

COURS PHY1221

THÉORIE DES GROUPES

PHILIPPE RUELLE

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

ANNÉE ACADÉMIQUE 2007–2008

Contents

1. Définitions et exemples	1
2. Notions et propriétés fondamentales	6
Produits direct et semi-direct	6
Classes de conjugaison	7
Sous-groupes	7
Groupes simples et résolubles	8
Les groupes de permutations	8
3. Représentations: généralités	14
4. Représentations des groupes finis	22
Lemme de Schur	23
Relations d'orthogonalité	24
Conséquences	28
Le groupe S_4	30
Action d'un groupe sur un ensemble: points fixes et orbites	32
Indicateur de Frobenius-Schur	33
5. Produits tensoriels	37
Généralités	37
Application aux représentations d'un groupe	40
Représentations complexes, réelles et pseudo-réelles	43
6. Exploiter les symétries	46
7. Représentations des groupes de permutations	54
8. Groupes et algèbres de Lie	63
Le groupe abélien $SO(2)$	63
Exponentielle et générateurs infinitésimaux	64
Algèbres de Lie	66
Paramétrisations	69

Exemple 1: le groupe $SU(2)$	71
Exemple 2: le groupe $SO(3)$	74
La relation entre $SU(2)$ et $SO(3)$	76
Exemple 3: le groupe $SU(N)$	76
9. Représentations de $SU(2)$ et $SO(3)$	79
Les représentations de l'algèbre $su(2)$	79
Représentations de $SU(2)$ et caractères	82
Produits tensoriels	84
Les représentations de $SO(3)$	87
Harmoniques sphériques	88
10. Représentations des groupes linéaires: méthodes tensorielles	91
Représentations irréductibles de $GL(N)$	92
Formule pour les dimensions	97
Représentations irréductibles de $SO(N)$	98
Le tenseur de Riemann	100

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

Le nombre de livres, manuels, cours et références relatives à la théorie des groupes est tout simplement immense. La liste qui suit donne une série de références utiles et bien faites, et qui ont toutes plus ou moins influencé ce cours, bien que les deux premières l'aient inspiré davantage que les autres.

1. Howard Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Perseus, dans la série "Frontiers in Physics", seconde édition, 1999.
2. Jean-Bernard Zuber, *Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations*, cours donné au Magistère Interuniversitaire de Physique (France), en 1991 (notes revues en 2005). Disponible à l'adresse <http://www-spht.cea.fr/pisp/zuber/cours.shtml>.
3. Robert Gilmore, *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, Cambridge University Press (sortie prévue en février 2008). Partiellement disponible (un chapitre sur deux !) sur la page personnelle de l'auteur.
4. Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations — An Elementary Introduction*, Graduate Text in Mathematics 222, Springer (2003). Une version abrégée de cet ouvrage est disponible à l'adresse <http://fr.arxiv.org/pdf/math-ph/0005032>.
5. Robert N. Cahn, *Semi-simple Lie Algebras and Their Representations*, Benjamin, 1984. Egalement disponible à <http://www-physics.lbl.gov/~rncahn/cahn.html>.
6. Mark A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (1988).
7. James S. Milne, *Group theory*. Disponible à l'adresse <http://www.jmilne.org/math/>.
8. Brian G. Wybourne, *Symmetric functions and the symmetric group notes*. Disponible à l'adresse <http://www.phys.uni.torun.pl/~bgw/>.
9. Bertrand Delamotte, *Un soupçon de théorie des groupes: groupe des rotations et groupe de Poincaré*. Disponible à l'adresse <http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/>.
10. A.J. Coleman, *The Symmetric Group Made Easy*, Adv. in Quantum Chemistry, vol. 4 (1968) 83.
Un excellent résumé de tout ce qu'il y a à savoir sur les groupes de permutations ...

DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Fondamentalement, un groupe est un ensemble d'éléments qui se composent. La définition formelle inclut des conditions d'inversibilité et d'associativité:

un groupe G est un ensemble d'éléments muni d'une loi de composition (ou de multiplication) telle que

- (i) la loi de composition est interne: $gg' \in G$,
- (ii) il existe un élément neutre e tel que $ge = eg = g$,
- (iii) chaque élément g possède un inverse g^{-1} tel que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$,
- (iv) la loi de composition est associative: $g_1g_2g_3 = (g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.

La loi de composition et les éléments définissent univoquement un groupe. Ces deux informations peuvent être présentées dans une table de multiplication, qui précise la façon dont les éléments se composent:

	e	g_1	g_2	g_3	\dots
e	e	g_1	g_2	g_3	\dots
g_1	g_1	g_1g_1	g_1g_2	\dots	\dots
g_2	g_2	\dots	\dots	\dots	\dots
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

La table de multiplication est symétrique si la loi de composition est commutative: $g_i g_j = g_j g_i$. Dans ce cas, le groupe est dit commutatif ou **abélien**.

La table de multiplication est dans doute la manière la plus abstraite de présenter un groupe, car elle ne fait appel à aucune réalisation/représentation concrète. Elle permet, en principe du moins, de procéder à la classification des groupes comportant un nombre fixé, fini, d'éléments (deux groupes sont isomorphes si leurs tables de multiplication s'obtiennent l'une de l'autre par permutations des éléments). Par contre, spécifier un groupe en donnant explicitement sa table de multiplication n'est certainement pas la manière la plus pratique ni la plus économique (imaginons un groupe comportant 2357 éléments !). On utilisera plutôt des réalisations concrètes de groupes (basées sur des actions géométriques, des substitutions, des matrices d'un type particulier), ou alors, pour les groupes discrets, on présentera un groupe par générateurs et relations. Cette dernière reste assez abstraite mais présente, dans certaines circonstances, des avantages indiscutables.

Venons-en de suite à des exemples.

Il existe grossièrement trois catégories de groupes: les groupes finis (nombre fini d'éléments), les groupes discrets infinis (nombre infini dénombrable d'éléments) et les groupes continus (nombre infini non-dénombrable d'éléments; ils dépendent donc de paramètres continus).

Commençons par les **groupes finis**, qui sont en quelque sorte les plus simples, et auxquels sera consacrée la première partie de ce cours. Le nombre d'éléments d'un groupe fini s'appelle l'ordre du groupe.

1. Les plus simples de tous les groupes: les groupes cycliques $\mathbb{Z}_n = \{g^k : 1 \leq k \leq n, g^n = e\}$, d'ordre n . Tous les éléments s'écrivent comme puissances de l'un d'entre eux, que l'on appelle générateur du groupe (pas n'importe lequel !). Tous les groupes cycliques sont abéliens.

Par exemple, les 4 racines 4^{èmes} de l'unité $\{+1, -1, +i, -i\}$ forment, pour la multiplication, un groupe \mathbb{Z}_4 . Puisque $+i = (+i)^1$, $-1 = (+i)^2$, $-i = (+i)^3$, $1 = (+i)^4$, l'élément $+i$ est générateur ($-i$ en est un également).

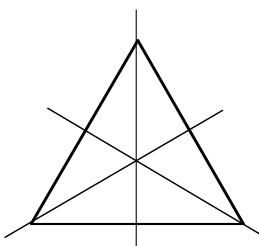
Plus généralement, les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité $\{\zeta_k \equiv \exp(2i\pi \frac{k}{n}) : 1 \leq k \leq n\}$ forment un groupe \mathbb{Z}_n (pour la multiplication). Clairement la loi de composition s'écrit

$$\zeta_k \zeta_{k'} = e^{2i\pi k/n} e^{2i\pi k'/n} = e^{2i\pi (k+k')/n} = \zeta_{k+k' \text{ mod } n}. \quad (1.1)$$

La loi multiplicative sur les ζ_k devient donc additive sur les indices k , l'addition se faisant modulo n (on néglige, pour calculer le résultat de l'addition, les multiples de n : on les "met à zéro"). \mathbb{Z}_n peut donc également être présenté comme le groupe additif des entiers modulo n .

2. Les plus utiles et les plus magiques des groupes finis: les groupes de permutations S_n sur n objets (on les appelle aussi les groupes symétriques). Les permutations déplacent n objets pour les amener dans un ordre arbitraire, de sorte que l'ordre de S_n vaut $n!$. Pour $n \geq 3$, ils sont non-abéliens (bien sûr, $S_2 = \mathbb{Z}_2$). Dans S_3 par exemple, permuter les objets 1 et 2 et permuter les objets 2 et 3 sont deux opérations qui ne commutent pas. Nous reviendrons plus loin sur leur utilité et leur magie ...

3. Le groupe de symétrie d'un triangle équilatéral.

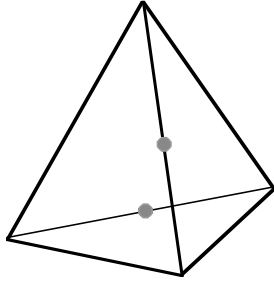


Il possède six éléments: deux rotations (120° et 240°), trois réflexions (axes coupant le triangle) et l'élément neutre. Il est donc d'ordre 6, est non-abélien, et en fait isomorphe à S_3 (le montrer).

4. Le groupe de symétrie d'un polygone régulier à n côtés, généralisation du cas triangulaire. Procédant comme pour le triangle, on trouve n rotations (d'angles $k \frac{2\pi}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$ ou $0 \leq k \leq n - 1$) et n réflexions (pour n pair, les axes passent par deux sommets ou par les milieux de deux côtés).

Le groupe correspondant, appelé groupe diédral et noté D_n , comporte $2n$ éléments. Il est non-abélien.

5. Le groupe de symétrie d'un tétraèdre régulier.



Il possède 4 axes de rotations d'ordre 3 (passant par un sommet et traversant la face opposée) et 3 axes de rotations d'ordre 2 (passant par les milieux de deux côtés opposés, boules grisées), ce qui donne $8 + 3 = 11$ rotations non-triviales. Avec l'élément neutre, les symétries de rotation forment un groupe d'ordre 12. S'ajoutent à cela des réflexions par rapport à des plans passant par deux sommets et coupant le tétraèdre en deux parties égales. Prenant une de ces réflexions, on produit 12 nouvelles transformations en la composant avec les 12 rotations déjà trouvées. Il n'est pas difficile de voir que les 24 transformations effectuent toutes les permutations des 4 sommets. Le groupe de symétrie est donc S_4 , d'ordre 24.

Les exemples de **groupes discrets infinis** sont nombreux également.

6. Des groupes de nature arithmétique, comme $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}^*, \cdot) ou l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{Q}^*(i) = \{p + iq : p, q \in \mathbb{Q}, (p, q) \neq (0, 0)\}$ pour la multiplication.
7. Le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients dans \mathbb{Z} et de déterminant 1, ou plus généralement $SL(n, \mathbb{Z})$ (pourquoi imposer la condition de déterminant 1 ?).

Pour les groupes discrets, finis ou infinis, la présentation abstraite la plus compacte et donc la plus économique se fait par générateurs et relations. Son désavantage est qu'il est parfois difficile d'identifier le groupe en question ... (et même de dire si le groupe est fini ou infini !). De plus, de nombreuses présentations sont possibles, de sorte qu'il peut être difficile de voir que deux présentations différentes définissent en fait le même groupe. La présentation d'un groupe par générateurs et relations présente néanmoins de l'intérêt dans certaines circonstances, et amène généralement des informations complémentaires sur le groupe en question.

La forme générique d'une telle présentation est

$$G = \langle \text{générateurs} \mid \text{relations} \rangle. \tag{1.2}$$

Les générateurs sont dénotés par des lettres, par exemple a, b, c, \dots , et les relations spécifient les ... relations entre les générateurs. Le groupe G est par définition l'ensemble de tous les mots inéquivalents, écrits dans l'alphabet des générateurs (et les inverses), étant entendu que deux mots sont inéquivalents s'ils ne peuvent s'obtenir l'un de l'autre en utilisant exclusivement les relations.

Voyons quelques exemples de groupes, déjà décrits plus haut, mais maintenant présentés par générateurs et relations.

1'. Un seul générateur : $G = \langle g \mid g^n = e \rangle$.

Les mots s'écrivent avec une seule lettre: les seuls mots sont donc toutes les puissances de g . La relation $g^n = e$ permet de ramener tous ces mots à l'ensemble fini $\{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}$, c'est-à-dire le groupe cyclique \mathbb{Z}_n .

2'. $G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = e ; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 1 \rangle$.

Ce n'est pas manifeste, et pourtant ce groupe n'est autre que le groupe des permutations S_n sur n objets ! On peut s'en convaincre en réalisant σ_i comme la permutation qui échange l'objet i avec l'objet $i + 1$, et laisse tous les autres objets en place.

4'. $G = \langle R, T \mid R^n = T^2 = e ; TR = R^{-1}T \rangle$.

Les générateurs R et T étant d'ordre fini, on peut se restreindre à des mots constitués de puissances positives de R et T . Par la troisième relation, on peut faire passer toutes les lettres T à gauche des lettres R , de sorte que les seuls mots distincts peuvent s'écrire R, R^2, \dots, R^n et TR, TR^2, \dots, TR^n , ou encore: $T^k R^\ell$ avec $k = 0, 1$ et $\ell = 1, \dots, n$.

Le groupe G est donc d'ordre $2n$. On peut vérifier que $G = D_n$, le groupe diédral.

7'. Nettement moins facile: $G = \langle T, S \mid S^4 = e ; STS = T^{-1}ST^{-1} \rangle$.

Ce groupe en réalité est isomorphe à $SL(2, \mathbb{Z})$, ce qui ne saute pas franchement aux yeux (ce n'est pas non plus trivial à prouver) !

Les groupes que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications physiques restent cependant les **groupes continus**, appelés aussi groupes de Lie. Le nombre de paramètres réels continus indépendants dont dépend un groupe de Lie est appelé la dimension du groupe. Tous les besoins pratiques du physicien sont couverts par les groupes de matrices.

8. Le groupe des rotations $SO(3)$ de l'espace à trois dimensions.

Une telle rotation est complètement fixée par un axe et un angle. L'axe pouvant être repéré par un point sur une sphère, le groupe $SO(3)$ est de dimension 3.

Une façon équivalente, mais qui se prête mieux à la généralisation à n dimensions, de voir une rotation est de la définir comme agissant dans un plan (celui qui est perpendiculaire à l'axe de rotation). L'action dans un plan est celle d'une rotation $SO(2)$ à deux dimensions.

9. Le groupe de rotation $SO(n)$ de l'espace euclidien à n dimensions. Les rotations agissent dans des plans bidimensionnels à la façon d'une rotation de $SO(2)$. On peut choisir des plans bidimensionnels "élémentaires" comme étant ceux sous-tendus par les vecteurs de base \hat{e}_i, \hat{e}_j (avec $i < j$ pour des raisons évidentes de symétrie). Le nombre de tels plans élémentaires vaut $\frac{n(n-1)}{2}$, qui est donc la dimension du groupe $SO(n)$. Ces groupes sont non-abéliens pour $n \geq 3$.

10. Le groupe de Lorentz $SO(1, 3)$, de dimension 6 et non-abélien (cfr le cours PHY1223 de Relativité Restreinte). C'est le groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski M_4 , qui préserve la métrique pseudo-euclidienne $\eta_{\mu\nu}$. On peut le voir comme un groupe de rotations pseudo-euclidiennes (comparer avec la dimension de $SO(4)$).
11. Le groupe linéaire général $GL(n; \mathbb{R})$ d'un espace vectoriel réel de dimension n , et le groupe linéaire spécial $SL(n; \mathbb{R})$ des transformations linéaires de déterminant égal à 1 (préservant les volumes). Ils sont respectivement de dimension n^2 et $n^2 - 1$, et non-abéliens pour $n \geq 2$.
12. Le groupe des matrices orthogonales réelles $n \times n$, noté $O(n; \mathbb{R})$. De telles matrices M satisfont $M^t M = M M^t = \mathbb{I}$, et forment un groupe de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$: une matrice générale dépend de n^2 paramètres, et une matrice orthogonale est soumise à $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions découlant de $M^t M = \mathbb{I}$.
On notera qu'une matrice orthogonale possède un déterminant égal à ± 1 . L'ensemble (le sous-groupe !) de celles de déterminant $+1$ est noté $SO(n; \mathbb{R})$, qui peut être identifié avec le groupe des rotations discuté plus haut.
13. Le groupe des matrices unitaires complexes $n \times n$, noté $U(n; \mathbb{C})$. Elles satisfont $M^\dagger M = M M^\dagger = \mathbb{I}$. La dimension de ce groupe vaut n^2 . Une telle matrice possède un déterminant de module 1, $|\det M| = +1$. Celles de déterminant égal à $+1$ forment le groupe $SU(n; \mathbb{C})$, de dimension $n^2 - 1$.

EXERCICES

- 1.1 Vérifier que les 24 transformations de symétrie du tétraèdre épuisent toutes les permutations des 4 sommets.
- 1.2 Montrer que dans la réalisation en termes de permutations dans l'exemple 2', les relations sur les σ_i sont toutes vérifiées.
- 1.3 Enumérer tous les groupes finis d'ordre 4, à isomorphismes près.
- 1.4 Montrer que les matrices unitaires sont celles qui préservent le produit scalaire hermitien dans \mathbb{C}^n , donné par $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i$, et vérifier les dimensions de $U(n, \mathbb{C})$ et de $SU(n, \mathbb{C})$ données plus haut.

NOTIONS ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Nous passons en revue dans ce chapitre quelques notions et propriétés fondamentales parmi les plus courantes. Certaines d'entre elles sont capitales pour la suite.

2.1 PRODUIT DIRECT ET SEMI-DIRECT

Si G_1 et G_2 sont deux groupes, leur **produit direct** $G_1 \times G_2$ est le groupe constitué des paires $(g_1 g_2)$ d'éléments de G_1 et de G_2 . La loi de composition est induite par celles des composantes: $(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$. Cela revient simplement à juxtaposer les deux groupes; aucun des deux n'agissant sur l'autre, les deux lois de composition opèrent indépendamment. Un exemple de produit direct est donné par le groupe des translations dans le plan bidimensionnel, isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Un exemple proche du groupe des translations est celui du groupe euclidien en deux dimensions E_2 , qui, outre les translations, contient également les rotations. Il agit sur un vecteur du plan par

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta + a, x \sin \theta + y \cos \theta + b), \quad (2.1)$$

avec a et b les paramètres de la translation en x et en y . En forme vectorielle, l'action peut s'écrire $\vec{x} \rightarrow R\vec{x} + \vec{T}$ avec R la rotation (matrice 2×2) et $\vec{T} = (a, b)$ la translation. On vérifie immédiatement que la composition de deux telles transformations donne

$$(R, \vec{T})(R', \vec{T}') = (RR', \vec{T} + R\vec{T}'). \quad (2.2)$$

Elle montre que les rotations agissent sur les translations (mais pas l'inverse), de sorte que les deux lois de composition (des R et des \vec{T}) ne sont pas indépendantes.

Cette structure particulière (interférence d'une loi de composition sur l'autre) s'appelle un **produit semi-direct**, et est notée par le symbole \rtimes . La définition générale est la suivante. Soient deux groupes G_1, G_2 , avec G_1 qui "agit" dans G_2 . Ceci signifie que chaque $g_1 \in G_1$ définit une application $\tau(g_1)$ qui envoie G_2 sur lui-même en préservant sa structure de groupe, et qui satisfait $\tau(g_1)\tau(g'_1) = \tau(g_1 g'_1)$ (càd $\tau(g_1)$ est un homomorphisme de G_1 dans le groupe d'automorphismes de G_2). Alors le produit semi-direct de $G_1 \rtimes_\tau G_2$ relativement à cette action τ de G_1 sur G_2 est défini par la loi de composition

$$(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2[\tau(g_1)g'_2]). \quad (2.3)$$

Si τ est l'identité (l'automorphisme trivial), le produit semi-direct se réduit au produit direct.

Dans l'exemple ci-dessus, on a donc $E_2 = SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2$, avec $\tau(R)\vec{T} = R\vec{T}$. Les groupes de Galilée et de Poincaré sont également des produits semi-directs, tout comme les groupes diédraux qui peuvent s'écrire $D_n = \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_n$ (le vérifier).

2.2 CLASSES DE CONJUGAISON

Deux éléments g_1 et g_2 d'un groupe sont **conjugués** si il existe un élément g tel que $g_1 = gg_2g^{-1}$. La relation "être conjugué à" est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive), qui permet de partitionner le groupe en classes d'équivalence, appelées aussi classes de conjugaison. Une classe de conjugaison donnée contient tous les éléments du groupe qui sont conjugués entre eux.

Notons que l'élément neutre n'est conjugué qu'à lui-même et forme une classe de conjugaison à lui tout seul. De même, dans un groupe abélien, chaque élément forme également une classe à lui tout seul. Un groupe abélien possède donc autant de classes de conjugaisons qu'il n'a d'éléments. En ce qui concerne le groupe non-abélien le plus petit, à savoir S_3 , on vérifie qu'il possède trois classes de conjugaison: $\{e\}$, {les permutations qui échangent 2 des 3 objets}, {les permutations qui permutent cycliquement les 3 objets}. Le cardinal de ces classes vaut respectivement 1, 3 et 2.

2.3 SOUS-GROUPES

Un **sous-groupe** H d'un groupe G est un sous-ensemble de G qui possède lui-même une structure de groupe. Le groupe G tout entier et le singleton $\{e\}$ sont manifestement des sous-groupes, mais qualifiés de triviaux. Les autres sous-groupes non-triviaux sont appelés sous-groupes propres.

La plupart des groupes possèdent des sous-groupes propres. Ainsi, S_3 possède un unique sous-groupe \mathbb{Z}_3 et trois sous-groupes \mathbb{Z}_2 (conjugués entre eux); S_{n-1} est un sous-groupe de S_n ; $SO(n-1; \mathbb{R})$ est sous-groupe de $SO(n; \mathbb{R})$, et $SO(n; \mathbb{R})$ de $SU(n; \mathbb{C})$, ...

L'existence d'un sous-groupe propre permet de partitionner le groupe en classes d'équivalence, distinctes des classes de conjugaison, et appelées les **classes latérales**.

