Cx' (U\sin(\varphi) + \omega R)^2 - Cz (U\cos(\varphi))^2) \overrightarrow{Z}$$

D'où, le moment moyen de la pale entrante sur un tour :

$$\overrightarrow{Mentr} = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^\pi R^2 \rho L (Cx' (U\sin(\varphi) + \omega R)^2 - Cz (U\cos(\varphi))^2) d\varphi \overrightarrow{Z}$$

On peut alors en déduire le moment total moyen sur un tour :

$$\overrightarrow{Mmoy} = \overrightarrow{Mentr} + \overrightarrow{Msort}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Mmoy} &= \frac{1}{2\pi} 2 * [\int_0^{a*} R^2 \rho Cx' L (\omega R - U\sin(\varphi))^2 d\varphi - \int_{a*}^{\pi/2} R^2 \rho Cx L (U\sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi - \\ &\int_{\pi/2}^{\pi-a*} R^2 \rho Cx L \sin(\varphi) (U\sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi + \int_{\pi-a*}^\pi R^2 \rho Cx' L \sin(\varphi) (\omega R - U\sin(\varphi))^2 d\varphi \\ &- \int_0^\pi R^2 \rho Cz L (U\cos(\varphi))^2 d\varphi - \int_{\pi/2}^\pi R^2 \rho L Cz \sin(\varphi) (U\cos(\varphi))^2 d\varphi + \int_0^\pi R^2 \rho L (Cx' (U\sin(\varphi) + \\ &\omega R)^2 - Cz (U\cos(\varphi))^2) d\varphi] \overrightarrow{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M moy} = & \frac{1}{2\pi} 2R^2 L \rho * [ \\
& \int_0^{a*} Cx' (\omega^2 R^2 - 2\omega R U \sin(\varphi) + U^2 \sin^2(\varphi)) d\varphi \\
& - \int_{a*}^{\pi/2} Cx (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi \\
& - \int_{\pi/2}^{\pi-a*} Cx \sin(\varphi) (U \sin(\varphi) - \omega R)^2 d\varphi \\
& + \int_{\pi-a*}^{\pi} Cx' \sin(\varphi) (\omega R - U \sin(\varphi))^2 d\varphi \\
& - \int_0^{\pi/2} Cz (U \cos(\varphi))^2 d\varphi \\
& - \int_{\pi/2}^{\pi} Cz \sin(\varphi) (U \cos(\varphi))^2 d\varphi \\
& + \int_0^{\pi} (Cx' (\omega^2 R^2 + 2\omega R U \sin(\varphi) + U^2 \sin^2(\varphi)) - Cz U^2 \cos^2(\varphi)) d\varphi ] \vec{Z}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{a*} (\omega^2 R^2 - 2\omega R U \sin(\varphi) + U^2 \sin^2(\varphi)) d\varphi \\
& = \omega^2 R^2 a * + 2\omega R U (\cos(a *) - 1) + 0.5 U^2 (a * - 0.5 \sin(2a *))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{a*}^{\pi/2} (\omega^2 R^2 - 2\omega R U \sin(\varphi) + U^2 \sin^2(\varphi)) d\varphi \\
& = \omega^2 R^2 (0.5\pi - a *) - 2\omega R U \cos(a *) + 0.5 U^2 (0.5\pi - a * + 0.5 \sin(2a *))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\pi/2}^{\pi-a*} (\sin(\varphi) \omega^2 R^2 - 2\omega R U \sin^2(\varphi) + U^2 \sin^3(\varphi)) d\varphi \\
& = \omega^2 R^2 \cos(a *) - \omega R U (0.5\pi - a * + 0.5 \sin(2a *)) + 0.25 U^2 (3 \cos(a *) \\
& \quad - \frac{1}{3} \cos(3a *))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\pi-a*}^{\pi} (\sin(\varphi) \omega^2 R^2 - 2\omega R U \sin^2(\varphi) + U^2 \sin^3(\varphi)) d\varphi \\
& = \omega^2 R^2 (1 - \cos(a *)) - \omega R U (a * - 0.5 \sin(2a *)) + 0.25 U^2 \left( \frac{8}{3} + \frac{\cos(3a *)}{3} \right. \\
& \quad \left. - 3 \cos(a *) \right)
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} U^2 \cos^2(\varphi) d\varphi = 0.25\pi U^2$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} U^2 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{U^2}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} [Cx'(\omega^2 R^2 + 2\omega R U \sin(\varphi) + U^2 \sin^2(\varphi)) - Cz U^2 \cos^2(\varphi)] d\varphi \\ = Cx'(\pi\omega^2 R^2 + 4\omega R U + 0.5\pi U^2) - 0.5U^2 Cz\pi \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overline{Mmoy} = \overline{Mmoy} = \frac{1}{2\pi} 2R^2 L\rho [Cx'(\omega^2 R^2 a * + 2\omega R U (\cos(a *) - 1) + 0.5U^2 (a * - 0.5 \sin(2a *))) - \\ Cx(\omega^2 R^2 (0.5\pi - a *) - 2\omega R U \cos(a *) + 0.5U^2 (0.5\pi - a * + 0.5 \sin(2a *))) - \\ Cx(\omega^2 R^2 \cos(a *) - \omega R U ((0.5\pi - a * + 0.5 \sin(2a *)) + 0.25U^2 (3 \cos(a *) - \frac{1}{3} \cos(3a *))) + \\ Cx'(\omega^2 R^2 (1 - \cos(a *)) - \omega R U (a * - 0.5 \sin(2a *)) + 0.25U^2 (\frac{8}{3} + \frac{\cos(3a *)}{3} - 3 \cos(a *))) - \\ Cz(0.25\pi U^2) - Cz(\frac{U^2}{3}) + Cx'(\pi\omega^2 R^2 + 4\omega R U + 0.5\pi U^2) - Cz 0.5U^2 \pi] \end{aligned}$$