La première classe est H , le sous-groupe lui-même. Ensuite on prend un élément g_1 qui ne se trouve pas dans H , et on forme la seconde classe, Hg_1 . On vérifie facilement que $H \cap Hg_1 = \emptyset$, et que $|Hg_1| = |H|$ (= l'ordre de H). S'il reste des éléments du groupe non inclus dans H ou Hg_1 , on en choisit un, disons g_2 , et on forme Hg_2 . A nouveau, on a $H \cap Hg_2 = Hg_1 \cap Hg_2 = \emptyset$ et $|Hg_2| = |H|$.

En continuant de la sorte jusqu'à ce que l'on épuise tous les éléments de G , on forme des classes H, Hg_1, Hg_2, \dots , deux à deux disjointes, et toutes de même cardinal $|H|$. Appelées classes latérales à droite, elles définissent une partition de G en sous-ensembles de même taille. On peut définir de même les classes latérales à gauche $g'_i H$. Les classes à gauche sont en général distinctes des classes à droite (et donc les éléments g'_i servant à les définir sont différents des éléments g_i servant à définir les classes à droite). Les classes ainsi obtenues ne dépendent pas des éléments g_i, g'_i choisis, mais uniquement de H .

Un corollaire immédiat de cette construction de classes gauches et droites est que l'ordre d'un sous-groupe est un diviseur de l'ordre de groupe (théorème de Lagrange).

Un sous-groupe H d'un groupe G est **invariant** (ou normal, ou distingué) si, comme ensemble, il est invariant sous la conjugaison par un élément quelconque de G , c-à-d. que $gHg^{-1} = H$, pour tout g de G . Bien sûr, dans un groupe abélien, tous les sous-groupes sont invariants.

La condition d'invariance de H peut se réécrire $gH = Hg$, et montre que pour un sous-groupe invariant, les classes à gauche et à droite coïncident. Ceci implique également que les classes elles-mêmes se composent entre elles pour former un groupe, appelé le **groupe quotient**, et noté G/H . Il est d'ordre $|G|/|H|$. La loi de composition est immédiate:

$$(g_1H)(g_2H) = g_1(Hg_2)H = g_1g_2HH = (g_1g_2)H. \quad (2.4)$$

Que les éléments de groupe quotient sont les classes latérales peut s'interpréter de la façon suivante: deux éléments g, g' dans G qui appartiennent à une même classe sont identifiés dans le groupe quotient. Qu'ils soient dans une même classe signifie qu'ils diffèrent par la multiplication pour un élément de H , $g = g'h$ et $g = h'g'$. Par conséquent, le quotient G/H correspond à considérer les éléments de G modulo la composition par les éléments de H (à gauche ou à droite), de sorte que l'on peut écrire symboliquement

$$G/H = G \text{ modulo } H. \quad (2.5)$$

2.4 GROUPES SIMPLES ET RÉSOLUBLES

Un groupe est **simple** s'il ne possède pas de sous-groupe invariant propre (autres que $\{e\}$ et G lui-même). Les groupes simples sont importants dans le sens où ils constituent les "blocs élémentaires" qui servent à construire n'importe quel groupe fini. Les groupes simples non-abéliens sont très rares: il n'en existe que six d'ordre inférieur à 2000 ! Le plus petit est d'ordre 60.

Un groupe G est **résoluble** s'il possède une chaîne de sous-groupes G_i

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n = G \quad (2.6)$$

tels que G_i est un sous-groupe invariant de G_{i+1} et que les quotients G_{i+1}/G_i sont tous abéliens pour $0 \leq i \leq n-1$. Les groupes résolubles jouent un rôle important dans le problème de la résolubilité par radicaux d'une équation polynomiale (Galois).

En comparant ces deux définitions, on pourra se convaincre que la notion de simplicité est en quelque sorte à l'opposé de celle de résolubilité, bien que certains groupes soient à la fois simples et résolubles (lesquels ?).

2.5. LES GROUPES DE PERMUTATIONS

Le groupe S_n est le groupe des permutations de n objets, et est d'ordre $n!$. L'action d'une permutation sur n objets peut s'écrire

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

que l'on interprétera comme ceci: l'objet 1 est remplacé par l'objet i_1 , l'objet 2 par l'objet i_2 , etc. Par facilité, on n'écrit pas la première ligne, mais simplement $\sigma = (i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n)$.

Les permutations se composent de façon naturelle: il suffit de suivre la séquence des substitutions. Par exemple, dans S_4 , on a $(3, 2, 1, 4)(2, 4, 1, 3) = (2, 4, 3, 1)$ et $(2, 4, 1, 3)(3, 2, 1, 4) = (1, 4, 2, 3)$, qui confirme que S_4 est non-abélien.

Pour trouver l'inverse σ^{-1} , il suffit, dans la notation à deux lignes ci-dessus, d'inverser les deux lignes et de ranger les colonnes pour que la (nouvelle) première ligne soit $1\ 2\ 3\ \dots\ n$. Ainsi, toujours dans S_4 , on a $(2, 4, 1, 3)^{-1} = (3, 1, 4, 2)$, alors que $(3, 2, 1, 4)^{-1} = (3, 2, 1, 4)$ est son propre inverse puisqu'elle échange simplement les objets 1 et 3.

Une permutation cyclique de S_n permute cycliquement les n objets (ou les décale de k places: pour tout k entre 0 et $n - 1$, l'objet i est remplacé par l'objet $i + k$, où $i + k$ est pris modulo n , entre 1 et n). Dans S_4 , les permutations cycliques sont $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 1, 2)$ et $(4, 1, 2, 3)$. Les n permutations cycliques de S_n forment un sous-groupe cyclique \mathbb{Z}_n .

Une permutation arbitraire ne peut faire que deux choses: elle laisse certains objets invariants, et permute tous les autres par groupes disjoints, et de manière cyclique. Par exemple, la permutation $\sigma = (4, 5, 8, 7, 2, 6, 1, 9, 3, 10)$ de S_{10} effectue les remplacements par groupes suivants: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 3$, $6 \rightarrow 6$ et $10 \rightarrow 10$. Elle permute donc cycliquement les cinq groupes d'objets $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 8, 9\}$, $\{6\}$ et $\{10\}$. On dira qu'elle possède 2 cycles de longueur 3, 1 cycle de longueur 2 et 2 cycles de longueur 1, ou encore deux 3-cycles, un 2-cycle et deux 1-cycles. On écrira sa décomposition explicite en cycles par $\sigma = (6)(10)(2\ 5)(1\ 4\ 7)(3\ 8\ 9)$ (notez l'absence des virgules !). L'ordre dans lequel on écrit les cycles n'a aucune importance. De façon générale, une permutation de S_n possède k_j j -cycles, avec les k_j des entiers positifs ou nuls, et j entre 1 et n . On a bien entendu $\sum_{j=1}^n jk_j = n$. Un 2-cycle est aussi appelé une transposition.

Une structure en cycles (c'est-à-dire les nombres k_j) spécifie univoquement une classe de conjugaison dans S_n : deux permutations qui possèdent les mêmes nombres de 1-cycles, 2-cycles, ..., n -cycles, sont conjuguées, et inversement. Pour le voir, il suffit d'observer que l'effet d'une conjugaison $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$ par σ est simplement de renommer les objets suivant la permutation σ . Dès lors $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$ possède la même structure en cycles que σ' , la seule différence étant les numéros des objets apparaissant dans les différents cycles. Dit autrement, $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$ agit de la même façon que σ' mais sur des objets qui ont été préalablement rebaptisés par σ .

Prenons par exemple pour σ' la permutation σ_1 qui échange les objets 1 et 2, et qui laisse les autres en place. Une permutation arbitraire est de la forme $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_2 & i_1 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ et son inverse $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$. La composition $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$ donne alors

$$\begin{array}{rcccccc} \sigma^{-1} & i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma_1 & 2 & 1 & 3 & \dots & n \\ \sigma & i_2 & i_1 & i_3 & \dots & i_n \end{array}$$

et montre que $\sigma\sigma_1\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ i_2 & i_1 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ échange les objets i_1 et i_2 , alors que σ_1 échange les objets 1 et 2.

On obtient le même résultat si on conjugue par σ n'importe quelle permutation élémentaire σ_k , qui échange les objets k et $k + 1$ et laisse les autres à leur place. Donc la conjugaison par σ des

permutations élémentaires (il y en a $n - 1$) ne fait que renommer les objets. Comme n'importe quelle permutation σ' est la composition de transpositions (ce sont des générateurs de groupe, voir au chapitre 1 la partie sur les générateurs et relations), c'est vrai pour tout σ' .

Une classe de conjugaison de S_n est donc univoquement spécifiée par un ensemble d'entiers k_1, k_2, \dots, k_n tels que $\sum_{j=1}^n j k_j = n$; ces entiers définissent une partition de n :

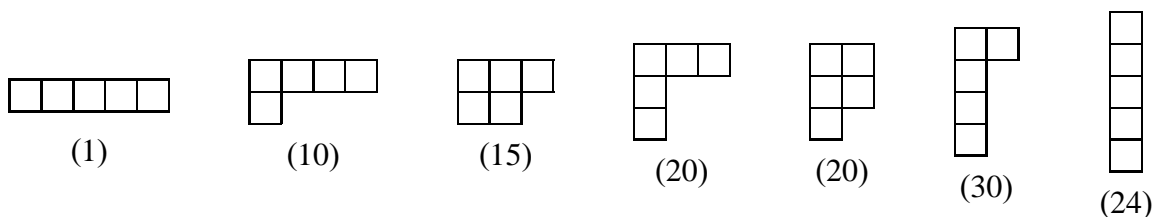
$$n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k_1} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{k_2} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{k_3} + \dots + \underbrace{n + \dots + n}_{k_n}. \quad (2.8)$$

Le nombre de classes de conjugaison du groupe S_n vaut par conséquent le nombre de partitions de n , c-à-d. le nombre de façons d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs. Les groupes S_2, S_3, S_4 et S_5 possèdent ainsi respectivement 2, 3, 5 et 7 classes de conjugaison. Celles de S_5 correspondent aux 7 partitions

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad (2.9)$$

la première (5) contenant, entre autres, les permutations cycliques différentes de l'élément neutre, la dernière (1+1+1+1+1) l'élément neutre. Contrairement aux apparences, le nombre de partitions de n croît très vite, exponentiellement¹ avec \sqrt{n} , ce qui représente malgré tout une croissance beaucoup plus lente que $n!$. Les classes de conjugaison de S_n sont par conséquent peu nombreuses (relativement), et donc assez "grosses". A titre indicatif, le groupe S_{20} contient de l'ordre de $2 \cdot 10^{19}$ éléments, mais seulement 627 classes de conjugaison!

Il est utile, comme on le verra plus loin, de représenter graphiquement les partitions. Pour ce faire, on représente un j -cycle par une colonne de j boîtes, et on range ensuite les colonnes de gauche à droite par (taille) décroissante. Ainsi les 7 classes de S_5 , ou partitions de 5, sont représentées par les diagrammes suivants, appelés diagrammes de Young.



En énumérant le nombre de façons de placer les n objets dans une structure en cycles donnée de sorte que les permutations correspondantes soient distinctes (attention aux surcomptages !), il n'est pas difficile de calculer le nombre de permutations appartenant à une classe spécifiée par des entiers k_j . On montre qu'il est donné par la formule suivante,

$$\# \text{ permutations dans la classe } (k_j) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} \cdot k_j!}. \quad (2.10)$$

¹Le comportement asymptotique du nombre de partitions de n est donné par $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}})$.

dont la preuve est laissée en exercice. Pour S_5 , elle fournit les nombres inscrits en-dessous de diagrammes de Young ci-dessus.

Nous avons déjà mentionné plus haut le fait que n'importe quelle permutation de S_n peut s'écrire comme la composition des transpositions $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, puisque celles-ci sont des générateurs du groupe. On peut le voir explicitement en observant qu'une permutation cyclique quelconque peut s'écrire $(1\ 2\ 3 \cdots m) = (1\ m)(1\ m-1) \cdots (1\ 3)(1\ 2)$. Si on peut écrire σ comme le produit de N transpositions, on définit la parité de σ par

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^N. \quad (2.11)$$

On notera que l'écriture de σ comme produit de transposition n'est pas unique, mais que la parité reste bien définie. Effectivement si σ s'écrit de deux manières différentes comme produit de transpositions, les deux "mots" en question s'obtiennent l'un de l'autre en utilisant les relations entre les générateurs. Comme les relations identifient des mots de même parité, celle-ci est préservée. C'est là un exemple d'utilisation avantageuse de la présentation d'un groupe par générateurs et relations.

La composition des permutations (et leurs décompositions en transpositions) montre immédiatement la relation importante

$$\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma'). \quad (2.12)$$

Ce sera notre premier exemple de représentation ! Cette relation montre en tous cas que les permutations se composent suivant une loi binaire: paire \times paire = impaire \times impaire = paire, impaire \times paire = paire \times impaire = impaire.

Ces relations binaires montrent de suite que les permutations paires forment un sous-groupe, appelé le **groupe alterné** et noté A_n . Son ordre est égal à $|A_n| = \frac{n!}{2}$. Il est facile de montrer que A_n est un sous-groupe invariant de S_n (pourquoi ?) qui n'est par conséquent jamais simple (sauf pour $n = 2$). On vérifie également que $A_3 = \mathbb{Z}_3$ est simple, et que A_4 n'est pas simple. Par contre tous les groupes A_n sont simples pour $n \geq 5$, mais c'est plus difficile à prouver ...

EXERCICES

- 2.1 Montrer que le groupe $U(n)$ est un produit direct, $U(n) = SU(n) \times U(1)/\mathbb{Z}_n$.
- 2.2 Montrer explicitement que le groupe diédral $D_n = \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_n$ est un produit semi-direct, ou \mathbb{Z}_2 et \mathbb{Z}_n sont respectivement générés par une réflexion T et une rotation R d'angle $2\pi/n$.
- 2.3 Calculer les classes à gauche et à droite de S_3 pour un sous-groupe \mathbb{Z}_2 , et vérifier qu'elles sont distinctes.

- 2.4 Utiliser le théorème de Lagrange pour montrer qu'un groupe d'ordre premier est nécessairement cyclique.
- 2.5 Le modulo arithmétique répond bien à la définition de groupe quotient: le groupe \mathbb{Z}_n des entiers de \mathbb{Z} modulo n est le quotient $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$. Expliciter cette identité.
- 2.6 Calculer les classes de $O(1, 3)$ par rapport au sous-groupe de Lorentz orthochrone propre $SO_0(1, 3) = \{\Lambda \in SO(1, 3) : \Lambda_{00} \geq 1\}$.
- 2.7 Le centralisateur $C(g)$ de g est l'ensemble des éléments du groupe qui commutent avec g , $C(g) = \{g' \in G : gg' = g'g\}$. Montrer que le cardinal de la classe de conjugaison de g est égal à $|G|/|C(g)|$, ce qui implique qu'il divise l'ordre du groupe.
- 2.8 Montrer que le sous-groupe \mathbb{Z}_n de S_n constitué des permutations cycliques n'est pas un sous-groupe invariant pour $n \geq 4$. Ce même groupe \mathbb{Z}_n est-il un sous-groupe de A_n ?
- 2.9 Si une permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit en termes de k_j j -cycles, montrer que sa parité est donnée par $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n+\sum k_j}$.
- 2.10 A partir de la caractérisation des classes de conjugaison de S_n , étudier celles du sous-groupe alterné A_n . On pourra procéder comme suit.
- Observer d'abord qu'une classe de S_n est soit entièrement contenue dans A_n ou alors est entièrement hors de A_n . Soit donc une classe α de S_n , contenue dans A_n , et ayant une structure en cycles spécifiée par des entiers k_j .
 - Prenons un élément g quelconque de cette classe (c'est une permutation paire), et décomposons α en deux parties, non nécessairement disjointes, $\alpha = \alpha_+ \cup \alpha_-$, où α_+ , α_- contiennent tous les conjugués de g par des permutations paires resp. impaires. Montrer que les cardinaux de α_+ et α_- sont égaux.
 - Par construction, les ensembles α_+ et α_- sont deux classes de A_n , et la question qui reste est de savoir si ces deux ensembles sont identiques ou non. Montrer qu'ils sont identiques si et seulement si il existe une permutation *impaire* σ telle que $\sigma g = g\sigma$.
 - Un tel σ est dans le centralisateur de g . Celui-ci est constitué des permutations cycliques agissant indépendamment dans les différents cycles composant g (il y en a $\prod_j j^{k_j}$), et des permutations des cycles de même longueur (il y en a $\prod_j k_j!$). En déduire que le centralisateur de g ne contient que des permutations paires si et seulement si les k_j sont tous impairs et distincts.
 - En conclure: une classe paire de S_n , spécifiée par des entiers k_j impairs et différents, se scinde en deux classes de A_n de même cardinal; toute autre classe paire de S_n est une classe de A_n .

Ainsi A_4 possède quatre classes, de cardinal 1, 3, 4 et 4, alors que A_5 en possède cinq, de cardinal 1, 15, 20, 12 et 12.

2.11 Montrer que le déterminant d'une matrice $n \times n$ peut s'écrire de la manière suivante, comme une somme sur les permutations de S_n :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) A_{1,i_1} A_{2,i_2} \cdots A_{n,i_n}. \quad (2.13)$$

2.12 Montrer que S_3 et S_4 sont des groupes résolubles (ces propriétés de S_3 et S_4 impliquent que les équations polynomiales de degré 3 et 4 *générales* sont solubles par radicaux !).

REPRÉSENTATIONS: GÉNÉRALITÉS

Si la discussion est restée jusqu'ici relativement abstraite, l'utilisation concrète d'un groupe mène immédiatement à la notion de représentation. Un groupe est presque toujours associé à la présence d'une symétrie, d'une invariance. Mais une symétrie n'implique pas que "tous les éléments du problème" sont invariants, c'est-à-dire laissés fixes par le groupe. Si un triangle équilatéral est bien laissé invariant sous un groupe de symétrie S_3 , il n'empêche que les sommets (et les faces) sont permutés par le groupe, et ne sont donc pas du tout laissés fixes: ils sont transformés, d'une façon bien précise, sous l'action du groupe.

De même pour un problème physique en général: si un problème, ou un modèle, ou une théorie physique dans son ensemble, possède une invariance sous un groupe, la question se pose de savoir comment le groupe agit sur les variables et grandeurs physiques susceptibles d'être utilisées. Tout comme les sommets du triangle se transforment sous le groupe de symétrie de triangle, les quantités physiques se transforment également, chacune à sa manière. Ainsi en relativité restreinte par exemple, dont le groupe de symétrie est le groupe de Lorentz, les lois de transformation des masses, des impulsions, des champs électriques et magnétiques ou du temps sont différentes. Dans chacun des cas, la réponse à la question "comment se transforment ces quantités ?" est donnée en spécifiant une représentation du groupe. De façon concrète, on constate que les quantités physiques doivent être regroupées en multiplets —l'énergie et la tri-impulsion sont mises ensemble dans un quadruplet, le champ électrique et le champ magnétique sont regroupés en un sextuplet, etc—, sur lesquels le groupe agit par des matrices. C'est là l'idée fondamentale d'une représentation. Nous verrons plus loin que cette idée coïncide très précisément avec celle de **tenseur**.

Une **représentation** (linéaire) d'un groupe G est un ensemble de matrices $D(g)$, une matrice pour chaque élément du groupe, qui se composent exactement comme les éléments du groupe, c'est-à-dire qu'elles satisfont:

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2), \quad (\text{homomorphisme}) \quad (3.1)$$

$$D(e) = \mathbb{I}, \quad D(g^{-1}) = D(g)^{-1}. \quad (3.2)$$

La dimension des matrices $D(g)$ est la dimension de la représentation; c'est donc aussi la dimension de l'espace vectoriel sur lequel agissent les matrices $D(g)$. Cet espace sera appelé l'espace de (la) représentation. Dans la suite, nous considérerons des matrices de représentation **complexes** (ce qui n'exclut pas que certaines d'entre elles puissent être réelles, dans certaines bases). L'étude des représentations d'un groupe par des matrices définies sur un corps différent de \mathbb{C} , par exemple sur \mathbb{R} (représentations réelles), est également possible mais est plus compliquée.

Si $\{e_i\}$ forme une base orthonormée de l'espace de représentation, le représentant $D(g)$ de g

agit à droite sur les vecteurs de base en termes de ses coefficients matriciels,

$$D(g) e_i = \sum_k e_k D_{ki}(g), \quad D_{ji}(g) = \langle e_j | D(g) | e_i \rangle. \quad (3.3)$$

L'action à droite assure effectivement que la loi de groupe est satisfaite:

$$\begin{aligned} D(g_1)D(g_2) e_i &= \sum_k D(g_1) e_k D_{ki}(g_2) = \sum_j \sum_k e_j D_{jk}(g_1) D_{ki}(g_2) \\ &= \sum_j e_j (D(g_1)D(g_2))_{ji} = \sum_j e_j D_{ji}(g_1g_2) = D(g_1g_2) e_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On vérifie facilement que si $D(g)$ est une représentation, alors $\overline{D}(g) = D^t(g^{-1})$ est également une représentation, appelée la représentation contragrédiente de $D(g)$. Si les vecteurs de base de l'espace se transforment selon la représentation $D(g)$, alors les composantes v^i d'un vecteur $v = v^i e_i$ dans cette même base se transforment selon la représentation contragrédiente $\overline{D}(g)$,

$$\overline{D}(g)v^i = \sum_j D_{ij}(g^{-1}) v^j. \quad (3.5)$$

En effet, le vecteur abstrait reste invariant, de sorte que la transformation des vecteurs de base doit compenser celle des composantes,

$$v = \sum_i v^i e_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{i,j,k} D_{ij}(g^{-1})v^j e_k D_{ki}(g) = \sum_{j,k} \delta_{k,j} v^j e_k = \sum_j v^j e_j. \quad (3.6)$$

Dans le même ordre d'idées, si $D(g)$ est une représentation, alors $D^*(g)$ est également une représentation, appelée la représentation complexe conjuguée de $D(g)$.

Concrètement, les multiplets dont on parlé plus haut sont des éléments d'espaces vectoriels de représentation (des vecteurs donc !), et les matrices de représentation $D(g)$ spécifient la manière dont le groupe agit sur eux.

Dans l'exemple du triangle, les trois sommets sont permutés sous l'action du groupe, et se transforment donc dans une représentation D_3 de dimension 3 (les six matrices de la représentation $D_3(g)$ sont des matrices de permutation). Si par contre on pense à l'action géométrique du groupe du triangle sur le plan, on trouve une représentation $D_2(g)$ de dimension 2.

En relativité restreinte, les quatre composantes p^μ de la quadri-impulsion forment un vecteur, un élément d'un espace vectoriel de dimension 4, sur lequel agit une représentation de dimension 4 du groupe de Lorentz, dont les matrices sont généralement dénotées $\Lambda_v^\mu(g)$. Par abus de langage, on dira que la quadri-impulsion p^μ se transforme, sous le groupe de Lorentz, dans une représentation de dimension 4.

Bien qu'étant de nature physique différente, les coordonnées d'espace-temps x^μ et les potentiels électromagnétiques A^μ appartiennent au même espace et se transforment dans la même

représentation que p^μ . Par contre, les composantes des champs électrique et magnétique E^i, B^i , six au total, doivent être regroupés; elles se transforment dans une représentation de dimension 6 du groupe de Lorentz².

Remarquons dès maintenant l'importance des assertions qui viennent d'être faites: dire qu'un ensemble de quantités physiques donné se transforment dans une représentation spécifique d'un groupe a une portée physique considérable ! En relativité restreinte, on l'a vu, les coordonnées spatio-temporelles x^μ se transforment les unes dans les autres sous le groupe de Lorentz; en mécanique classique non-relativiste, le temps reste invariant (absolu) sous le groupe de Galilée (par contre, la transformation des coordonnées spatiales sous Galilée fait intervenir le temps; la situation est analogue pour les champs électrique et magnétique, qui se transforment sous un boost de Galilée selon $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$, $\vec{B}' = \vec{B}$). Alors qu'en relativité restreinte, temps et espace sont placés sur le même pied, ce n'est pas le cas en mécanique newtonienne. Les conséquences physiques sont radicalement différentes...

Il est utile, même si ceci n'est pas manifeste à ce stade, de connaître *toutes les représentations* d'un groupe donné. Elles spécifient toutes les actions linéaires qu'un groupe peut possiblement avoir sur un ensemble d'objets. Une fois le catalogue établi, à nous de sélectionner celles qui sont utiles dans un cadre physique donné, et d'y associer un contenu physique. Notre ambition est donc de résoudre le problème suivant:

étant donné un groupe G , qui peut être arbitraire, obtenir et décrire toutes les représentations de G .

C'est l'une des questions principales de ce cours ! La question peut sembler terriblement ambitieuse (elle l'est !), une réponse complète existe pourtant (du moins pour une très large classe de groupes dont tous les groupes finis).

En y réfléchissant un peu (ou beaucoup !), on peut assez facilement construire des représentations pour n'importe quel groupe. D'abord, il y a celle que l'on qualifiera, pour des raisons évidentes, de triviale: c'est la représentation de dimension 1 qui associe à tout élément g le nombre 1, $D(g) = 1$ (ou plus généralement la matrice identité de dimension n , $D(g) = \mathbb{I}_n$).

En ce qui concerne les groupes finis, une représentation importante est la représentation dite régulière, dont la construction, valable pour n'importe quel groupe, est la suivante. Dénotons par n l'ordre du groupe, et considérons un espace vectoriel de dimension n (ce sera l'espace de représentation). Plutôt que d'indicer les vecteurs de base par un entier i prenant les valeurs de 1 à n , indiquons-les par les éléments du groupe, e_g ou encore $|g\rangle$ (on suppose cette base orthonormée). Ensuite définissons les matrices $D^{\text{reg}}(g)$ de la représentation régulière par leur action sur les vecteurs de base:

$$D^{\text{reg}}(g)|g_1\rangle = |gg_1\rangle, \quad \text{pour tous } g, g_1. \quad (3.7)$$

Il est facile de vérifier que ces matrices forment une représentation. Clairement aussi, elles effectuent une permutation des éléments de base, puisqu'elles envoient un vecteur de base sur un

²On verra plus tard comment on peut également les considérer comme composantes d'un objet $F^{\mu\nu}$ à deux indices.

autre vecteur de base, de façon inversible. Les coefficients des matrices sont donc des 0 et des 1. Explicitement les éléments de matrice sont donnés par

$$D_{g_1 g_2}^{\text{reg}}(g) \equiv \langle g_1 | D^{\text{reg}}(g) | g_2 \rangle = \delta_{g_1, g g_2}. \quad (3.8)$$

Une autre représentation, distincte de la représentation régulière mais de même dimension qu'elle (l'ordre du groupe), est celle basée sur la conjugaison dans le groupe plutôt que sur sa table de multiplication (comme l'est la représentation régulière). Son action est définie par

$$D^{\text{cong}}(g) | g_1 \rangle = | g g_1 g^{-1} \rangle, \quad \text{pour tous } g, g_1, \quad (3.9)$$

dans le même espace vectoriel que la représentation régulière. Comme elle, les matrices $D^{\text{cong}}(g)$ sont des matrices de permutation.

Pour les groupes de permutation S_n , on peut facilement construire une représentation de dimension n (et donc beaucoup plus petite que D^{reg} et D^{conj}). Celle-ci, appelée représentation de définition (*defining representation*), est basée sur la transcription des permutations sur des vecteurs de base, $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle$, supposés orthonormés. La représentation permute simplement les vecteurs de base comme σ permute les objets:

$$D^{\text{def}}(\sigma) | i \rangle = | \sigma(i) \rangle. \quad (3.10)$$

Dans cette base, les matrices $D^{\text{def}}(\sigma)$ sont à nouveau des matrices de permutation.

En ce qui concerne les groupe de Lie, tous les exemples du chapitre 1 ont été définis (présentés) en termes d'une représentation ! Par exemple le groupe $SO(n)$, pour chaque valeur de n , possède une représentation de dimension n : à chaque élément du groupe, on associe une unique matrice $D(g)$, n par n et orthogonale de déterminant 1 ! Idem pour les groupes $GL(n)$, $SL(n)$ ou $SU(n)$... pour lesquels on dispose d'une représentation de dimension n , pour la raison que tous ces groupes ont été définis en termes de cette représentation. Pour ces groupes-là, on a en quelque sorte inversé la logique. Puisque la composition des matrices de représentation est la même que celle du groupe, celle du groupe est la même que celle des matrices, et on a trouvé plus commode de définir la loi de groupe en termes de celle d'une représentation particulière. Il est clair que pour pouvoir faire cette inversion, il faut que la représentation qu'on veut utiliser soit suffisamment "riche" pour permettre de séparer tous les éléments du groupe. Techniquement les représentations que l'on peut utiliser à cet effet doivent être injectives; on les appelle aussi des représentations fidèles.

Finalement, lorsque l'on connaît deux représentations non-triviales D_1 et D_2 , on peut en construire une nouvelle en considérant leur produit tensoriel $D_1 \otimes D_2$, d'espace $V = V_1 \otimes V_2$. Son action est simplement induite par l'action de D_1 et D_2 :

$$(D_1 \otimes D_2)(g) v_1 \otimes v_2 = (D_1(g)v_1) \otimes (D_2(g)v_2). \quad (3.11)$$

Ce procédé, dans lequel on peut avoir $D_1 = D_2$, produit généralement de nouvelles représentations.

On voit que dans la plupart des cas, on connaît une ou même plusieurs représentations, et probablement que dans des groupes spécifiques, on arriverait, par des constructions adéquates, à

en trouver davantage. Mais les trouver toutes est clairement un problème d'un tout autre ordre, qui requiert des techniques générales.

Pour se faciliter la tâche, on se débarrasse de deux sources de redondances présentes dans la liste complète de toutes les représentations d'un groupe:

1. Si $D_1(g)$ est une représentation et S une matrice inversible, alors $D_2(g) \equiv SD_1(g)S^{-1}$ est aussi une représentation ! Strictement D_1 et D_2 sont des représentations distinctes, puisque les matrices $D_1(g)$ et $D_2(g)$ seront en général différentes. Cependant elles ne sont pas intrinsèquement différentes puisque D_2 est simplement D_1 écrite dans une autre base. Pour des raisons évidentes, on dira que deux représentations reliées par une transformation de similarité sont équivalentes, $D_1 \sim D_2$. (Attention: la matrice S ne peut pas dépendre de g : ce sont toutes les matrices $D_1(g)$ qui, soumises à la même similarité, redonnent les matrices $D_2(g)$).
2. Si $D_1(g)$ et $D_2(g)$ sont deux représentations, d'espaces de représentation V_1 et V_2 respectivement (de dimensions éventuellement différentes), leur somme directe $(D_1 \oplus D_2)(g)$, d'espace $V_1 \oplus V_2$, est également une représentation, dont les matrices s'écrivent

$$(D_1 \oplus D_2)(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Il est inutile de s'encombrer de représentations équivalentes, une seule par classe d'équivalence suffit, et de même, des représentations qui se ramènent, par somme directe, à des représentations plus petites, et donc plus fondamentales.

Mais comment décider qu'une représentation donnée est équivalente à une somme directe, et inversement, comment être sûr qu'une représentation ne peut pas se réduire à des représentations plus fondamentales qu'elle ? La notion-clé est celle de sous-espace invariant.

Une représentation $D(g)$, d'espace V , est **réductible** si elle laisse un sous-espace V_1 invariant, $D(g)V_1 \subset V_1$, c'est-à-dire que tout élément de V_1 est envoyé sur un élément de V_1 . Si elle ne possède pas de sous-espace invariant, elle est **irréductible**. Dans une base correspondant à la décomposition orthogonale $V = V_1 \oplus V_2$ (V_2 est le complémentaire orthogonal de V_1 dans V), une représentation réductible prend la forme

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & B(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \text{puisque } D(g) \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \subset V_1, \quad (3.13)$$

où $D_1(g)$ et $D_2(g)$ sont deux représentations (d'espaces V_1 et V_2) (par contre $B(g)$ satisfait une loi de composition plus compliquée, faisant intervenir D_1 et D_2).

Si le sous-espace complémentaire V_2 est également laissé invariant par la représentation, celle-ci est appelée **complètement réductible** (ou décomposable) et prend une forme diagonale par blocs ($B(g) = 0$), de sorte que $D = D_1 \oplus D_2$ est une somme directe.

On voit donc que les représentations que l'on a qualifiées d'élémentaires ou fondamentales sont essentiellement les représentations irréductibles. Essentiellement, car les représentations

réductibles non complètement réductibles (indécomposables) ne sont pas irréductibles, mais sont dans un certain sens élémentaires puisqu'elles ne réduisent pas entièrement à des représentations plus petites (à cause du bloc non-diagonal $B(g)$).

Pour ce qui nous occupera dans ce cours, nous pourrions ignorer la classe des représentations réductibles indécomposables ! Effectivement nous considérerons exclusivement des représentations unitaires, dont les matrices $D(g)$ sont unitaires: $D^\dagger(g) = D^{-1}(g)$, pour tout g . Ce n'est d'ailleurs pas une restriction pour les groupes finis, puisqu'on montrera que n'importe quelle représentation (de dimension finie) d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire. La particularité des représentations unitaires est d'être soit irréductible soit complètement réductible. En effet, si $D(g)$ unitaire est réductible, avec un sous-espace invariant V_1 , le sous-espace complémentaire orthogonal V_2 est nécessairement invariant aussi. En effet,

$$\langle v_1 | D(g) v_2 \rangle = \langle D^\dagger(g) v_1 | v_2 \rangle = \langle D(g^{-1}) v_1 | v_2 \rangle = \langle v_1' | v_2 \rangle = 0, \quad \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \quad (3.14)$$

montre que $D(g)V_2$ est orthogonal à V_1 , et donc contenu dans V_2 . On peut ainsi conclure qu'une représentation unitaire réductible est complètement réductible, et est donc équivalente à une somme directe, $D \sim D_1 \oplus D_2$. Comme D est unitaire, D_1 et D_2 le sont également, et à ce titre, sont irréductibles ou elles-mêmes équivalentes à une somme directe. En poursuivant les réductions aussi loin que possible, on en conclut qu'une représentation unitaire est irréductible ou équivalente à une somme directe de représentations irréductibles. Pour les représentations unitaires, les représentations "fondamentales" sont bien les irréductibles.

Revenant à notre problème de classification des représentations d'un groupe, on peut sans perte de généralité le formuler ainsi:

Etant donné un groupe G , trouver toutes les représentations unitaires irréductibles inéquivalentes de G .

C'est à cette question, formulée, rappelons-le, pour des représentations complexes (les matrices sont à coefficients complexes), que nous répondrons dans la suite du cours. D'abord pour les groupes finis, ensuite pour les groupes de Lie (du moins certains groupes de Lie, les plus simples).

Avant d'entamer ce programme, terminons les généralités par une notion importante, celle de caractère. Si $D(g)$ est une représentation, on définit son **caractère** par les traces des matrices,

$$\chi_D(g) = \text{Tr } D(g) = \sum_i \langle i | D(g) | i \rangle. \quad (3.15)$$

Ce sont, en général, des nombres complexes.

La fonction caractère satisfait deux propriétés intéressantes (et importantes). D'une part, les caractères de deux représentations équivalentes sont égaux:

$$\chi_{D'}(g) = \text{Tr } D'(g) = \text{Tr } S D(g) S^{-1} = \text{Tr } D(g) = \chi_D(g). \quad (3.16)$$

D'autre part, comme fonctions sur les éléments du groupe, les caractères sont constants sur les classes de conjugaison. Si $g_2 = gg_1g^{-1}$, on a

$$\chi_D(g_2) = \text{Tr } D(gg_1g^{-1}) = \text{Tr } D(g)D(g_1)D^{-1}(g) = \text{Tr } D(g_1) = \chi_D(g_1). \quad (3.17)$$

On note également que le caractère d'une somme directe de représentations est la somme des caractères, et, anticipant quelque peu, que celui d'un produit tensoriel de représentations est le produit des caractères (voir le chapitre 5):

$$\chi_{D_1 \oplus D_2}(g) = \chi_{D_1}(g) + \chi_{D_2}(g), \quad \chi_{D_1 \otimes D_2}(g) = \chi_{D_1}(g) \cdot \chi_{D_2}(g). \quad (3.18)$$

Comme toute représentation unitaire réductible est équivalente à une somme directe de représentations irréductibles, son caractère est simplement une combinaison linéaire (à coefficients entiers positifs) de caractères irréductibles.

Les caractères irréductibles sont importants et utiles à plusieurs titres. D'abord ils sont plus faciles à manipuler que les représentations: ce sont des vecteurs de nombres, alors que les représentations sont des matrices. Ensuite, et même s'ils ne fournissent pas l'information complète sur les représentations (on ne peut pas reconstruire les matrices $D(g)$ sur base du caractère $\chi_D(g)$ uniquement), les caractères en retiennent suffisamment pour identifier univoquement les représentations. En effet, nous verrons que deux représentations (complètement réductibles) inéquivalentes ne peuvent avoir le même caractère. Finalement, et nous en verrons des exemples par la suite, ils sont utiles pour des calculs concrets (réduction de représentations).

Pour toutes ces raisons, il est utile de présenter les représentations irréductibles d'un groupe donné, non pas en termes des matrices, ce qui serait très fastidieux, mais en termes des caractères irréductibles. Il est traditionnel de les lister sous forme de tableau $\chi_D(g)$, avec les représentations irréductibles inéquivalentes D comme indice de ligne, et g comme indice de colonne (un g par classe de conjugaison suffit !). On appelle ce tableau la **table des caractères**. Nous en donnerons des exemples dans la suite.

EXERCICES

- 3.1 Montrer que ni la représentation régulière $D^{\text{reg}}(g)$, ni $D^{\text{cong}}(g)$, ni la représentation de définition $D^{\text{def}}(g)$ des groupes de permutations n'est irréductible.
- 3.2 Montrer que les trois représentations D , \overline{D} et D^* sont toutes réductibles ou toutes irréductibles. Si D est unitaire, montrer que \overline{D} et D^* sont identiques.
- 3.3 Calculer le caractère de la représentation régulière d'un groupe G quelconque.
- 3.4 Calculer le caractère de la représentation conjugaison, en utilisant la notion de centralisateur (voir exercice 2.7). Calculer ce caractère explicitement dans le cas du groupe S_3 .

3.5 Calculer le caractère de la représentation de définition de S_n .

3.6 Soit $D_3(\hat{n}, \theta)$ la représentation de dimension 3 du groupe des rotations en trois dimensions $SO(3)$, pour laquelle une rotation $g = (\hat{n}, \theta)$ est repérée par un axe de rotation \hat{n} (un point \hat{n} sur la sphère unité) et un angle θ autour de cet axe. Montrer que le caractère de cette représentation est donné par $\chi_{D_3}(g) = 1 + 2 \cos \theta$.

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

Nous avons terminé le chapitre précédent en nous convainquant qu'il nous fallait classifier toutes les représentations unitaires irréductibles inéquivalentes. Commençons par montrer que, comme nous l'avions annoncé, l'hypothèse d'unitarité n'est pas une restriction dans le cas des groupes finis.

Théorème 4.1 *Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.*

Formons la quantité

$$S = \sum_{g \in G} D^\dagger(g)D(g). \quad (4.1)$$

On vérifie qu'elle satisfait la propriété $D^\dagger(g)SD(g) = S$ pour tout g :

$$D^\dagger(g)SD(g) = \sum_{g'} D^\dagger(g'g)D(g'g) = \sum_{g'} D^\dagger(g')D(g') = S. \quad (4.2)$$

La matrice S est hermitienne et définie positive ($\langle v|S|v \rangle > 0$ pour n'importe quel vecteur v). Par conséquent, elle est diagonalisable, ses valeurs propres λ_i étant toutes strictement positives:

$$S = ADA^{-1} \quad \text{pour un certain } A, \text{ et avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots), \lambda_i > 0. \quad (4.3)$$

On peut donc prendre la racine carrée de S , également hermitienne, et définie par

$$X = S^{1/2} = AD^{1/2}A^{-1}, \quad D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots). \quad (4.4)$$

Il reste à vérifier que la conjugaison de $D(g)$ par X fournit une représentation unitaire $D'(g) = XD(g)X^{-1}$:

$$D'^\dagger(g)D'(g) = X^{-1}D^\dagger(g)XXD(g)X^{-1} = X^{-1}D^\dagger(g)SD(g)X^{-1} = X^{-1}SX^{-1} = \mathbb{I}, \quad (4.5)$$

ce qui conclut la preuve. ■

4.1 LEMME DE SCHUR

Ceci étant fait, nous pouvons revenir au problème principal: les représentations irréductibles inéquivalentes. Les résultats suivants, un peu techniques en apparence, s'avèrent extrêmement utiles. Ils sont vrais pour n'importe quelle représentation de dimension finie d'un groupe, qu'il soit fini ou non.

Théorème 4.2 (lemme de Schur) *Supposons que $D(g)$ et $D'(g)$ sont deux représentations irréductibles de dimension finie, d'espace de représentation V et V' respectivement, et telles que $AD(g) = D'(g)A$ pour une certaine matrice $A : V \rightarrow V'$. Alors $A = 0$ identiquement, ou A est inversible et D et D' sont équivalentes.*

Prenons un vecteur $v \in V$ dans le noyau de A (c'est-à-dire tel que $Av = 0$). Alors $AD(g)v = D'(g)Av = 0$ et donc $D(g)v$ est aussi dans le noyau de A , ce qui montre que celui-ci est un sous-espace invariant de $D(g)$. Puisque D est irréductible, le noyau doit être trivial, $\text{Ker } A = \{0\}$, ou égal à tout V , auquel cas $A = 0$ identiquement.

De même, pour un vecteur $v \in V$ arbitraire, $Av \in V'$ est dans l'image de A (par définition). Dans ce cas, l'identité $D'(g)Av = AD(g)v$ montre que l'image de A est un sous-espace invariant de D' . Comme D' est également irréductible, l'image doit être triviale, $\text{Im } A = \{0\}$, auquel cas $A = 0$ identiquement, ou alors $\text{Im } A = V'$ tout entier.

En remettant les deux parties ensemble, on conclut que soit $A = 0$ identiquement, soit $\text{Ker } A = \{0\}$ et $\text{Im } A = V'$, ce qui signifie que A est inversible. ■

Un corollaire important pour les applications (voir plus loin, Wigner-Eckart) correspond au cas où les représentations D et D' sont identiques.

Corollaire 4.1 *Une matrice A qui commute avec toutes les matrices d'une représentation irréductible, $AD(g) = D(g)A$ pour tout g , est un multiple de la matrice identité, $A = \lambda \mathbb{I}$.*

N'importe quelle matrice A possède au moins un vecteur propre. En effet le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ possède au moins une racine λ (éventuellement complexe). Associée à cette valeur propre λ , il existe un vecteur propre puisque l'équation homogène $(A - \lambda \mathbb{I})|v_\lambda\rangle = 0$ possède au moins une solution (car le déterminant de $A - \lambda \mathbb{I}$ est précisément nul !).

Si A commute avec toutes les matrices $D(g)$, il en est évidemment de même de $A - \lambda \mathbb{I}$. Par le lemme de Schur ci-dessus, il s'ensuit que $A - \lambda \mathbb{I}$ est nul ou inversible. Il n'est pas inversible car son noyau est non-nul (il contient en particulier tous les multiples du vecteur propre $|v_\lambda\rangle$). Il est donc nul, $A = \lambda \mathbb{I}$. ■

Après ces résultats préliminaires, nous pouvons revenir à la question: que peut-on dire des représentations irréductibles d'un groupe fini ?

4.2 RELATIONS D'ORTHOGONALITÉ

Dénotons par $D^{(i)}$ l'ensemble, potentiellement infini, de toutes les représentations irréductibles inéquivalentes, avec les matrices correspondantes $D_{ab}^{(i)}(g)$. On dénotera par n_i la dimension de la représentation $D^{(i)}$, et par $\chi_i(g)$ le caractère de la représentation $D^{(i)}$. L'ordre de G sera noté n , les classes de conjugaison de G seront indicées par un entier α , avec k_α le nombre d'éléments dans la α -ème classe.