$$\overline{Mmoy} = \overline{Mmoy} = \frac{1}{2\pi} 2R^2 L\rho [$$

$$\begin{aligned} Cx' \left[ \omega^2 R^2 a * + 2\omega R U (\cos(a *) - 1) + 0.5U^2 (a * - 0.5 \sin(2a *)) + \omega^2 R^2 (1 - \cos(a *)) \right. \\ \left. - \omega R U (a * - 0.5 \sin(2a *)) + 0.25U^2 \left( \frac{8}{3} + \frac{\cos(3a *)}{3} - 3 \cos(a *) \right) + \pi\omega^2 R^2 \right. \\ \left. + 4\omega R U + 0.5\pi U^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - Cx[\omega^2 R^2 (0.5\pi - a *) - 2\omega R U \cos(a *) + 0.5U^2 (0.5\pi - a * + 0.5 \sin(2a *)) + \omega^2 R^2 \cos(a *) \\ - \omega R U (0.5\pi - a * + 0.5 \sin(2a *)) + 0.25U^2 (3 \cos(a *) - \frac{1}{3} \cos(3a *))] \end{aligned}$$

$$- Cz \left( 0.25\pi U^2 + \frac{U^2}{3} + 0.5U^2 \pi \right)]$$



$$\overline{Mmoy} = \overline{Mmoy} = \frac{1}{2\pi} 2R^2 L \rho.$$

$$\begin{aligned} & [Cx'(\omega^2 R^2(a * + 1 - \cos(a *)) + \pi) + \omega RU(2 \cos(a *) + 2 - a * + 0.5 \sin(2a *)) + \\ & \quad U^2(0.5\pi + 0.5a * - 0.25 \sin(2a *) + \frac{2}{3} + \frac{\cos(3a*)}{12} - \frac{3}{4} \cos(a *))] \\ & - Cx[\omega^2 R^2(0.5\pi - a * + \cos(a *)) + \omega RU(-2 \cos(a *) - 0.5\pi + a * - 0.5 \sin(2a *)) + \\ & \quad U^2(-0.5a * + 0.25\pi + 0.25 \sin(2a *) + \frac{3}{4} \cos(a *) - \frac{1}{12} \cos(3a *))] \\ & - CzU^2\left(\frac{1}{3} + 0.75\pi\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$\overline{Mmoy} = \overline{Mmoy} = \frac{1}{2\pi} 2R^2 L \rho [$$

$$(Cx' - Cx) \left[ 0.5\omega^2 R^2 \pi + 0.5U^2 \left( \frac{\cos(3a*)}{6} - 1.5 \cos(a*) + 0.5\pi \right) \right] +$$

$$(Cx' + Cx) [\omega^2 R^2(a * - \cos(a *)) + \omega RU(2 \cos(a *) - a * + 0.5 \sin(2a *)) + 0.5U^2(a * - 0.5 \sin(2a *))] -$$

$$CzU^2 \left( 0.75\pi + \frac{1}{3} \right) +$$

$$Cx' \left[ \omega^2 R^2(0.5\pi + 1) + 2\omega RU + 0.5U^2 \left( 0.5\pi + \frac{5}{6} \right) \right] +$$

$$Cx[0.5\pi \omega RU]$$