Le résultat suivant est remarquable par sa portée et par la simplicité de sa preuve. Il nous amènera déjà à mi-chemin de la solution.

Théorème 4.3 (théorème de Peter-Weyl pour les groupes finis) *Les vecteurs $D_{ab}^{(i)}(g) = (D_{ab}^{(i)}(e), D_{ab}^{(i)}(g_1), \dots)$, de longueur n , forment une base orthogonale de l'espace des fonctions définies sur le groupe G .*

Une fonction définie sur le groupe est la donnée d'un nombre complexe $f(g)$ pour chaque élément du groupe. On peut ranger ces valeurs dans un vecteur $(f(e), f(g_1), \dots)$, de sorte que l'ensemble de toutes les fonctions sur G forme un espace vectoriel \mathbb{C}^n , de dimension n . On veut montrer que les vecteurs $(D_{ab}^{(i)}(g))_{g \in G}$, qui sont des fonctions particulières sur le groupe, forment une base de cet espace.

Commençons par montrer que ces vecteurs sont orthogonaux. Prenons pour cela deux représentations irréductibles $D^{(i)}$ et $D^{(j)}$, ainsi qu'une matrice M totalement quelconque, de dimension $n_i \times n_j$. Formons ensuite

$$A = \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} D^{(i)}(g') M D^{(j)\dagger}(g') \quad (4.6)$$

également de dimension $n_i \times n_j$. On vérifie qu'elle satisfait les hypothèses du lemme de Schur:

$$D^{(i)}(g)A = \frac{1}{n} \sum_{g'} D^{(i)}(gg') M D^{(j)\dagger}(g') = \frac{1}{n} \sum_{g'} D^{(i)}(g') M D^{(j)\dagger}(g^{-1}g') = A D^{(j)}(g). \quad (4.7)$$

Pour $i \neq j$, les représentations $D^{(i)}$ et $D^{(j)}$ sont inéquivalentes et donc $A = 0$, c'est-à-dire

$$A_{ac} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{b', d'} D_{ab'}^{(i)}(g) M_{b'd'} D_{cd'}^{(j)*}(g) = 0, \quad (4.8)$$

quelles que soient les valeurs des coefficients de M . Prenant successivement $M_{b'd'} = \delta_{b'b} \delta_{d'd}$ (une matrice avec une seule entrée non-nulle, en position (b, d)), on obtient l'orthogonalité des vecteurs correspondant à des valeurs $i \neq j$:

$$\sum_g D_{ab}^{(i)}(g) D_{cd}^{(j)*}(g) = 0, \quad \forall i \neq j, a, b, c, d. \quad (4.9)$$

Pour $i = j$, la matrice A commute avec les matrices $D^{(i)}(g)$, et est donc proportionnelle à l'identité, $A = \lambda \mathbb{I}$. Le calcul de la trace de A fournit la valeur du coefficient $\lambda = \frac{1}{n_i} \text{Tr} M$. On obtient alors

$$A_{ac} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{b', d'} D_{ab'}^{(i)}(g) M_{b'd'} D_{cd'}^{(i)*}(g) = \frac{1}{n_i} (\text{Tr} M) \delta_{a,c}. \quad (4.10)$$

Faisant le même choix que ci-dessus pour M , à savoir $M_{b'd} = \delta_{b'b} \delta_{d'd}$ avec $\text{Tr} M = \delta_{b,d}$, on obtient cette fois

$$\sum_g D_{ab}^{(i)}(g) D_{cd}^{(i)*}(g) = \frac{n}{n_i} \delta_{a,c} \delta_{b,d}, \quad (4.11)$$

ce qui complète les relations d'orthogonalité des vecteurs distincts, et fournit également la norme de tous les vecteurs. On peut réécrire ces deux ensembles de relations sous la forme

$$\sum_g D_{ab}^{(i)}(g) D_{cd}^{(j)*}(g) = \frac{n}{n_i} \delta_{i,j} \delta_{a,c} \delta_{b,d}. \quad (4.12)$$

Puisque ces vecteurs sont orthogonaux, ils sont indépendants. Il reste à montrer qu'ils forment une famille complète, qui génère l'espace des fonctions sur G . Il suffit pour cela de montrer que n'importe quelle fonction sur G peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $D_{ab}^{(i)}(g)$.

Une fonction arbitraire sur le groupe peut s'écrire

$$|f\rangle = (f(e), f(g_1), \dots) = f(e)(1, 0, \dots) + f(g_1)(0, 1, 0, \dots) + \dots = \sum_g f(g) |g\rangle, \quad (4.13)$$

où $|g\rangle$ est le vecteur $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec le 1 en position g . Les nombres $f(g)$ apparaissent alors comme les composantes du vecteur $|f\rangle$ dans la base $|g\rangle$: $f(g) = \langle g|f\rangle$.

Se souvenant de la représentation régulière, on peut encore écrire les composantes $f(g)$ comme

$$f(g) = \sum_{g'} f(g') \langle g'|g\rangle = \sum_{g'} f(g') \langle g'|D^{reg}(g)|e\rangle = \sum_{g'} f(g') D_{g'e}^{reg}(g). \quad (4.14)$$

Puisque la représentation régulière est complètement réductible, elle est équivalente à une somme directe de représentations irréductibles, $D^{reg}(g) = S[\bigoplus_i m_i D^{(i)}(g)]S^{-1}$, où les nombres m_i sont des multiplicités (des entiers positifs). Cette relation montre que les entrées de la matrice $D^{reg}(g)$ sont des combinaisons linéaires de celles des matrices $D^{(i)}(g)$ (pour le même g), les coefficients des combinaisons étant reliés aux entrées de S et S^{-1} , et aux multiplicités m_i ,

$$D_{g'e}^{reg}(g) = \sum_{i,a,b} c_{ab}^i(g') D_{ab}^{(i)}(g). \quad (4.15)$$

Replaçant cette décomposition dans l'équation précédente implique

$$f(g) = \sum_{i,a,b} \sum_{g'} f(g') c_{ab}^i(g') D_{ab}^{(i)}(g), \quad (4.16)$$

et montre que le vecteur $(f(g))_g$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $(D_{ab}^{(i)}(g))_g$. Par conséquent, ceux-ci forment une base. ■

Ce résultat a des conséquences spectaculaires immédiates. Puisque les vecteurs $(D_{ab}^{(i)}(g))_g$ forment une base de \mathbb{C}^n , leur nombre doit être égal à n . Or, pour chaque représentation irréductible $D^{(i)}$, il y a n_i^2 vecteurs de base (le nombre de valeurs de a, b). Par conséquent, on a de suite la relation

$$n = \sum_i n_i^2. \quad (4.17)$$

Elle montre non seulement que le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes est fini, mais également que les dimensions de celles-ci sont contraintes.

Plutôt que de considérer l'espace vectoriel des fonctions définies sur le groupe, on peut étudier le sous-espace de celles qui sont constantes sur les classes de conjugaison, c'est-à-dire qui satisfont $f(g) = f(hgh^{-1})$. On pense immédiatement aux caractères de représentations comme exemples de telles fonctions, ce qui suggère de reconsidérer le théorème précédent en remplaçant l'espace des fonctions sur le groupe par celui des fonctions qui sont constantes sur les classes.

Théorème 4.4 *Les caractères des représentations irréductibles forment une base orthogonale pour les fonctions constantes sur les classes de conjugaison.*

Montrons d'abord que les caractères irréductibles sont orthogonaux. Partons pour cela de la relation d'orthogonalité des éléments de matrice,

$$\frac{1}{n} \sum_g D_{ab}^{(i)}(g) D_{cd}^{(j)*}(g) = \frac{1}{n_i} \delta_{i,j} \delta_{a,c} \delta_{b,d}. \quad (4.18)$$

En posant d'abord $d = c$ et en sommant sur c , on trouve

$$\frac{1}{n} \sum_g D_{ab}^{(i)}(g) \chi_j^*(g) = \frac{1}{n_i} \delta_{i,j} \delta_{a,b}. \quad (4.19)$$

Mettant ensuite $b = a$ et sommant ensuite sur a , on trouve les relations d'orthogonalité des caractères

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi_i(g) \chi_j^*(g) = \delta_{i,j}. \quad (4.20)$$

Pour prouver leur complétude, partons à nouveau de celle des éléments de matrice. Une fonction constante sur les classes est bien sûr une fonction sur le groupe, et à ce titre, s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de matrice des représentations irréductibles:

$$f(g) = \sum_{i,a,b} c_{ab}^i D_{ab}^{(i)}(g). \quad (4.21)$$

Etant constante sur les classes, elle satisfait $f(g) = \frac{1}{n} \sum_h f(hgh^{-1})$. Utilisant l'équation précédente, on trouve

$$f(g) = \frac{1}{n} \sum_{i,a,b} c_{ab}^i \sum_{b',b''} \sum_h D_{ab'}^{(i)}(h) D_{b'b''}^{(i)}(g) D_{bb''}^{(i)*}(h) \quad (4.22)$$

$$= \sum_{i,a,b} c_{ab}^i \sum_{b',b''} \frac{1}{n_i} \delta_{a,b} \delta_{b',b''} D_{b'b''}^{(i)}(g) \quad (4.23)$$

$$= \sum_{i,a} \frac{c_{aa}^i}{n_i} \chi_i(g), \quad (4.24)$$

qui montre que les caractères irréductibles sont effectivement complets.

Il est utile pour la suite de déterminer leur relation de complétude explicitement. Puisque les caractères sont constants sur les classes, il est raisonnable d'en faire des fonctions de classes, ce que nous noterons par $\chi_i(g_\alpha)$, avec g_α un représentant de la classe α . Les relations d'orthogonalité s'écrivent alors

$$\sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}}{n} \chi_i(g_{\alpha}) \chi_j^*(g_{\alpha}) = \delta_{i,j}. \quad (4.25)$$

Définissant la matrice carrée $V_{i\alpha} = \sqrt{k_{\alpha}/n} \chi_i(g_{\alpha})$, la relation précédente exprime l'unitarité de V , sous la forme $VV^{\dagger} = \mathbb{I}$. Cette relation implique tout de suite que $V^{\dagger}V = \mathbb{I}$, ce qui, en composantes, s'écrit,

$$\sum_i \frac{k_{\alpha}}{n} \chi_i(g_{\alpha}) \chi_i^*(g_{\beta}) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad (4.26)$$

et fournit la relation de complétude recherchée. ■

La conséquence la plus immédiate de ce résultat concerne le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes. Puisque les caractères irréductibles forment une base d'un espace vectoriel \mathbb{C}^N , avec N le nombre de classes de conjugaison, leur nombre doit également être égal à N ! On obtient par conséquent que *le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini G est égal au nombre de classes de conjugaison de G* . En particulier, pour un groupe abélien, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.5 *Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont toutes de dimension 1, et en nombre égal à l'ordre du groupe.*

En effet, le nombre de classes de conjugaison vaut l'ordre de groupe, et la formule (4.17) implique immédiatement le résultat. ■

On ne peut pas aller beaucoup plus loin dans la description explicite des représentations irréductibles d'un groupe quelconque. Dans la plupart des cas, un travail spécifique au groupe auquel on s'intéresse sera nécessaire, pour l'obtention des caractères et, *a fortiori*, des représentations. Il est en général possible de calculer les caractères irréductibles sans calculer les représentations elles-mêmes, mais cela requiert d'utiliser des informations spécifiques au groupe considéré, et ne peut donc se faire qu'au cas par cas. Un exemple illustratif de cette démarche est donné plus bas.

Il existe cependant un résultat général complémentaire qu'il est utile de connaître, mais dont la preuve dépasse le niveau de ce cours puisqu'elle utilise un peu de théorie des nombres algébriques et de théorie de Galois. Nous nous limiterons donc à le mentionner.

Théorème 4.6 *Les dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini sont des diviseurs de l'ordre du groupe.*

4.3 CONSÉQUENCES

L'orthogonalité des caractères irréductibles possède des conséquences pratiques et intéressantes, spécialement pour la réduction des représentations réductibles.

Supposons que D est une représentation réductible. Nous savons qu'elle est complètement réductible, et donc équivalente à une somme directe de représentations irréductibles:

$$D = m_1 D^{(1)} \oplus m_2 D^{(2)} \oplus \dots, \quad m_i \in \mathbb{N}, \quad (4.27)$$

où $m_i D^{(i)}$ signifie la somme directe de $D^{(i)}$ avec elle-même, m_i fois. Prenant la trace de la réduction de D (i.e. de l'équation précédente), on obtient que le caractère de D satisfait

$$\chi_D(g) = \sum_i m_i \chi_i(g). \quad (4.28)$$

Les coefficients m_i se calculent directement en utilisant l'orthogonalité des caractères irréductibles

$$m_j = \frac{1}{n} \sum_g \sum_i m_i \chi_j^*(g) \chi_i(g) = \frac{1}{n} \sum_g \chi_j^*(g) \chi_D(g) = \langle \chi_j | \chi_D \rangle, \quad (4.29)$$

et apparaissent comme la projection de χ_D sur χ_j , par rapport au produit scalaire hermitien $\langle \chi | \chi' \rangle = \frac{1}{n} \sum_g \chi_g^* \chi'_g$ (qui est le produit scalaire habituel sur \mathbb{C}^N , au facteur $1/n$ près).

Une seconde conséquence intéressante concerne la réduction elle-même, c'est-à-dire l'identification des sous-espaces invariants. On vérifie explicitement que, relativement à la décomposition (4.27) ci-dessus, les matrices

$$P_i = \frac{n_i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) D(g) \quad (4.30)$$

projettent respectivement sur le sous-espace qui se transforme selon la représentation irréductible $D^{(i)}$. C'est bien une famille de projecteurs orthogonaux puisque

$$\begin{aligned} P_i P_j &= \frac{n_i n_j}{n^2} \sum_{g, g'} \chi_i^*(g) \chi_j^*(g') D(gg') = \frac{n_i n_j}{n^2} \sum_{g, g'} \chi_i^*(gg'^{-1}) \chi_j^*(g') D(g) \\ &= \frac{n_i n_j}{n^2} \sum_{g, g'} \chi_i(g'g^{-1}) \chi_j^*(g') D(g) = \frac{n_i}{n} \delta_{i,j} \sum_g \chi_i^*(g) D(g) = \delta_{i,j} P_i, \end{aligned} \quad (4.31)$$

où l'on a utilisé les relations d'orthogonalité généralisées de l'exercice 4.5. Le calcul de la trace de P_i donne $\text{Tr} P_i = m_i n_i$, ce qui montre que P_i projette sur un espace de dimension $m_i n_i$, correspondant au sous-espace dans lequel les m_i copies de $D^{(i)}$ agissent. Pour s'assurer de cela, on peut observer que dans la base où D est diagonale par blocs, les éléments de matrice des projecteurs,

$$(P_i)_{ab} = \frac{n_i}{n} \bigoplus_j \sum_g \chi_i^*(g) m_j D_{ab}^{(j)}(g), \quad (4.32)$$

valent, en vertu des relations (4.19), $\delta_{a,b}$ dans les sous-espaces qui se transforment selon $D^{(i)}$, et 0 ailleurs.

Finalement, comme troisième conséquence, l'orthogonalité des caractères nous fournit un critère d'irréductibilité. Définissons d'abord la norme d'un caractère comme

$$\|\chi_D\|^2 = \frac{1}{n} \sum_g |\chi_D(g)|^2, \quad (4.33)$$

en termes du produit scalaire que nous venons juste de discuter. Pour une représentation quelconque, nous trouvons que

$$\|\chi_D\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \sum_g m_i m_j \chi_i(g) \chi_j^*(g) = \sum_i m_i^2 \geq 1 \quad (4.34)$$

est un entier positif, égal à 1 si et seulement si χ_D est un caractère irréductible.

Avant d'examiner un exemple concret de calcul des caractères d'un groupe, résumons les résultats les plus importants concernant les représentations irréductibles d'un groupe fini.

Un groupe fini d'ordre n possède autant de représentations irréductibles inéquivalentes que de classes de conjugaison. Les dimensions n_i de celles-ci, qui sont des diviseurs de n , satisfont $n = \sum_i n_i^2$.

Les caractères irréductibles $\chi_i(g)$ sont orthogonaux et complets

$$\frac{1}{n} \sum_{\alpha} k_{\alpha} \chi_i(g_{\alpha}) \chi_j^*(g_{\alpha}) = \delta_{i,j}, \quad \frac{1}{n} \sum_i k_{\alpha} \chi_i(g_{\alpha}) \chi_i^*(g_{\beta}) = \delta_{\alpha,\beta}.$$

4.4 LE GROUPE S_4

Commençons d'abord par S_3 , plus simple, et très utile pour la suite. Il est d'ordre 6, et possède trois classes de conjugaison, et donc trois représentations irréductibles. Nous en connaissons déjà deux, à savoir la représentation triviale et la parité $\epsilon(\sigma)$, toutes deux de dimension 1. (La représentation parité est aussi appelée la représentation alternée.) L'identité $\sum_i n_i^2 = 6$ montre que la troisième représentation irréductible est de dimension 2.

Pour fixer les idées, notons par $a_1 = (12)$, $a_2 = (23)$ et $a_3 = (13)$ les trois transpositions, et par $a_4 = (123)$ et $a_5 = (132)$ les deux permutations cycliques. Les trois classes de conjugaison correspondent aux partitions $(\cdot)(\cdot)(\cdot)$, $(\cdot)(\cdot\cdot)$ et $(\cdot\cdot\cdot)$, de cardinal $k_\alpha = 1, 3$ et 2 respectivement. Le caractère trivial vaut $\chi_1(g_\alpha) = (1, 1, 1)$, et celui de la représentation alternée est $\chi'_1(g_\alpha) = (1, -1, 1)$. Posons celui de la représentation de dimension 2 égal à $\chi_2(g_\alpha) = (2, a, b)$, où a, b sont deux coefficients à déterminer (on a utilisé le fait évident que $\chi_i(e) = \text{Tr } \mathbb{I}_{n_i} = n_i$). L'orthogonalité des caractères donne tout de suite

$$\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = \frac{1}{6} (2 + 3a + 2b) = 0, \quad (4.35)$$

$$\langle \chi'_1 | \chi_2 \rangle = \frac{1}{6} (2 - 3a + 2b) = 0, \quad (4.36)$$

et implique $a = 0$ et $b = -1$. La table des caractères de S_3 est donc donnée par le tableau suivant.

	1	3	2
χ_1	1	1	1
χ'_1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1

On peut écrire explicitement la représentation irréductible de dimension 2 puisque c'est celle qui correspond à l'action géométrique, dans le plan, de S_3 sur un triangle équilatéral. On trouve trois matrices de rotation, correspondant à l'élément neutre et aux deux permutations cycliques, et trois matrices de réflexion:

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

$$D_2(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_4) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Le groupe S_4 est d'ordre 24, et possède 5 classes de conjugaison. Il a deux représentations irréductibles de dimension 1, la triviale et la représentation alternée $\epsilon(\sigma)$. Les dimensions des trois autres représentations irréductibles sont telles que la somme de leurs carrés doit égaier 22, ce qui ne laisse qu'une seule possibilité: une représentation de dimension 2, et deux représentations de dimension 3.

Choisissons d'ordonner les classes de conjugaison par $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$, $(\cdot)(\cdot)(\cdot)$, $(\cdot)(\cdot)$, $(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ et $(\cdot)(\cdot)(\cdot)$, avec les cardinaux donnés respectivement par $k_\alpha = 1, 6, 3, 8$ et 6 . Les caractères sont de la forme

$$\chi_1(g_\alpha) = (1, 1, 1, 1, 1), \quad (4.39)$$

$$\chi'_1(g_\alpha) = (1, -1, 1, 1, -1), \quad (4.40)$$

$$\chi_2(g_\alpha) = (2, a_1, a_2, a_3, a_4), \quad (4.41)$$

$$\chi_3(g_\alpha) = (3, b_1, b_2, b_3, b_4), \quad (4.42)$$

$$\chi'_3(g_\alpha) = (3, c_1, c_2, c_3, c_4). \quad (4.43)$$

Les 12 coefficients pour le moment inconnus sont reliés entre eux par les relations d'orthogonalité, mais ne sont pas complètement déterminés par celles-ci. Il est d'ailleurs plus instructif de les calculer autrement.

Commençons par la représentation D_2 de dimension 2. On vérifie tout de suite que $\epsilon(\sigma)D_2(\sigma)$ est une représentation (de dimension 2), et qu'elle est irréductible (voir les exercices). Par conséquent, elle doit être équivalente à $D_2(\sigma)$ elle-même, dont le caractère doit par conséquent satisfaire $\epsilon(\sigma)\chi_2(\sigma) = \chi'_1(\sigma)\chi_2(\sigma) = \chi_2(\sigma)$. On en déduit $a_1 = a_4 = 0$.

Utilisons maintenant l'existence du sous-groupe S_3 , dont on a ci-dessus la table des caractères. Des 24 matrices $D_2(\sigma)$, sélectionnons les 6 qui correspondent à des éléments de S_3 . Ces six matrices forment une représentation de S_3 , dont le caractère vaut $(2, 0, a_3)$ puisque les trois classes de S_3 sont respectivement contenues dans les 1ère, 2ème et 4ème classes de S_4 . Cette représentation de S_3 est soit irréductible, auquel cas $a_3 = -1$ (par la table des caractères de S_3), soit la somme directe $1 \oplus \epsilon$ des deux représentations de dimension 1 de S_3 ($1 \oplus 1, \epsilon \oplus \epsilon$ doivent être exclues), auquel cas $a_3 = 2$.

Si $a_3 = 2$, on a $\chi_2 = (2, 0, a_2, 2, 0)$ pour le caractère de S_4 . L'orthogonalité $\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = \frac{1}{24}(2 + 3a_2 + 16) = 0$ implique $a_2 = -6$, qui à son tour montre que la norme carrée de χ_2 vaut $\|\chi_2\|^2 = \frac{1}{24}(4 + 3 \cdot 36 + 8 \cdot 4) = 6$, ce qui est impossible pour une représentation irréductible. Donc $a_3 = 2$ doit être rejetée, et l'autre alternative $a_3 = -1$ conservée.

L'orthogonalité $\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = \frac{1}{24}(2 + 3a_2 - 8) = 0$ fixe $a_2 = 2$. On a donc

$$\chi_2(g_\alpha) = (2, 0, 2, -1, 0). \quad (4.44)$$

Les deux caractères restants χ_3 et χ'_3 pourraient être déterminés de manière semblable, en examinant les représentations $\epsilon(\sigma)D_3(\sigma)$ et $\epsilon(\sigma)D'_3(\sigma)$, et en utilisant les restrictions à S_3 . Une autre voie est la suivante.

Rappelons-nous de la représentation de définition de S_4 . C'est une représentation de dimension 4, dont les matrices permutent les vecteurs de base, $D_4^{\text{def}}(\sigma)|i\rangle = |\sigma(i)\rangle$. Le caractère de D_4^{def} est facile à calculer, $\chi_4^{\text{def}}(g_\alpha) = (4, 2, 0, 1, 0)$ puisque $\chi_4^{\text{def}}(g_\alpha)$ est le nombre d'objets laissés fixes par la permutation g_α . D_4^{def} n'est pas irréductible, et le calcul de sa norme,

$$\|\chi_4^{\text{def}}\|^2 = \frac{1}{24}(16 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 1) = 2, \quad (4.45)$$

montre que D_4^{def} est équivalente à la somme directe de deux représentations irréductibles. L'une d'elles doit être la représentation triviale $D_1(\sigma) = 1$. Effectivement, les matrices $D_4^{\text{def}}(\sigma)$ sont des matrices de permutation, qui permutent les composantes des vecteurs de \mathbb{C}^4 . Elles laissent par conséquent invariant le sous-espace des vecteurs qui ont les quatre composantes identiques (x, x, x, x) . C'est un espace de dimension 1, sur lequel l'action de la représentation est triviale.

On obtient donc immédiatement que $D_4^{\text{def}} \sim D_1 \oplus D_3$, et

$$\chi_3(g_\alpha) = \chi_4^{\text{def}}(g_\alpha) - \chi_1(g_\alpha) = (3, 1, -1, 0, -1). \quad (4.46)$$

Finalement, l'autre représentation de dimension 3 ne peut être que $D'_3(\sigma) \sim \epsilon(\sigma)D_3(\sigma)$ car $\epsilon(\sigma)D_3(\sigma)$ ne peut pas être équivalente à $D_3(\sigma)$ (sinon le caractère χ_3 sur les 2ème et 5ème classes devrait être nul). On a donc

$$\chi'_3(g_\alpha) = (3, -1, -1, 0, 1). \quad (4.47)$$

La table des caractères de S_4 est donnée par le tableau suivant.

	1	6	3	8	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ'_1	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	2	-1	0
χ_3	3	1	-1	0	-1
χ'_3	3	-1	-1	0	1

On vérifiera que les relations d'orthogonalité et de norme des caractères sont satisfaites.

4.5 ACTION D'UN GROUPE SUR UN ENSEMBLE: POINTS FIXES ET ORBITES

Soient un groupe fini G et un ensemble fini E . On dira que G possède une action sur E si les éléments du groupe agissent dans E d'une façon qui est compatible avec la loi du groupe: pour chaque g dans G et chaque x dans E , $g(x)$ est également un élément de E , et les images satisfont $g(g'(x)) = gg'(x)$. Il s'ensuit que chaque élément du groupe agit dans E par permutations, et que l'ensemble de ces actions, pour tous les éléments du groupe, définit une représentation $D(g)$ de G , de dimension $|E|$. Dans la base spécifiée par les vecteurs $|x\rangle$, les matrices $D(g)$ sont des matrices de permutation. La représentation régulière de G , $D^{\text{reg}}(g)$, peut être de cette façon associée à l'action de G dans G lui-même.

Une **orbite** de G dans E est un sous-ensemble de E obtenu en appliquant tous les éléments du groupe sur un élément particulier de E . C'est donc un ensemble de la forme $Gx = \{g(x) : g \in G\}$

(on parlera dans ce cas de l'orbite de x sous G). Il est clair que la longueur d'une orbite (i.e. son cardinal) est au plus égal à l'ordre du groupe, et qu'elle est en général plus petite que $|G|$, puisque certains g auront x comme points fixes.

Les différentes orbites dans E sous G constituent une partition bien définie de E . Si E ne contient qu'une seule orbite, on dit que l'action de G dans E est **transitive**. C'est le cas lorsque n'importe pour quelle paire d'éléments x, y de E , il existe un g tel que $y = g(x)$.

Un résultat classique, et souvent utile, concerne le nombre d'orbites. Il spécifie que

$$\text{Nombre d'orbites de } E \text{ sous } G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |\{x \in E : g(x) = x\}|, \quad (4.48)$$

ce qui s'exprime également en disant que le nombre d'orbites est égal au nombre moyen de points fixes du groupe. Les caractères de G nous permettent une démonstration relativement aisée de cette formule.

Nous avons vu plus haut que l'action de G dans E fournit une représentation $D(g)$ du groupe par des matrices de permutation. Celle-ci n'est donc pas irréductible, et contient la représentation triviale un certain nombre de fois, disons m_1 . Remarquons que m_1 est précisément le nombre d'orbites de G dans E . Effectivement, pour chaque orbite Gx , la somme des vecteurs de base associés aux éléments de l'orbite, c'est-à-dire $v = \sum_{y \in Gx} |y\rangle$, est invariant sous l'action de n'importe quel g , par définition d'une orbite, et par conséquent engendre un sous-espace unidimensionnel qui se transforme sous G dans la représentation triviale. Inversement, chaque orbite ne produit qu'une seule direction invariante sous G , donnée par le vecteur v ci-dessus, parce que tout autre vecteur invariant supposerait l'existence, à l'intérieur de l'orbite, d'une sous-orbite, ce qu'interdit la définition même d'orbite.

Nous obtenons donc que le nombre d'orbites vaut le nombre de fois que la représentation D contient la représentation triviale. D'après la section 4.3, ce nombre est donné par

$$m_1 = \langle \chi_1 | \chi_D \rangle = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi_D(g). \quad (4.49)$$

Puisque les $D(g)$ sont des matrices de permutation, $\chi_D(g)$ est le nombre d'éléments diagonaux de $D(g)$, c'est-à-dire le nombre de points fixes de g dans E . La formule (4.48) est ainsi démontrée.

4.6 INDICATEUR DE FROBENIUS-SCHUR

Nous avons obtenu ci-dessus des résultats généraux sur les représentations d'un groupe, irréductibles sur le corps des nombres complexes. Une telle représentation D peut être ou ne pas être équivalente à sa complexe conjuguée D^* . On peut ainsi distinguer trois types de représentations:

1. représentation **complexe**: D n'est pas équivalente à sa complexe conjuguée, ce qui implique que son caractère est complexe non-réel (voir l'exercice 4.10);
2. représentation **réelle**: D est équivalente à sa complexe conjuguée, et de plus, il existe une base dans laquelle toutes les matrices $D(g)$ de la représentation sont réelles;

3. représentation **pseudo-réelle**: D est équivalente à sa complexe conjuguée, mais il n'existe pas de base dans laquelle les matrices $D(g)$ de la représentation sont toutes réelles.

Pour une représentation irréductible, il existe un critère remarquablement simple permettant, à partir de la seule connaissance de son caractère, de déterminer le type de la représentation.

Théorème 4.7 Soit χ le caractère d'une représentation irréductible D d'un groupe fini. Alors l'indicateur de Schur-Frobenius,

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi(g^2) = c, \quad (4.50)$$

vaut $c = 0, +1$, ou -1 selon que D est complexe, réelle ou pseudo-réelle.

On peut obtenir ce résultat assez surprenant en utilisant une fois encore les relations d'orthogonalité (4.12),

$$\sum_g D_{ab}^{(i)}(g) D_{cd}^{(j)*}(g) = \frac{n}{n_i} \delta_{i,j} \delta_{a,c} \delta_{b,d}. \quad (4.51)$$

Prenant $b = c$ et sommant sur b , on trouve en effet

$$\frac{1}{n} \sum_g \left(D^{(i)}(g) D^{(j)*}(g) \right)_{ad} = \frac{1}{n_i} \delta_{i,j} \delta_{a,d}. \quad (4.52)$$

Pour D une représentation complexe, choisissons $D^{(i)} = D$ et $D^{(j)} = D^*$, de sorte que $j = i^*$ correspondent à deux représentations inéquivalentes. La relation précédente entraîne immédiatement l'équation matricielle

$$\frac{1}{n} \sum_g D(g) D(g) = \frac{1}{n} \sum_g D(g^2) = 0, \quad (4.53)$$

dont la trace implique $c = 0$.

Pour D une représentation réelle ou pseudo-réelle, nous prenons $D^{(i)} = D^{(j)} = D$. Puisque D et D^* sont équivalentes, il existe une matrice unitaire S telle que $D = S D^* S^{-1}$. Utilisant (4.51), nous obtenons

$$\sum_g D(g^2) = \sum_g D(g) D(g) = \sum_g D(g) S D^*(g) S^{-1} = \frac{n}{n_D} S^t S^{-1}, \quad (4.54)$$

et en prenant la trace,

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi(g^2) = \frac{1}{n_D} \text{Tr} (S^t S^{-1}). \quad (4.55)$$

L'identité $D = SD^*S^{-1}$ implique $D^* = S^*DS^{-1}$, et donc aussi $D = SS^*D(SS^*)^{-1}$, qui montre que SS^* commute avec D . Par le lemme de Schur, SS^* doit être proportionnel à l'identité, $SS^* = c\mathbb{I}$, ou encore $S = cS^{*-1} = cS^t$ par l'unitarité de S . Transposant cette dernière égalité, on a aussi $S^t = cS$, et donc $c^2 = 1$, ce qui amène

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi(g^2) = c = \pm 1. \quad (4.56)$$

Si la représentation D est réelle, il existe une base dans laquelle $S = \mathbb{I}$, et donc $c = +1$. Inversément, si $c = +1$, alors S satisfait $SS^* = \mathbb{I}$. On peut, si nécessaire, redéfinir S en la multipliant par une phase, et ainsi supposer que S ne possède pas de vecteur propre de valeur propre -1 . Dans ce cas $S + \mathbb{I}$ est inversible et permet de transformer $D(g)$ en une représentation équivalente, $(S + \mathbb{I})^{-1}D(g)(S + \mathbb{I})$, que l'on vérifie être réelle,

$$\begin{aligned} [(S + \mathbb{I})^{-1}D(g)(S + \mathbb{I})]^* &= (S^* + \mathbb{I})^{-1}D^*(g)(S^* + \mathbb{I}) = (S^* + \mathbb{I})^{-1}S^{-1}D(g)S(S^* + \mathbb{I}) \\ &= (S + \mathbb{I})^{-1}D(g)(S + \mathbb{I}). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Par conséquent, $c = +1$ si et seulement si D est réelle, et donc $c = -1$ si et seulement si D est pseudo-réelle.

Le type d'une représentation, complexe, réel ou pseudo-réel, est en fait intimement lié à la question de savoir si la réduction du produit tensoriel $D \otimes D$ contient ou non la représentation triviale (ou, de manière équivalente, à l'existence ou non d'une forme bilinéaire sur l'espace de la représentation, qui soit invariante sous l'action de la représentation). Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre suivant, consacré aux produits tensoriels.

EXERCICES

- 4.1 Etablir la table des caractères des groupes cycliques \mathbb{Z}_N .
- 4.2 Montrer que le produit d'une représentation irréductible par une représentation de dimension 1 (un exemple de produit tensoriel !) est irréductible.
- 4.3 Se convaincre que la restriction à un sous-groupe d'une représentation d'un groupe est une représentation du sous-groupe, mais que l'irréductibilité n'est pas préservée en général.
- 4.4 Calculer de façon générale, pour n'importe quel groupe, la réduction de la représentation régulière en représentations irréductibles.
- 4.5 Généraliser la relation d'orthogonalité des caractères (4.20) et montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi_i(gg')\chi_j^*(g) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi_i(g'g)\chi_j^*(g) = \frac{1}{n_i} \delta_{i,j} \chi_i(g'). \quad (4.58)$$

Partir pour cela de l'équation (4.12).

- 4.6 Considérer la représentation irréductible D_3 de S_4 , et calculer sa réduction en représentations irréductibles de S_3 .
- 4.7 La représentation conjugaison, définie par $D(g)|g'\rangle = |gg'g^{-1}\rangle$, n'est jamais irréductible (voir chapitre 3). Calculer sa réduction en irréductibles pour les groupes S_3 et S_4 . Pour cela, utiliser les résultats des exercices 2.7 et 3.4, à savoir que $\chi(g_\alpha) = |C(g_\alpha)| = n/k_\alpha$.
- 4.8 Calculer, à partir de la table des caractères de S_4 , celle de A_4 (utiliser les résultats de l'exercice 2.10). Prendre garde que les caractères peuvent être complexes !
- 4.9 Montrer que deux représentations complètement réductibles inéquivalentes ne peuvent avoir le même caractère.
- 4.10 Montrer qu'une représentation complètement réductible possède un caractère réel si et seulement si elle est équivalente à sa complexe conjuguée, c'est-à-dire que $\chi_D = \chi_D^*$ est équivalent à $D \sim D^*$.

PRODUITS TENSORIELS

Dans toutes les situations physiques qui possèdent un groupe de symétrie, il est essentiel de savoir comment les variables et quantités physiques se transforment sous ce groupe. Il faut pour cela déterminer les représentations dans lesquelles se transforment les diverses quantités, et ainsi les regrouper en multiplets, interprétés comme vecteurs d'espaces vectoriels (les espaces des représentations). Dans de nombreux cas, il est néanmoins plus commode de voir ces multiplets, non pas comme des vecteurs, mais comme des tenseurs, c'est-à-dire des éléments de produits tensoriels portant plusieurs indices vectoriels. C'est le cas par exemple pour les champs électrique et magnétique. Sous le groupe de Lorentz, ces six composantes se transforment dans une représentation irréductible de dimension 6, et forment donc les composantes d'un vecteur de \mathbb{C}^6 (ou \mathbb{R}^6). Ce n'est cependant pas ce que l'on fait habituellement, puisque l'on met ces six composantes dans un tenseur de rang 2 antisymétrique, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Les deux descriptions sont équivalentes, mais l'écriture tensorielle est plus simple que l'écriture vectorielle pour spécifier la représentation elle-même. C'est à cette description duale vecteur/tenseur que ce chapitre est consacré.

5.1 GÉNÉRALITÉS

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{C} , de dimensions m et n et de bases $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ respectivement. Le produit tensoriel $E \otimes F$ est l'espace défini par

$$E \otimes F = \left\{ t = \sum_j t^j f_j, t^j \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ t = \sum_{i,j} t^{ij} e_i \otimes f_j, t^{ij} \in \mathbb{C} \right\}. \quad (5.1)$$

La première écriture de $E \otimes F$ montre qu'un élément du produit tensoriel, un tenseur donc, est un vecteur de F , dont les composantes sont des vecteurs de E . Un tenseur de $E \otimes F$ est dans ce sens un vecteur de vecteurs:

$$t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{21} \\ \vdots \\ t^{m1} \end{pmatrix}_E \\ \begin{pmatrix} t^{12} \\ t^{22} \\ \vdots \\ t^{m2} \end{pmatrix}_E \\ \vdots \end{pmatrix}_F \quad (5.2)$$

dans la base $e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, e_3 \otimes f_1, \dots, e_m \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_2, \dots$

Les produits $e_i \otimes f_j$ forment une base de $E \otimes F$, et les t^{ij} sont les coefficients du tenseur t dans cette base. Ici t est un tenseur de rang 2, puisqu'il appartient à un espace qui est un produit tensoriel de deux espaces vectoriels. Les deux indices i et j , qui prennent les valeurs entre 1 et m ou n , sont des indices vectoriels de type E et F respectivement.

Il y a en quelque sorte deux structures en couches. Une structure de type E , qui est ici la structure "interne", et une structure de type F , "externe". Aucune des deux structures ne prévalant sur l'autre, on peut de même définir $E \otimes F$ comme étant les vecteurs de E dont les composantes sont des vecteurs de F . Dans ce cas, les deux structures E et F sont échangées, et le même tenseur t s'écrit alors

$$t = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} t^{11} \\ t^{12} \\ \vdots \\ t^{1n} \end{array} \right)_F \\ \left(\begin{array}{c} t^{21} \\ t^{22} \\ \vdots \\ t^{2n} \end{array} \right)_F \\ \vdots \end{array} \right)_E \quad (5.3)$$

Si $E = \mathbb{C}$ est une espace unidimensionnel, le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes F$ est identique à F lui-même, et de même $E \otimes \mathbb{C} = E$ (le parenthésage intérieur n'apporte aucune structure supplémentaire).

Notons qu'un tenseur général possède $(\dim E) \cdot (\dim F)$ composantes, et ne s'écrit pas comme un produit tensoriel de deux vecteurs

$$u \otimes v = \left(\sum_i u^i e_i \right) \otimes \left(\sum_j v^j f_j \right) = \sum_{i,j} u^i v^j e_i \otimes f_j. \quad (5.4)$$

Seuls les tenseurs qui ont leurs composantes "factorisées", $t^{ij} = u^i v^j$, sont des produits tensoriels de deux vecteurs. Par contre un tenseur quelconque est une combinaison de produits vectoriels de vecteurs (par exemple des $e_i \otimes f_j$!).

Un espace produit tensoriel peut donc se voir de deux manières différentes. C'est d'abord un espace qui s'exprime naturellement en termes d'espaces vectoriels plus petits, et dont la structure est complètement déterminée par ceux-ci, qui apparaissent dès lors comme plus fondamentaux. Ce point de vue décrit les éléments du produit tensoriel, les tenseurs, comme des objets à deux indices vectoriels. Mais comme le montre l'écriture (5.2), l'espace produit tensoriel est également un espace vectoriel, et à ce titre, possède des éléments qui peuvent être décrits avec un seul indice. Un tenseur est donc également un vecteur. La différence entre les deux est purement notacionnelle: les deux indices du tenseur ont été condensés en un seul indice. Dans l'équation (5.2) ci-dessus, on peut décider d'oublier les parenthèses intérieures, et de considérer le résultat comme un "grand" vecteur de dimension mn , dont les composantes seront comme d'habitude numérotées de 1 à mn . En faisant cela, on sera effectivement passé d'une notation à deux indices à une notation à un seul indice, selon la correspondance $11 \sim 1, 21 \sim 2, 31 \sim 3, \dots$

Ce que l'on vient de dire des tenseurs de rang 2 peut être généralisé aux tenseurs de rang plus élevé. Un tenseur de rang k est un élément d'un espace qui est le produit tensoriel de k espaces vectoriels, et possède donc des composantes repérées par k indices vectoriels. Il peut être considéré comme un vecteur de vecteurs de vecteurs ... (k fois), et son écriture comme vecteur colonne, analogue à (5.2) ou (5.3) comporte k niveaux de parenthèses. Comme dans le cas du rang 2, la notation multi-indice peut être remplacée par une notation à un seul indice, exprimant le fait qu'un tel tenseur est également un vecteur.

La distinction tenseur/vecteur est donc matière de notation uniquement, mais le point de vue tensoriel s'avère beaucoup plus utile lorsqu'il s'agit de décrire des transformations linéaires qui se ramènent à des transformations linéaires dans les espaces dont on prend le produit tensoriel. C'est le cas notamment pour les représentation de groupes, dans les cas où des représentations de grande dimension peuvent se voir comme produits tensoriels de représentations plus petites, et donc plus simples.

Si $A : E \rightarrow E$ et $B : F \rightarrow F$ sont deux applications linéaires, on peut définir l'application produit $A \otimes B$ en juxtaposant simplement les deux actions de A et B sur leur structure respective: A n'agit que sur les indices de type E , et B sur ceux de type F . On obtient l'action de $A \otimes B$ sur les composantes d'un tenseur t :

$$(A \otimes B) t^{ij} = \sum_k \sum_\ell A_k^i B_\ell^j t^{k\ell}. \quad (5.5)$$

De même qu'un vecteur se transforme linéairement, un tenseur se transforme de façon multilinéaire, chacun de ses indices se transformant linéairement, comme le fait n'importe quel indice vectoriel.

Par rapport à l'écriture vectorielle "en deux couches" utilisée plus haut en (5.2), l'écriture matricielle de $A \otimes B$ fait apparaître une structure en blocs,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} B_1^1 A & B_2^1 A & B_3^1 A & \cdots \\ B_1^2 A & B_2^2 A & B_3^2 A & \cdots \\ B_1^3 A & B_2^3 A & B_3^3 A & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Notons que les applications linéaires produits de cette forme ne constituent pas les transformations linéaires les plus générales dans $E \otimes F$. Si on se restreint aux transformations inversibles, elles forment un sous-groupe $GL(m; \mathbb{C}) \times GL(n; \mathbb{C})$ du groupe $GL(mn; \mathbb{C})$ de toutes les transformations linéaires inversibles de $E \otimes F$.

On vérifiera également les deux identités suivantes,

$$(A \otimes B) (A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB'), \quad (5.7)$$

$$\text{Tr } A \otimes B = (\text{Tr } A)(\text{Tr } B). \quad (5.8)$$

5.2 APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE

L'application de cela aux représentations de groupes est immédiate, mais instructive et importante. Considérons D et D' deux représentations d'un groupe G , éventuellement identiques, d'espaces de représentation V et V' .

Dans les produits tensoriels $D(g) \otimes D'(g)$, les matrices $D(g)$ et $D'(g)$ ne voient que leur propre espace vectoriel et n'interfèrent pas entre elles. En vertu de (5.7), il est immédiat de vérifier alors que les $D(g) \otimes D'(g)$ définissent une nouvelle représentation de G , d'espace $V \otimes V'$, appelée la **représentation produit tensoriel** et notée $D \otimes D'$. Les éléments de $V \otimes V'$ seront appelés des tenseurs sous le groupe G . La représentation produit $D \otimes D'$ est unitaire si D et D' le sont.

Par contre, et c'est important pour nous, si D et D' sont des représentations irréductibles, leur produit tensoriel $D \otimes D'$ n'est jamais irréductible, sauf si D ou D' est de dimension 1. Puisque la représentation produit $D \otimes D'$ est complètement réductible, on peut la réduire en une série de représentations irréductibles,

$$D \otimes D' = \bigoplus_i m_i D_i, \quad (5.9)$$

appelée la **série de Clebsch-Gordan**. Pour des représentations D, D' quelconques, il n'est pas possible d'en dire beaucoup plus à ce niveau de généralité. Par contre lorsque $D = D'$, la façon dont cette réduction s'effectue est à la base des méthodes tensorielles pour les représentations des groupes linéaires (voir le chapitre 10).

Comme exemple, considérons $D = D' = D_2$, la représentation irréductible de dimension 2 de S_3 . Nous avons écrit explicitement au chapitre 4 les six matrices suivantes de cette représentation

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$D_2(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_4) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Une particularité de cette représentation, qui aura son importance par la suite, est d'être orthogonale, toutes les matrices satisfaisant $D(g) [D(g)]^t = \mathbb{I}$.

Le produit tensoriel $D \otimes D$ est de dimension 4 et ne peut donc pas être irréductible. Du caractère de la représentation, $\chi_D(g_\alpha) = (2, 0, -1)$, on tire tout de suite, par (5.8), celui de la représentation produit,

$$\chi_{D \otimes D}(g_\alpha) = \chi_D(g_\alpha) \chi_D(g_\alpha) = (4, 0, 1). \quad (5.12)$$

La norme carrée de ce caractère vaut $\frac{1}{6}(16 + 0 + 2 \cdot 1) = 3$, ce qui implique que $D \otimes D$ est (équivalente à) la somme directe de trois représentations irréductibles. On vérifie facilement, à l'aide de la table des caractères de S_3 établie au chapitre 4, que

$$D_2 \otimes D_2 = D_1 \oplus D'_1 \oplus D_2 = 1 \oplus \epsilon \oplus D_2. \quad (5.13)$$

La réduction explicite de $D_2 \otimes D_2$ dans ce cas particulier est représentative du cas général.

L'espace de la représentation produit $D \otimes D$ est de dimension 4. Par combinaisons linéaires, on peut choisir la base particulière suivante:

$$(A) = \{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i\} = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, \quad (5.14)$$

$$(S) = \{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\} = 2e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, 2e_2 \otimes e_2. \quad (5.15)$$

La partie antisymétrique (A) est de dimension 1, la partie symétrique (S) de dimension 3. Montrons d'abord que ces deux sous-espaces, complémentaires orthogonaux l'un de l'autre, sont invariants sous $D \otimes D$.

L'action de $D \otimes D$ sur la partie antisymétrique donne

$$\begin{aligned} (D \otimes D)(g)(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) &= \sum_{i,j} (e_i \otimes e_j) D_{i1}(g) D_{j2}(g) - (e_i \otimes e_j) D_{i2}(g) D_{j1}(g) \\ &= \sum_{i,j} (e_i \otimes e_j) D_{i1}(g) D_{j2}(g) - (e_j \otimes e_i) D_{j2}(g) D_{i1}(g) \\ &= \sum_{i,j} (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) D_{i1}(g) D_{j2}(g) \\ &= (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) [D_{11}(g) D_{22}(g) - D_{21}(g) D_{12}(g)]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

On en déduit que la direction antisymétrique du produit tensoriel est effectivement invariante, mais également que la restriction de $D \otimes D$ à ce sous-espace agit par multiplication par $\det D(g) = \epsilon(g)$, c'est-à-dire la représentation alternée. La partie antisymétrique du produit tensoriel correspond donc à la représentation irréductible $D'_1 = \epsilon$ dans la série de Clebsch-Gordan (5.13).

Comme la représentation produit est unitaire, la partie symétrique est également invariante, mais dans ce cas précis, elle n'est pas irréductible, à cause du caractère orthogonal de D . Effectivement, on trouve dans la partie symétrique le sous-espace de dimension 1 généré par la combinaison $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$, qui constitue un sous-espace invariant:

$$\begin{aligned} (D \otimes D)(g) \sum_i e_i \otimes e_i &= \sum_{k,\ell} e_k \otimes e_\ell \sum_i D_{ki}(g) D_{\ell i}(g) \\ &= \sum_{k,\ell} e_k \otimes e_\ell \sum_i D_{ki}(g) D_{i\ell}^t(g) \\ &= \sum_{k,\ell} e_k \otimes e_\ell \delta_{k\ell} = \sum_k e_k \otimes e_k, \end{aligned} \quad (5.17)$$

où nous avons utilisé explicitement l'orthogonalité de D . Le vecteur $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ génère donc un sous-espace invariant, sur lequel la représentation produit agit trivialement, par la représentation triviale de dimension 1. La partie symétrique contient donc la représentation triviale de dimension 1, et la représentation irréductible D_2 de dimension 2, correspondant au sous-espace complémentaire dans la partie symétrique. On a ainsi obtenu la réduction complète du produit $D \otimes D$.

La réduction du produit d'une représentation par elle-même que l'on vient d'effectuer est en partie complètement générale: *les parties symétrique et antisymétrique sont toujours des sous-espaces invariants*. Dépendant des cas, elles peuvent être néanmoins réductibles, comme la partie symétrique dans l'exemple que l'on vient d'examiner. Notons que la distinction symétrique et antisymétrique n'a de sens que pour un produit tensoriel de deux espaces vectoriels identiques, et n'est donc utile que dans le cas de la réduction du produit $D \otimes D'$ de deux représentations de même dimension. Cependant, les calculs explicites ci-dessus montrent que les parties symétrique et antisymétrique ne sont pas invariantes en général, sauf dans le cas $D' = D$.

Les propriétés que l'on vient de décrire sont précisément celles que l'on utilise pour décrire les transformations des champs électrique et magnétique sous le groupe de Lorentz. Les composantes E^i et B^i peuvent être mises dans la partie antisymétrique d'un tenseur de rang 2, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, qui se trouve être irréductible sous le groupe de Lorentz (comme ci-dessus). Cette situation, que la partie antisymétrique est irréductible, est générale pour les groupes de matrices (les groupes linéaires). L'avantage de cette écriture tensorielle par rapport à une écriture vectorielle, avec un indice qui prend six valeurs, est que la transformation du tenseur s'obtient directement à partir de la transformation fondamentale du groupe de Lorentz, de dimension 4, à savoir celle qui agit sur l'espace de Minkowski lui-même (et donc sur les coordonnées d'espace-temps, qui portent un seul indice de Minkowski):

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu F^{\rho\sigma} = \sum_{1 \leq \rho < \sigma \leq 4} (\Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu - \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu) F^{\rho\sigma}. \quad (5.18)$$

Puisque les matrices Λ_ρ^μ sont explicitement connues, les transformations des champs \vec{E} et \vec{B} sont également, sans qu'il ait été nécessaire de calculer les matrices de dimension six. Cette représentation irréductible de dimension six peut ainsi être décrite en termes de la représentation fondamentale de dimension quatre. De plus le critère qui l'identifie dans le produit tensoriel est très simple, puisqu'il correspond à une propriété d'antisymétrie sous l'échange des deux indices.

Cette façon de voir des représentations irréductibles comme parties invariantes de représentations produits est complètement générale, et porte le nom de méthode tensorielle. L'aspect pratique d'un tel point de vue est qu'il réduit des représentations de grande dimension à la connaissance de représentations plus petites, plus fondamentales. Cependant la méthode n'est réellement utile que si les parties irréductibles des produits tensoriels sont facilement identifiables (par exemple en termes de propriétés de symétries sous l'échange d'indices).

Les méthodes tensorielles sont particulièrement utiles pour les groupes linéaires, pour deux raisons. D'une part, *toutes* les représentations irréductibles sont contenues dans une puissance tensorielle d'une (ou éventuellement plusieurs) représentation fondamentale, et sont donc dans ce sens, des représentations tensorielles. D'autre part, les représentations irréductibles contenues dans les produits tensoriels multiples sont identifiées univoquement en termes de propriétés de symétries, ou d'antisymétries, sous permutations d'indices³. Ceci signifie pratiquement que *n'importe quel ensemble de quantités se transformant de manière irréductible sous un groupe*

³Comme le cas de S_3 analysé dans le texte l'a déjà illustré, il nous faudra nuancer cette assertion dans le cas de groupes possédant des représentations orthogonales, comme les groupes orthogonaux, et en particulier le groupe de Lorentz. Dans ces cas, les parties symétriques ne sont pas tout à fait irréductibles.

linéaire peut être mis en relation avec les composantes indépendantes d'un tenseur $t^{ijkl\dots}$ ayant certaines symétries sous permutations de ses indices (qui sont tous du même type vectoriel).

Les méthodes tensorielles pour les groupes linéaires seront développées plus loin. Nous verrons ainsi qu'il existe un lien très direct et très profond entre les représentations irréductibles des groupes linéaires et les groupes de permutations, dont les représentations irréductibles expriment précisément des propriétés de symétrie sous l'échange d'indices. Ces dernières seront examinées au chapitre 7.

5.3 REPRÉSENTATIONS COMPLEXES, RÉELLES ET PSEUDO-RÉELLES

La discussion qui précède sur les partie symétrique et antisymétrique du produit tensoriel $V \otimes V$ permet d'établir une relation intéressante avec l'indicateur de Frobenius-Schur développé à la section 4.6. On s'aperçoit rapidement d'une telle relation lorsqu'on écrit les caractères de la représentation produit $D \otimes D$ sur les deux parties invariantes. En effet, si $D \otimes_S D$ et $D \otimes_A D$ désignent respectivement la restriction de $D \otimes D$ à la partie symétrique et antisymétrique, le résultat de l'exercice 5.2 montre que leurs caractères sont donnés, en termes du caractère de D , par

$$\chi_{D \otimes_S D}(g) = \frac{1}{2}[\chi_D^2(g) + \chi_D(g^2)], \quad \chi_{D \otimes_A D}(g) = \frac{1}{2}[\chi_D^2(g) - \chi_D(g^2)]. \quad (5.19)$$

Remarquons tout d'abord que la quantité

$$\langle \chi_1 | \chi_{D \otimes D} \rangle = \frac{1}{n} \sum_g \chi_{D \otimes D}(g) = \frac{1}{n} \sum_g \chi_D^2(g) = \langle \chi_{D^*} | \chi_D \rangle \quad (5.20)$$

vaut la multiplicité de la représentation triviale dans la réduction de $D \otimes D$. Pour D irréductible, la deuxième écriture montre que ce nombre est nul si D est complexe (D et D^* sont inéquivalentes), et qu'il vaut 1 si D est réelle ou pseudo-réelle (D et D^* sont équivalentes). De plus, on a immédiatement que l'indicateur de Frobenius-Schur est égal à

$$c = \frac{1}{n} \sum_g \chi_D(g^2) = \frac{1}{n} \sum_g \chi_{D \otimes_S D}(g) - \chi_{D \otimes_A D}(g) = \langle \chi_1 | \chi_{D \otimes_S D} \rangle - \langle \chi_1 | \chi_{D \otimes_A D} \rangle, \quad (5.21)$$

et vaut donc +1 si la représentation triviale appartient à la partie symétrique, -1 si elle est dans la partie antisymétrique, et 0 si elle n'apparaît ni dans l'une ni dans l'autre. Examinons la signification de ceci.

Que la représentation triviale apparaisse dans la partie symétrique signifie qu'il existe un sous-espace vectoriel unidimensionnel (une direction), spécifié disons par

$$v = \sum_{i,j} M_{ij} e_i \otimes e_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} [e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i], \quad (5.22)$$

avec M symétrique, qui se transforme de façon triviale sous l'action de la représentation produit:

$$\begin{aligned} (D \otimes D)(g) v &= (D \otimes D)(g) \sum_{i,j} M_{ij} e_i \otimes e_j = \sum_{k,\ell} e_k \otimes e_\ell \sum_{i,j} D_{ki}(g) D_{\ell j}(g) M_{ij} \\ &= \sum_{k,\ell} \left(D(g) M D^t(g) \right)_{k\ell} e_k \otimes e_\ell = \sum_{k,\ell} M_{k\ell} e_k \otimes e_\ell = v. \end{aligned} \quad (5.23)$$

La forme symétrique M , que l'on peut interpréter comme une forme bilinéaire sur le produit cartésien $V \times V$, est donc invariante sous l'action de la représentation $M = D M D^t$. M est définie à un multiple près.

Si la représentation triviale apparaît dans la partie antisymétrique, le même raisonnement mène à une forme bilinéaire antisymétrique invariante sous l'action du groupe.

Le résultat obtenu à la section 4.6 concernant la valeur de l'indicateur de Frobenius-Schur, à savoir $c = +1$ si D est réelle et $c = -1$ si elle est pseudo-réelle, mène à la nouvelle caractérisation suivante des représentations:

1. une représentation irréductible D est complexe si elle n'admet pas de forme bilinéaire invariante; de manière équivalente, la représentation triviale n'apparaît pas dans la réduction de $D \otimes D$;
2. une représentation irréductible D est réelle si elle admet une forme bilinéaire symétrique invariante, unique à une constante près; dans ce cas, la représentation triviale apparaît exactement une fois dans la partie symétrique de la réduction de $D \otimes D$;
3. une représentation irréductible D est pseudo-réelle si elle admet une forme bilinéaire antisymétrique invariante, unique à une constante près; dans ce cas, la représentation triviale apparaît exactement une fois dans la partie antisymétrique de la réduction de $D \otimes D$.

EXERCICES

- 5.1 Soit D une représentation de dimension strictement plus grande que 1. Montrer que $D \otimes D$ laisse invariants les parties symétrique et antisymétrique de l'espace produit. Qu'en est-il dans le cas du produit $D \otimes D'$ si D' n'est pas égale à D mais est équivalente à D ? Que pourriez-vous dire de la réduction de $D \otimes D \otimes D$?
- 5.2 Dénotez par $D \otimes_S D$ et $D \otimes_A D$ les représentations agissant dans la partie symétrique respectivement antisymétrique de l'espace produit. Montrer que les caractères de ces deux représentations sont donnés par

$$\chi_{D \otimes_S D}(g) = \frac{1}{2}[\chi_D^2(g) + \chi_D(g^2)], \quad \chi_{D \otimes_A D}(g) = \frac{1}{2}[\chi_D^2(g) - \chi_D(g^2)]. \quad (5.24)$$

- 5.3 Dans S_4 , réduire le produit $D_3 \otimes D'_3$ en représentations irréductibles.
- 5.4 Soit D une représentation unitaire, et D^* sa complexe conjuguée (dont les matrices sont les matrices $D^*(g)$). Montrer que le sous-espace de dimension 1 généré par $\sum_i e_i \otimes e_i$ est invariant sous la représentation produit $D \otimes D^*$, et se transforme de façon triviale.
- 5.5 Soient D_1, D_2, D_3 trois représentations irréductibles d'un groupe fini. Montrer que la réduction du produit $D_1 \otimes D_2$ contient D_3 si et seulement si la réduction de $D_1^* \otimes D_3$ contient D_2 . En déduire la condition nécessaire que

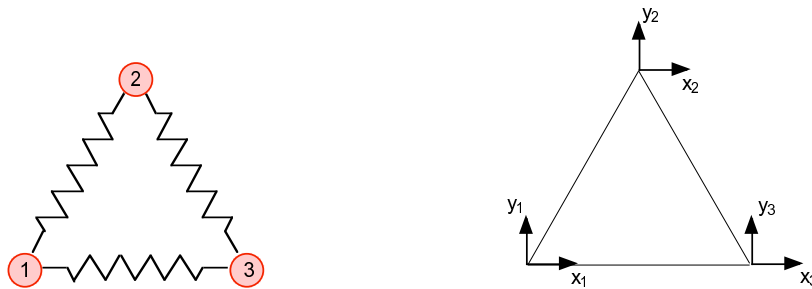
$$\dim D_3 \geq \max\left(\frac{\dim D_1}{\dim D_2}, \frac{\dim D_2}{\dim D_1}\right). \quad (5.25)$$

- 5.6 Nous avons vu que dans S_3 , le produit tensoriel $D_2 \otimes D_2$ contient toutes les représentations irréductibles. On peut généraliser cette question à n'importe quel groupe de la manière suivante: existe-t-il une représentation irréductible D telle que les puissances tensorielles $D^{\otimes m}$ contiennent toutes les représentations irréductibles ? Si la réponse à cette première question est négative, on pourrait demander quel nombre minimal de représentations D_1, \dots, D_k irréductibles distinctes faut-il prendre pour que leurs produits tensoriels multiples contiennent toutes les irréductibles ? Examiner cette question pour S_4 .

EXPLOITER LES SYMÉTRIES

Il est sans doute temps maintenant de voir comment les concepts et techniques vus dans les sections précédentes peuvent être mis à profit dans des situations particulières: dans une situation physique concrète, quelles sont les conséquences d'une symétrie, et inversement, comment utiliser la symétrie pour obtenir des informations pratiques ?

Nous illustrerons cela dans un exemple mécanique simple, qui a l'avantage de bien se prêter à cette analyse. Il s'agit d'un système de trois masses égales, reliées entre elles par des ressorts de même constante de rappel κ , et de sorte qu'à l'équilibre, les trois masses soient placées aux trois sommets d'un triangle équilatéral. Les masses se meuvent dans le plan contenant le triangle. Sous ces conditions, le système est clairement invariant sous le groupe de symétrie du triangle, le groupe de permutations S_3 . C'est donc le groupe de symétrie du problème.



Les positions des trois masses, chacune par rapport à sa position d'équilibre, sont repérées par des coordonnées planaires $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ et $\vec{r}_3 = (x_3, y_3)$, comme indiqué sur la figure ci-dessus. Les équations du mouvement s'écrivent simplement

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \kappa(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \kappa(\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \quad (6.1)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = \kappa(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \kappa(\vec{r}_3 - \vec{r}_2), \quad (6.2)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_3 = \kappa(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \kappa(\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \quad (6.3)$$

Posant $\vec{z} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, ces trois équations peuvent se réécrire comme une seule équation vectorielle à six composantes,

$$\ddot{\vec{z}} = K \vec{z}, \quad \text{avec} \quad K = \frac{\kappa}{m} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Comment le groupe de symétrie agit-il sur les coordonnées des trois masses ? Prenons par l'exemple simple de la transformation a_3 , qui effectue une réflexion par rapport à la droite verticale passant par le point d'équilibre de la masse 2. Il n'est pas difficile de voir que a_3 agit sur les coordonnées en remplaçant $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ par $(-x_3, y_3, -x_2, y_2, -x_1, y_1)$, c'est-à-dire qu'elle agit sur \vec{z} par la matrice

$$D_6(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D^{\text{def}}(a_3) \otimes D_2(a_3), \quad (6.5)$$

où $D^{\text{def}}(a_3)$ est la matrice de la représentation de définition du groupe S_3 (voir l'équation (3.10)), et $D_2(a_3)$ est la matrice de la représentation irréductible de dimension 2 donnée en (5.11). L'apparition du produit tensoriel n'est pas accidentelle, et provient de ce que le vecteur \vec{z} lui-même est clairement un élément du produit tensoriel $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$,

$$\vec{z} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (r_{ai}) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3), \quad (6.6)$$

où a est l'indice pour le numéro des masses, et i celui des coordonnées planaires. La matrice K aussi peut s'écrire comme un produit tensoriel,

$$K = \frac{\kappa}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

De ce point de vue, le groupe agit sur les numéros des masses par permutations, c'est-à-dire par la représentation de définition, et sur les coordonnées par son action géométrique par la représentation D_2 discutée en (5.10) et (5.11). De cela il suit que n'importe quelle transformation de symétrie de S_3 agit sur \vec{z} par une représentation de dimension 6, égale au produit tensoriel de D^{def} et D_2 ,

$$\sigma : \vec{z} \rightarrow D_6(\sigma)\vec{z}, \quad D_6(\sigma) = D^{\text{def}}(\sigma) \otimes D_2(\sigma). \quad (6.8)$$

Ces matrices $D_6(\sigma)$ traduisent l'action de la symétrie, mais au fond, qu'ont-elles de si particulier ? La propriété fondamentale qu'elles possèdent, et qui leur vaut leur titre de symétrie, c'est de commuter avec la matrice K . Grâce à cela, on voit, en les appliquant sur les équations du mouvement (6.4), qu'elles préservent l'espace des solutions: si \vec{z} est une solution de ces équations, alors $D_6(\sigma)\vec{z}$ en est également une, correspondant aux conditions initiales transformées par $D_6(\sigma)$. Exprimé autrement, transformer et puis faire évoluer dans le temps, ou faire évoluer dans le temps et puis transformer donnent toutes les deux le même résultat. C'est bien cela la définition d'une symétrie:

Une transformation de symétrie commute avec l'évolution dynamique du système.

Comment maintenant extraire de l'information de la présence de la symétrie ? Revenons d'abord un instant sur les méthodes généralement utilisées pour résoudre des équations du type de (6.4), et qui ne prennent pas la symétrie en compte.

Une des manières habituelles de résoudre les équations du type (6.4) est d'introduire les modes normaux de vibration. Ceux-ci sont des solutions spéciales des équations du mouvement, pour lesquelles les composantes oscillent de façon synchrone. Un mode normal possède donc la forme $\vec{n}(t) = \vec{v} \cos(\omega t + \varphi)$. Lorsqu'on l'insère dans (6.4), on trouve que \vec{v} doit être un vecteur propre de K , dont la valeur propre λ détermine la fréquence propre par $\lambda = -\omega^2$. Notons que dans le cas d'une fréquence propre nulle, le mode propre s'écrit $\vec{n}(t) = \vec{v} (t + b)$ et décrit un déplacement uniforme dans la direction \vec{v} .

La solution générale s'écrit comme une combinaison linéaire des modes normaux $\vec{z}(t) = \sum_i A_i \vec{v}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. Les données spectrales de K déterminent la forme des modes normaux (les \vec{v}_i) et les fréquences propres correspondantes. Les constantes arbitraires A_i, φ_i (et éventuellement les b_i) sont quant à elles déterminées par les conditions initiales $\vec{z}(0), \dot{\vec{z}}(0)$.

Nous avons vu plus haut que l'espace des solutions des équations du mouvement est laissé invariant par les matrices $D_6(\sigma)$; il constitue donc un espace de représentation pour la représentation D_6 de dimension 6 du groupe S_3 . Sa réduction en représentations irréductibles permet d'identifier des sous-espaces invariants caractérisés par des propriétés de transformation spécifiques sous le groupe de symétrie. Puisque K commute avec la représentation, elle peut être diagonalisée dans chaque sous-espace invariant correspondant à un type donné de représentation irréductible, ce qui fournit des modes normaux avec des propriétés de symétrie bien précises. Inversement, l'étude des sous-espaces invariants permet d'identifier ces modes normaux. Comme nous le verrons plus loin, cette identification peut être ambiguë lorsqu'une représentation irréductible apparaît plusieurs fois dans la réduction. Une information supplémentaire est alors nécessaire pour compléter l'identification des modes normaux.

Commençons par réduire la représentation $D_6 = D^{\text{def}} \otimes D_2$. Les caractères de D^{def} et de D_2 étant connus, $\chi_2 = (2, 0, -1)$ et $\chi^{\text{def}} = (3, 1, 0)$, on tire immédiatement, par produit, celui de D_6 ,

$$\chi_6 = (6, 0, 0). \quad (6.9)$$

C'est le caractère de la représentation régulière de S_3 , ce qui implique que D_6 est équivalente à la représentation régulière. On en tire immédiatement sa réduction en irréductibles (voir l'exercice 4.4):

$$D_6 = D_1 \oplus D'_1 \oplus D_2 \oplus D_2. \quad (6.10)$$

Il s'agit maintenant d'identifier les sous-espaces invariants correspondants. Nous pouvons pour cela recourir aux projecteurs P_i introduits au chapitre 4.

Le projecteur P_1 qui projette sur le sous-espace qui se transforme selon la représentation triviale

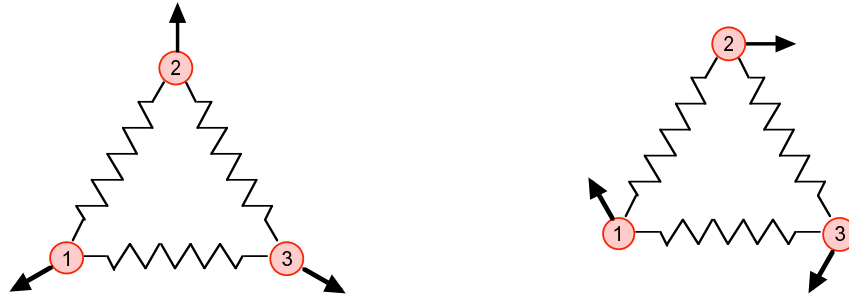
D_1 , vaut

$$P_1 = \frac{1}{6} \sum_{\sigma} D_6(\sigma) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & -2 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{3} & -2 & 0 & 4 & 2\sqrt{3} & -2 \\ -3 & -\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & -2 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Puisque P_1 est de rang 1, il doit s'écrire comme $P_1 = |\vec{v}_1\rangle\langle\vec{v}_1|$ pour un certain vecteur \vec{v}_1 de norme 1. On trouve facilement

$$\vec{v}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right). \quad (6.12)$$

Physiquement, cette solution correspond à un mode normal dans lequel les masses oscillent le long des trois vecteurs sortants, comme indiqué sur la partie gauche de la figure ci-dessous. Ce mode est invariant sous le groupe de symétrie, et appartient donc bien à la représentation triviale.



Le projecteur P'_1 sur le sous-espace se transformant selon la représentation alternée D'_1 , de dimension 1 également, s'écrit

$$P'_1 = \frac{1}{6} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) D_6(\sigma) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -2 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & 2\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -2 & 2\sqrt{3} & 4 & 0 & -2 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & -2 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Comme pour P_1 , on trouve que $P'_1 = |\vec{v}_2\rangle\langle\vec{v}_2|$ avec

$$\vec{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2} \right). \quad (6.14)$$

Les directions selon lesquelles les masses se déplacent sont indiquées par les vecteurs sur la figure droite ci-dessus. La configuration des trois vecteurs est invariante sous les rotations (e, a_4, a_5), et s'inversent lorsqu'on applique les réflexions (a_1, a_2, a_3), confirmant que ce mode se transforme

sous S_3 dans la représentation alternée. Contrairement aux apparences, ce mode n'est pas un mode de rotation.

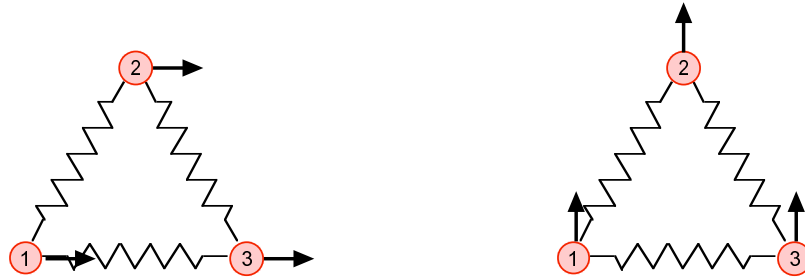
Il reste à identifier quatre modes normaux, répartis en deux paires, les deux modes constituant chaque paire se transformant l'un dans l'autre selon une représentation irréductible de dimension 2. L'une des deux paires se trouve facilement, grâce à l'observation suivante. Puisque $D_6 = D^{\text{def}} \otimes D_2$ et que la décomposition de la représentation de définition de S_3 se décompose en $D^{\text{def}} = D_1 \oplus D_2$, on a

$$D_6 = [D_1 \oplus D_2] \otimes D_2 = [D_1 \otimes D_2] \oplus [D_2 \otimes D_2] = D_2 \oplus [D_2 \otimes D_2]. \quad (6.15)$$

Par conséquent, la direction dans \mathbb{R}^3 invariante sous D^{def} tensorisée avec \mathbb{R}^2 se transforme selon D_2 . Revoyant l'équation (6.6), on voit que la direction invariante sous D^{def} est celle pour laquelle les coordonnées des trois masses sont les mêmes, $\vec{z} = (\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$. Une base de cet espace est donné par les deux modes normaux suivants:

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \vec{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 0, 1, 0, 1). \quad (6.16)$$

Puisque les coordonnées des trois masses sont identiques, elles se meuvent simultanément dans la même direction, c'est-à-dire que tout le système est translaté en bloc, sans que les ressorts ne soient étirés ou comprimés. La fréquence propre de ces deux modes doit donc être nulle. Effectivement, puisque K agit sur \vec{z} par $K\vec{z} = (-2\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3, \vec{r}_1 - 2\vec{r}_2 + \vec{r}_3, \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)$, on a bien que $K\vec{v}_3 = K\vec{v}_4 = 0$. Les deux modes \vec{v}_3 et \vec{v}_4 correspondent respectivement à une translation horizontale et verticale, comme représentés ci-dessous.



Finalement pour les deux derniers modes \vec{v}_5 et \vec{v}_6 , on peut procéder comme ceci. Le projecteur P_2 projette sur le sous-espace de dimension 4 sous-tendu par les quatre modes $\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6$, alors que $T \equiv |\vec{v}_3\rangle\langle\vec{v}_3| + |\vec{v}_4\rangle\langle\vec{v}_4|$ projette sur le sous-espace sous-tendu par \vec{v}_3 et \vec{v}_4 . Par conséquent la différence

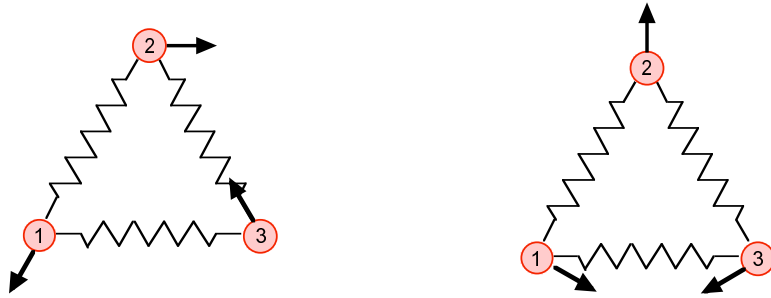
$$\begin{aligned} P_2 - T &= \frac{1}{3}[2D(e) - D(a_4) - D(a_5)] - T \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 4 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 4 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 4 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 2 & -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

est un projecteur sur le dernier sous-espace que nous recherchons. En le faisant agir, par exemple, sur $(0, 0, \sqrt{3}, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, \sqrt{3}, 0, 0)$ fournit deux vecteurs linéairement indépendants, à savoir

$$\vec{v}_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \right), \quad \vec{v}_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right). \quad (6.18)$$

Ces deux modes sont représentés graphiquement dans la figure ci-dessous.



Nous avons ainsi déterminé explicitement tous les modes normaux de notre système mécanique, en utilisant uniquement des arguments de symétries et de groupes (ce qui n'est pas la méthode la plus rapide dans ce cas !). Par contre nous n'avons pas pu déterminer les fréquences propres, sauf pour les modes \vec{v}_3 et \vec{v}_4 , que nous avons reconnus comme étant des modes de translation, de fréquence nulle. Un calcul explicite montre que les quatre autres fréquences sont égales,

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_5 = \omega_6 = \sqrt{\frac{3\kappa}{m}}, \quad \omega_3 = \omega_4 = 0. \quad (6.19)$$

Les résultats que l'on vient d'obtenir dans le cas du triangle sont typiques, et peuvent se formuler de façon générale. Dans une situation générique, un groupe de symétrie agit par une représentation $D(g)$, et commute avec un opérateur H qui définit l'évolution temporelle. Dans l'exemple plus haut, H était la matrice K , alors qu'en mécanique quantique, H est le Hamiltonien, qui génère l'évolution temporelle. Dans ce dernier cas, H et la représentation agissent dans un espace de Hilbert. On a donc les relations de commutation

$$[H, D(g)] = 0, \quad \forall g \in G. \quad (6.20)$$

On supposera de plus que H est un opérateur (ou une matrice) diagonalisable, et que D est une représentation complètement réductible.

Notons par λ les valeurs propres de H , et par V_λ les espaces propres correspondants. Les relations de commutation ci-dessus montrent que les V_λ sont tous des sous-espaces invariants pour la représentation $D(g)$: si \vec{v} est vecteur propre de H , alors $D(g)\vec{v}$ l'est aussi, de même valeur propre. Par conséquent, si l'on décompose l'espace entier comme la somme directe des espaces propres V_λ , la représentation D est diagonale par blocs, $D = \oplus_\lambda D_\lambda$. Puisqu'elle est complètement réductible, chaque D_λ peut s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles, $D_\lambda = \oplus_i m_{\lambda,i} D_i$ via le choix approprié d'une base de V_λ . On en déduit que l'on peut toujours choisir les états propres de H pour qu'ils se transforment dans une représentation irréductible du groupe de symétrie.

Inversément, supposons que l'on réduise d'abord D en irréductibles, $D = \oplus_i m_i D_i$ sans faire attention aux états propres de H . L'espace tout entier se décompose alors selon $V = \oplus_i m_i V_i$, où V_i est l'espace de représentation de D_i . A nouveau les relations de commutation montrent que les éléments des sous-espaces V_i et HV_i se transforment de la même façon sous le groupe de symétrie, c'est-à-dire selon le même *type* de représentation D_i . Si D_i apparaît plus d'une fois ($m_i > 1$), alors V_i et HV_i ne sont pas nécessairement identiques, de sorte H ne laisse pas nécessairement chaque sous-espace irréductible V_i invariant. (Selon l'argument plus haut, on peut cependant choisir les sous-espaces V_i pour que cela soit le cas.) Par contre, si une représentation irréductible n'apparaît qu'une seule fois, $m_i = 1$, on doit avoir $HV_i = V_i$ et donc H laisse le sous-espace V_i invariant. On en tire que la restriction de H à V_i commute avec D_i , et donc, puisque D_i est irréductible, qu'elle doit être proportionnelle à l'identité (par le corollaire 4.1). On en conclut que tous les vecteurs d'un espace de représentation irréductible non-dégénérée sont des états propres de H de même valeur propre.

Dans l'exemple mécanique traité plus haut, on a eu la chance, dans notre décomposition, de trouver directement les vecteurs \vec{v}_3, \vec{v}_4 , qui s'avèrent être des vecteurs propres de K . En étant moins chanceux, au lieu de \vec{v}_3, \vec{v}_4 , on aurait pu trouver par exemple les deux combinaisons $\vec{v}_3 + \vec{v}_5$ et $\vec{v}_4 + \vec{v}_6$. Celles-ci ne sont pas des vecteurs propres de K , mais par contre se transforment exactement comme \vec{v}_3 et \vec{v}_4 . La théorie des groupes seule ne permet pas de faire le "bon" choix de représentations irréductibles lorsque certaines d'entre elles apparaissent plusieurs fois dans la réduction de D . Une information supplémentaire, extérieure, est dans ce cas nécessaire.

De manière générale, on voit que la présence d'une symétrie implique nécessairement des dégénérescences dans le spectre de H (sauf si toutes les représentations irréductibles qui apparaissent dans le problème sont de dimension 1). Inversément, des dégénérescences dans le spectre de H est souvent, mais pas toujours, la marque d'une symétrie ...

Résumons les conclusions importantes de ce chapitre.

Les transformations de symétrie commutent avec la dynamique du système. Le groupe de symétrie G agit dans l'espace des coordonnées physiques par une représentation $D(g)$ qui commute avec le générateur H de l'évolution temporelle, $[H, D(g)] = 0$. On peut toujours choisir des vecteurs propres de H qui se transforment dans des représentations irréductibles de G . Si la réduction de D fait apparaître une représentation irréductible une seule fois, alors tous les vecteurs dans l'espace de cette représentation sont des états propres de H , de même valeur propre.

EXERCICE

- 6.1 Répéter l'analyse ci-dessus dans le cas d'un système de quatre masses identiques, reliées par quatre ressorts identiques, de telle sorte qu'à l'équilibre, elles forment un carré. Le groupe de symétrie est le groupe diédral D_4 , d'ordre 8 (voir chapitre 1). Montrer que ce groupe possède cinq classes de conjugaison, et donc cinq représentations irréductibles, quatre de dimension un, et une de dimension deux. Calculer les caractères irréductibles. Identifier ensuite les modes normaux.

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE PERMUTATIONS

Les groupes de permutations forment une classe de groupes, assez rare, pour lesquels tout ce que l'on peut désirer savoir des représentations est calculable systématiquement, même algorithmiquement. Dans tous les cas, les diagrammes de Young jouent un rôle fondamental dans le calcul des représentations et des caractères, et mènent à des recettes qui permettent d'effectuer les calculs efficacement. Puisque le nombre de représentations irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison, elles-mêmes représentées graphiquement par les diagrammes de Young, il s'ensuit que ces mêmes diagrammes peuvent être utilisés pour désigner les représentations irréductibles, et c'est ce que nous ferons.

Commençons par les représentations elles-mêmes, c'est-à-dire les matrices. Nous savons que la représentation régulière contient toutes les représentations irréductibles, et chacune d'elles avec une multiplicité égale à leur dimension (voir exercice 4.4). La réduction complète de la représentation régulière donne donc accès à toutes les représentations irréductibles.

Par définition de la représentation régulière, les vecteurs de base de l'espace de représentation peuvent se voir comme le résultat de l'action de la représentation régulière sur l'un d'eux, par exemple $|e\rangle$, puisque $|\sigma\rangle = D^{\text{reg}}(\sigma)|e\rangle$. La réduction de la représentation régulière consistera à définir des combinaisons linéaires des $D^{\text{reg}}(\sigma)|e\rangle$, de telle sorte qu'elles génèrent un sous-espace invariant, sur lequel l'action de la représentation régulière se réduit à une représentation irréductible.

C'est ici que les diagrammes de Young de S_n interviennent: chacun d'eux permet de trouver, mécaniquement, les combinaisons linéaires appropriées. Voici comment on procède. S'étant choisi un diagramme Y , on le remplit des nombres de 1 à n , de toutes les façons possibles. On obtient ainsi $n!$ diagrammes de Young "chiffrés" (nous verrons dans un moment que nous ne devons pas les considérer tous). Pour chaque diagramme chiffré, on définit deux ensembles de permutations H_Y et V_Y (des sous-groupes de S_n): H_Y contient toutes les permutations des nombres à l'intérieur des lignes, et de même V_Y effectue les permutations des nombres à l'intérieur des colonnes. En termes de H_Y et V_Y , on forme le symétriseur et l'antisymétriseur associés au diagramme Y ,

$$s_Y = \sum_{\sigma \in H_Y} D^{\text{reg}}(\sigma), \quad a_Y = \sum_{\sigma \in V_Y} \epsilon(\sigma) D^{\text{reg}}(\sigma). \quad (7.1)$$

On considère ensuite la combinaison particulière des vecteurs de base donnée par $|v\rangle = a_Y s_Y |e\rangle$. Finalement l'action de la représentation régulière sur ce vecteur engendre un sous-espace invariant irréductible.

L'exemple de S_3 suffira à illustrer la procédure. Les trois représentations irréductibles seront associées aux trois diagrammes de Young à trois boîtes.

La représentation régulière de S_3 agit sur six vecteurs de base, que nous noterons $|e\rangle$, $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|a_3\rangle$, $|a_4\rangle$ et $|a_5\rangle$, avec la correspondance $a_1 = (3)(12)$, $a_2 = (1)(23)$ et $a_3 = (2)(13)$ les trois transpositions, et $a_4 = (123)$ et $a_5 = (132)$ les deux permutations cycliques.

Commençons par le diagramme $\square\square\square$. Il ne comporte qu'une seule ligne, de sorte que quelle que soit la façon dont on le remplit des chiffres 1, 2 et 3, on aura toujours $H_Y = S_3$ et $V_Y = \{e\}$. Les six diagrammes chiffrés donnent donc tous le même résultat, et on peut se limiter à n'en considérer qu'un seul, par exemple $\square\square\square$. Ensuite, on forme le vecteur

$$|v_s\rangle = \sum_{\sigma \in S_3} D^{\text{reg}}(\sigma)|e\rangle = |e\rangle + |a_1\rangle + |a_2\rangle + |a_3\rangle + |a_4\rangle + |a_5\rangle. \quad (7.2)$$

Il est manifestement invariant sous l'action de la représentation régulière, puisque celle-ci ne fait que permuter les vecteurs de base. Par conséquent, on a

$$D^{\text{reg}}(\sigma)|v_s\rangle = |v_s\rangle, \quad (7.3)$$

qui montre clairement que $|v_s\rangle$ génère un sous-espace vectoriel de dimension 1, invariant sous l'action de la représentation régulière, laquelle s'y réduit à la représentation triviale, $D_1(\sigma) = 1$. On trouve ainsi que la représentation irréductible triviale est associée, à travers cette construction, au diagramme à une ligne.

La construction associée au diagramme à une seule colonne est très semblable. A nouveau tous les diagrammes chiffrés donnent le même résultat, avec cette fois $H_Y = \{e\}$ et $V_Y = S_3$ dans tous les cas. On trouve le vecteur

$$|v_a\rangle = \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(\sigma) D^{\text{reg}}(\sigma)|e\rangle = |e\rangle - |a_1\rangle - |a_2\rangle - |a_3\rangle + |a_4\rangle + |a_5\rangle. \quad (7.4)$$

Il n'est plus invariant sous l'action de la représentation régulière, mais se reproduit à un signe près,

$$D^{\text{reg}}(\sigma)|v_a\rangle = \epsilon(\sigma)|v_a\rangle. \quad (7.5)$$

Il engendre donc un sous-espace invariant de dimension 1, dans lequel la représentation régulière agit par la représentation alternée $D'_1(\sigma) = \epsilon(\sigma)$.

Le troisième et dernier diagramme à considérer contient une ligne et une colonne. Comme le symétriseur et l'antisymétriseur sont tous deux non-triviaux, tous les diagrammes chiffrés ne donnent pas le même résultat. Considérons d'abord le diagramme chiffré $\begin{array}{|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$, pour lequel on trouve $H_Y = \{e, a_1\}$ et $V_Y = \{e, a_3\}$. Notre vecteur de départ s'écrit donc

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= a_Y s_Y |e\rangle = [D^{\text{reg}}(e) - D^{\text{reg}}(a_3)][D^{\text{reg}}(e) + D^{\text{reg}}(a_1)]|e\rangle \\ &= |e\rangle + |a_1\rangle - |a_3\rangle - |a_4\rangle. \end{aligned} \quad (7.6)$$

La procédure générale nous indique d'agir sur ce vecteur avec les matrices de la représentation régulière, ce qui est facile avec la table de multiplication (pour rappel, une entrée dans le tableau

est le résultat de la composition de l'élément indiquant la ligne par l'élément indiquant la colonne, dans cet ordre)

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	e	a_4	a_5	a_2	a_3
a_2	a_2	a_5	e	a_4	a_3	a_1
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_1	a_2	a_5	e
a_5	a_5	a_2	a_3	a_1	e	a_4

En calculant l'action des six matrices de la représentation régulière sur $|v_1\rangle$, on s'aperçoit qu'elle fait apparaître un second vecteur linéairement indépendant $|v_2\rangle$,

$$D^{\text{reg}}(e)|v_1\rangle = |e\rangle + |a_1\rangle - |a_3\rangle - |a_4\rangle = |v_1\rangle, \quad (7.7)$$

$$D^{\text{reg}}(a_1)|v_1\rangle = |a_1\rangle + |e\rangle - |a_5\rangle - |a_2\rangle \equiv |v_2\rangle, \quad (7.8)$$

$$D^{\text{reg}}(a_2)|v_1\rangle = |a_2\rangle + |a_5\rangle - |a_4\rangle - |a_3\rangle = |v_1\rangle - |v_2\rangle, \quad (7.9)$$

$$D^{\text{reg}}(a_3)|v_1\rangle = |a_3\rangle + |a_4\rangle - |e\rangle - |a_1\rangle = -|v_1\rangle, \quad (7.10)$$

$$D^{\text{reg}}(a_4)|v_1\rangle = |a_4\rangle + |a_3\rangle - |a_2\rangle - |a_5\rangle = -|v_1\rangle + |v_2\rangle, \quad (7.11)$$

$$D^{\text{reg}}(a_5)|v_1\rangle = |a_5\rangle + |a_2\rangle - |a_1\rangle - |e\rangle = -|v_2\rangle. \quad (7.12)$$

Puisque $|v_2\rangle = D^{\text{reg}}(a_1)|v_1\rangle$, il est clair que le résultat de l'action des six matrices sur $|v_2\rangle$ s'exprime bien comme combinaisons linéaires de $|v_1\rangle$ et $|v_2\rangle$. Explicitement, on a

$$D^{\text{reg}}(e)|v_2\rangle = |v_2\rangle, \quad D^{\text{reg}}(a_1)|v_2\rangle = |v_1\rangle, \quad D^{\text{reg}}(a_2)|v_2\rangle = -|v_2\rangle, \quad (7.13)$$

$$D^{\text{reg}}(a_3)|v_2\rangle = -|v_1\rangle + |v_2\rangle, \quad D^{\text{reg}}(a_4)|v_2\rangle = -|v_1\rangle, \quad D^{\text{reg}}(a_5)|v_2\rangle = |v_1\rangle - |v_2\rangle. \quad (7.14)$$

Ces deux vecteurs engendrent donc un sous-espace invariant de dimension 2, dans lequel la représentation régulière agit par une représentation D_2 de dimension 2, que les expressions ci-dessus permettent de calculer explicitement. Dans la base $|v_1\rangle, |v_2\rangle$, les six matrices de cette représentation s'écrivent

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

$$D_2(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Elles forment la représentation irréductible de dimension 2 de S_3 , puisque les traces de ces six matrices valent respectivement 2, 0, 0, 0, -1 et -1 , en accord avec le caractère de cette représentation, calculé au chapitre 4. Ces matrices ne sont pas unitaires, mais sont équivalentes à la représentation unitaire donnée en (5.10) et (5.11).

La même construction appliquée au diagramme chiffré $\begin{smallmatrix} 113 \\ 2 \end{smallmatrix}$ est semblable mais donne des résultats légèrement différents. On trouve $H_Y = \{e, a_3\}$ et $V_Y = \{e, a_1\}$, et un premier vecteur de départ

$$|v_3\rangle = |e\rangle + |a_3\rangle - |a_1\rangle - |a_5\rangle. \quad (7.17)$$

Comme ci-dessus l'action des matrices de la représentation régulière fait apparaître un second vecteur indépendant, que l'on peut choisir par exemple comme étant

$$|v_4\rangle \equiv D^{\text{reg}}(a_2)|v_3\rangle = |a_2\rangle + |a_4\rangle - |a_5\rangle - |a_1\rangle. \quad (7.18)$$

Ces deux vecteurs engendrent un nouveau sous-espace invariant de dimension 2. La restriction à ce sous-espace de la représentation régulière définit une seconde copie de la représentation irréductible D_2 .

Puisque l'ensemble des six vecteurs $|v_s\rangle, |v_a\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, |v_4\rangle$ engendrent l'espace de représentation de départ, les quatre sous-espaces invariants identifiés à l'aide des diagrammes de Young chiffrés fournissent la réduction complète de la représentation régulière,

$$D^{\text{reg}} = D_1 \oplus D'_1 \oplus D_2 \oplus D_2. \quad (7.19)$$

Les quatre diagrammes chiffrés que l'on n'a pas considérés n'amènent rien de nouveau.

La construction est totalement générale. On peut montrer que des diagrammes chiffrés correspondant à des diagrammes de Young distincts (de forme différente) mènent à des représentations irréductibles inéquivalentes, et que ceux associés à un même diagramme de Young mènent à des représentations équivalentes. De plus, pour obtenir la réduction complète de la représentation régulière, il suffit de considérer les diagrammes chiffrés tels que les nombres sont croissants dans les lignes de gauche à droite, et croissants également dans les colonnes du haut vers le bas. Ces diagrammes chiffrés particuliers sont appelés des diagrammes de Young standards (ou aussi des tableaux de Young). Par exemple, pour la représentation de dimension 2 de S_3 , les deux diagrammes standards sont ceux que nous avons utilisés plus haut, à savoir

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Le nombre de diagrammes standards associés à un diagramme de Young sera noté f_Y .

Par ce que l'on vient de dire, f_Y donne donc la multiplicité avec laquelle la représentation irréductible associée au diagramme de Young Y apparaît dans la réduction de la représentation régulière. Et puisque cette multiplicité est égale à la dimension de la représentation, on en déduit que la dimension de la représentation irréductible associée à un diagramme Y est égale à f_Y .

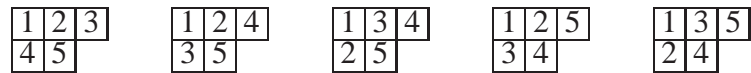
Finalement on notera que la construction produit toujours des matrices de représentation réelles, ce qui implique que toutes les représentations irréductibles des groupes S_n sont réelles (équivalentes à leur complexe conjuguée, et il existe une base où les matrices sont réelles).

Le procédé décrit plus haut a l'avantage d'être constructif, mais il reste très fastidieux. Pour le diagramme suivant de S_5 par exemple,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

le groupe H_Y est d'ordre 12, V_Y est d'ordre 4, et le produit $a_Y s_Y$ contient une somme alternée de $12 \cdot 4 = 48$ permutations. Le procédé, pour ce diagramme, construit $120 = 5!$ combinaisons linéaires $D^{\text{reg}}(\sigma)a_Y s_Y|e\rangle$, chacune contenant 48 vecteurs de base. Ces 120 combinaisons sont toutes exprimables comme combinaisons linéaires de 5 vecteurs indépendants, qui génèrent l'espace de

représentation d'une représentation irréductible de dimension 5 ! Effectivement, pour la représentation de S_5 correspondant au diagramme ci-dessus, les seuls diagrammes standards sont



La liste des diagrammes standards associés à un diagramme donné de S_n permet d'effectuer la réduction de la représentation associée de S_n restreinte à S_{n-1} . On peut en effet observer que lorsqu'on supprime le nombre n des diagrammes standards de S_n , on trouve un ensemble de diagrammes standards pour S_{n-1} , qui s'organisent en diagrammes standards associés à des diagrammes de Young de S_{n-1} .

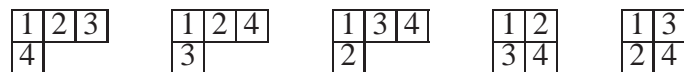
Ainsi par exemple, si on retire le 3 des deux diagrammes standards de la représentation de dimension 2 de S_3 (voir ci-dessus), on trouve les deux diagrammes standards



Le premier est le seul diagramme standard associé au diagramme $\square\square$, et le second est le seul associé au diagramme $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$. On trouve ainsi la réduction

$$\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \Big|_{S_2} = \square\square \oplus \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$$

Dans l'autre exemple ci-dessus, on retire le 5 des diagrammes standards de la représentation de dimension 5 de S_5 pour trouver cinq diagrammes standards de S_4 :

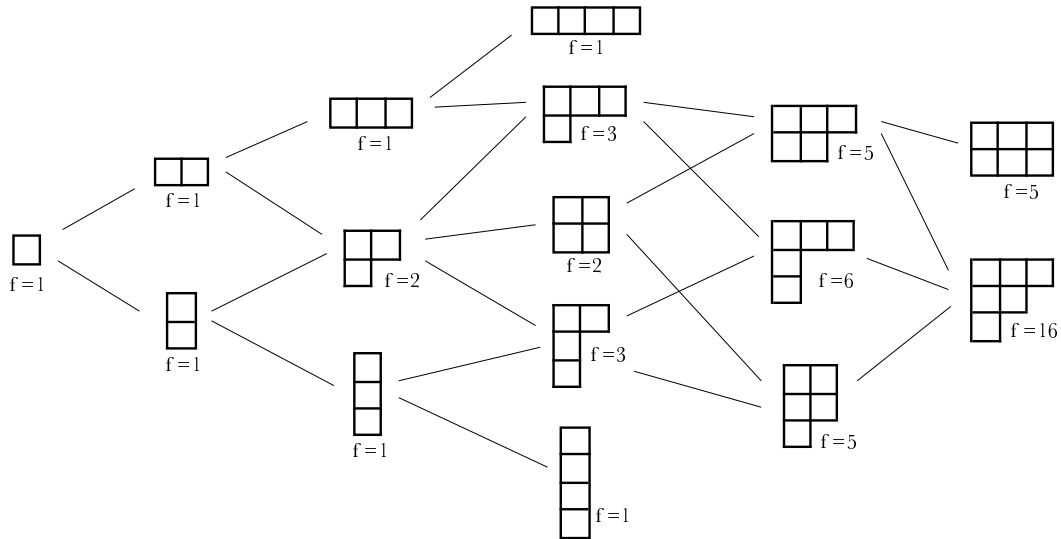


Les trois premiers sont les diagrammes standards associés au diagramme $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$, et les deux autres correspondent au diagramme $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$. On a donc la réduction d'une représentation de dimension 5 de S_5 en la somme directe de deux représentations de S_4 , de dimension 2 et 3:

$$\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \Big|_{S_4} = \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$$

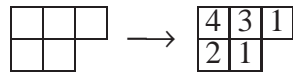
Procédant de même pour les autres représentations, on trouve le tableau ci-dessous, donnant la réduction des représentations irréductibles de S_n en représentations irréductibles de $S_{m < n}$. On s'aperçoit ainsi que la réduction de S_n à S_{n-1} s'opère en retirant une boîte du diagramme de S_n de toutes les façons possibles, mais de telle sorte que le résultat soit encore un diagramme de Young. De plus, les représentations de S_{n-1} ainsi obtenues apparaissent toutes avec multiplicité 1.

Les propriétés que l'on vient de mentionner permettent de calculer la dimension de la représentation associée à un diagramme de Young quelconque, mais le calcul explicite reste laborieux. La première méthode consistait à énumérer les diagrammes standards associés à un diagramme de Young donné; l'énumération peut se révéler fastidieuse, et on pourrait facilement en oublier quelques-uns. Une autre méthode serait de "remonter" le tableau des réductions successives de S_n à S_{n-1} , mais là aussi, on doit passer par de nombreuses étapes intermédiaires. Mais la magie



des diagrammes de Young (re)commence à opérer: la règle des équerres (hook formula) fournit un moyen rapide et explicite de calculer la dimension de la représentation associée à n'importe quel diagramme de Young.

Soit donc Y un diagramme de Young de S_n . Pour chaque boîte i du diagramme, on calcule le nombre ℓ_i des boîtes traversées par l'équerre dont l'angle droit est centré sur la boîte i et dont les deux côtés perpendiculaires partent vers la droite et vers le bas de la boîte. L'entier ℓ_i (hook length) est donc égal au nombre de boîtes du diagramme situées à la droite de la boîte de référence, additionnée du nombre de boîtes situées en-dessous de la boîte de référence, additionnée de 1 (pour la boîte de référence elle-même). Dans l'exemple rencontré plus haut du diagramme de S_5 , les nombres à droite indiquent les valeurs des entiers ℓ_i pour chaque boîte:



La règle des équerres affirme que la dimension de la représentation associée à Y vaut simplement $n!$ divisé par le produit des équerres,

$$f_Y = \frac{n!}{\prod_i \ell_i}. \quad \text{(Formule des équerres)} \quad (7.20)$$

Dans l'exemple ci-dessus, on trouve $f_Y = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5$, comme annoncée plus tôt ! Un autre exemple, pour S_{15} , est le suivant:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 7 & 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 1 & & \\ \hline 2 & 1 & & & \\ \hline \end{array} \quad f_Y = \frac{15!}{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 193050, \quad (7.21)$$

un nombre que l'on aurait sans doute eu du mal à calculer par l'une des deux méthodes citées plus haut !

Il est facile de vérifier que la règle des équerres donne $f_Y = 1$ pour les deux diagrammes constitués d'une seule ligne (la représentation triviale) ou d'une seule colonne (la représentation alternée). Il s'agit d'un cas particulier d'un fait plus général: la règle des équerres donne la même dimension aux deux diagrammes de Young "conjugués" Y et Y^t , transposés l'un de l'autre (les lignes et les colonnes sont échangées). Les représentations irréductibles correspondantes, également appelées conjuguées, sont exactement celles qui sont obtenues l'une de l'autre par la multiplication par la représentation alternée:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \sim D_Y(\sigma) \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \sim D_{Y^t}(\sigma) = \epsilon(\sigma) D_Y(\sigma).$$

(Attention deux représentations conjuguées de cette manière ne sont pas les complexes conjugués l'une de l'autre.)

On en tire immédiatement le corollaire suivant: un diagramme de Young symétrique, $Y = Y^t$, correspond à une représentation auto-conjuguée, équivalente à sa multiplication par la représentation alternée. Le caractère d'une telle représentation s'annule sur toutes les classes constituées de permutations impaires:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} = Y^t \iff D_Y \sim \epsilon \otimes D_Y, \quad \chi_Y(g_\alpha) = 0 \text{ pour } \epsilon(g_\alpha) = -1. \quad (7.22)$$

Nous terminerons ce chapitre en mentionnant un autre coup de baguette magique des diagrammes de Young (il y en a d'autres !): le calcul des caractères irréductibles. Supposons que l'on veuille calculer la valeur d'un caractère irréductible $\chi_Y(g_\alpha)$ sur une classe g_α . Rappelons-nous qu'une classe g_α de S_n est associée à une partition de n , ou à une structure en cycles de longueurs j_1, j_2, \dots (chaque cycle est d'ailleurs représenté par une colonne du diagramme de Young correspondant à la classe g_α).

Pour calculer $\chi_Y(g_\alpha)$, on commence par calculer les longueurs des équerres $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ des boîtes de la première colonne de Y (supposé contenir m lignes), que l'on range dans un symbole $|\ell_1 \ell_2 \dots \ell_m|$. On appellera un tel symbole un déterminant (pour des raisons historiques). Avec le premier cycle de longueur j_1 , on forme la somme des déterminants

$$|(\ell_1 - j_1) \ell_2 \dots \ell_m| + |\ell_1 (\ell_2 - j_1) \dots \ell_m| + \dots + |\ell_1 \ell_2 \dots \ell_{m-1} (\ell_m - j_1)|, \quad (7.23)$$

de laquelle on élimine ceux qui ont deux entiers identiques, et ceux qui possèdent un entier négatif. Pour chaque déterminant restant dans cette somme, on effectue la même opération de soustraction avec le deuxième cycle de longueur j_2 , et ainsi de suite pour tous les cycles de g_α . Après que tous les cycles aient été utilisés, on obtiendra une somme de déterminants, chacun contenant exactement les entiers $0, 1, 2, \dots, m-1$ dans un ordre quelconque, c'est-à-dire que chacun de ces déterminants sera de la forme $|i_1 i_2 \dots i_m|$ avec $(i_1, i_2, \dots, i_m) = \sigma(m-1, m-2, \dots, 1, 0)$ pour une certaine permutation σ de S_m . Chaque déterminant de ce type reçoit la valeur de la parité de σ , $|i_1 i_2 \dots i_m| = \epsilon(\sigma)$, et la valeur du caractère $\chi_Y(g_\alpha)$ vaut la somme des valeurs des déterminants ainsi obtenus !

Prenons l'exemple de la représentation de dimension 2 de S_3 , associée à $Y = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$. Le déterminant de départ s'écrit $|3\ 1|$.

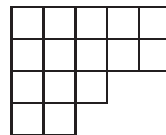
$$\begin{aligned}
 g_\alpha &= (1)(1)(1) : |3\ 1| \\
 &\quad (1)(1) : |2\ 1| + |3\ 0| \\
 &\quad (1) : 2 \cdot |2\ 0| \\
 &\quad \quad 2 \cdot |1\ 0| = 2 \quad \longrightarrow \quad \chi_Y(g_\alpha) = 2
 \end{aligned}
 \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned}
 g_\alpha &= (2)(1) : |3\ 1| \\
 &\quad (1) : 0 \quad \longrightarrow \quad \chi_Y(g_\alpha) = 0
 \end{aligned}
 \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
 g_\alpha &= (3) : |3\ 1| \\
 &\quad : |0\ 1| = -1 \quad \longrightarrow \quad \chi_Y(g_\alpha) = -1
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

On a retrouvé le caractère $\chi = (2, 0, -1)$ de la représentation de dimension 2 de S_3 ...

Calculons également, pour le plaisir, le caractère de la représentation de dimension 193050 associée au diagramme de S_{15} mentionné plus haut, sur la classe de conjugaison $g_\alpha = (5)(3)(3)(2)(2)$ (un cycle de longueur 5, deux de longueur 3 et deux de longueur 2). Le diagramme de Young de la représentation en question est



de sorte que le déterminant de départ vaut $|8\ 7\ 4\ 2|$. On obtient:

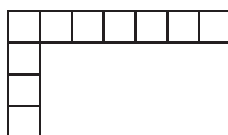
$$\begin{aligned}
 (5)(3)(3)(2)(2) &: |8\ 7\ 4\ 2| \\
 (3)(3)(2)(2) &: |3\ 7\ 4\ 2| \\
 (3)(2)(2) &: |0\ 7\ 4\ 2| + |3\ 7\ 1\ 2| \\
 (2)(2) &: 2 \cdot |0\ 7\ 1\ 2| + |3\ 4\ 1\ 2| \\
 (2) &: 2 \cdot |0\ 5\ 1\ 2| + |3\ 4\ 1\ 0| \\
 &: 2 \cdot |0\ 3\ 1\ 2| + |3\ 2\ 1\ 0| = 2 \cdot (+1) + (+1) = 3,
 \end{aligned}
 \tag{7.27}$$

et donc $\chi_Y(g_\alpha) = 3$.

On notera que cette règle implique immédiatement que les caractères irréductibles des groupes de permutations sont tous des entiers.

EXERCICES

- 7.1 Dans la construction des représentations de S_3 détaillée plus haut, calculer explicitement les matrices de la représentation obtenue à partir du diagramme chiffré $\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, et montrer qu'il s'agit bien de la représentation irréductible D_2 .
- 7.2 Montrer que la réduction du produit tensoriel $D_Y \otimes D_{Y'}$ de deux représentations irréductibles de S_n contient la représentation triviale si et seulement si $Y' = Y$, et qu'elle contient la représentation alternée si et seulement si $Y' = Y^t$. (Utiliser le fait que les caractères irréductibles sont réels.)
- 7.3 Utiliser la règle des déterminants pour recalculer le caractère de la représentation de dimension 2 de S_4 (diagramme $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$). Comparer avec le résultat du chapitre 4.
- 7.4 Soit $g_\alpha = (n)$ la classe de conjugaison de S_n constituée d'un seul cycle de longueur n . Utiliser la règle des déterminants pour montrer que les seules représentations irréductibles de S_n pour lesquelles $\chi_Y(g_\alpha)$ est non-nul correspondent aux diagrammes Y en forme d'équerre



Si $s + 1$ désigne le nombre de boîtes de la première colonne, montrer que $\chi_Y(g_\alpha) = (-1)^s$.

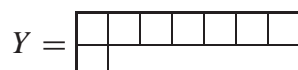
- 7.5 Nous avons calculé à la section 4.4 la réduction de la représentation de définition de S_4 en deux représentations irréductibles. Généraliser ce calcul à S_n et montrer que la réduction est donnée par

$$D_n^{\text{def}} = D_1 \oplus D_{n-1}, \tag{7.28}$$

où D_1 est la représentation triviale, et D_{n-1} est irréductible de dimension $n - 1$. Son caractère vaut donc

$$\chi_{n-1}(g) = \#\{\text{objets laissés fixes par } g\} - 1. \tag{7.29}$$

Noter que cette représentation irréductible D_{n-1} n'est pas auto-conjuguée (sauf dans S_3), ce qui permet d'en obtenir une seconde, $D'_{n-1} = \epsilon \otimes D_{n-1}$. En se servant du résultat de l'exercice 7.4, montrer que la représentation D_{n-1} correspond au diagramme de Young Y de S_n contenant $n - 1$ colonnes (et donc deux lignes):



GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Les groupes de Lie dépendent de paramètres continus. Par rapport à leurs analogues discrets, ils peuvent sembler plus compliqués puisqu'ils possèdent un nombre infini non-dénombrable d'éléments, ce qui peut amener une série de difficultés techniques. Par contre, ils se prêtent aux méthodes différentielles, et cela amène des simplifications considérables. Commençons par un exemple particulièrement simple, mais éclairant.

8.1 LE GROUPE ABÉLIEN $SO(2)$

Le groupe des rotations en deux dimensions est abélien, et dépend d'un seul paramètre continu, à savoir un angle φ qui varie entre 0 et 2π . Il possède une représentation unitaire de dimension deux, bien connue puisque c'est sa représentation de définition (ou représentation fondamentale):

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

La loi de composition de deux rotations est respectée par la représentation puisque celle-ci satisfait $D(\varphi)D(\psi) = D(\varphi + \psi \bmod 2\pi)$.

Une rotation d'angle φ peut s'obtenir comme une succession de n rotations d'angle φ/n , et la même chose est vraie pour la représentation, $D(\varphi) = [D(\varphi/n)]^n$. Lorsque n tend vers l'infini, une rotation quelconque se ramène à une succession de rotations infinitésimales, d'angle φ/n , dont la représentation vaut

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\varphi}{n}\right) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{n} & -\sin \frac{\varphi}{n} \\ \sin \frac{\varphi}{n} & \cos \frac{\varphi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dots & -\frac{\varphi}{n} + \dots \\ \frac{\varphi}{n} + \dots & 1 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{I} + i \frac{\varphi}{n} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \dots \equiv \mathbb{I} + i \frac{\varphi}{n} T + \dots, \end{aligned} \quad (8.2)$$

avec la matrice hermitienne $T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = T^\dagger$.

Prenant la puissance n de cette rotation infinitésimale, et de la représentation correspondante, on obtient

$$D(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbb{I} + i \frac{\varphi}{n} T + \dots \right]^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} T^k \equiv \exp(i\varphi T). \quad (8.3)$$

Même si il est exprimé ici dans la situation particulièrement simple d'un groupe abélien à un seul paramètre, ce résultat est central de ce chapitre: la représentation d'un élément de groupe

s'exprime comme l'exponentielle d'une matrice décrivant une transformation infinitésimale, c'est-à-dire toute proche l'identité (l'élément neutre). Autrement dit, la représentation d'un élément quelconque du groupe est l'exponentielle de la représentation associée à un élément arbitrairement proche de l'élément neutre ! Bien entendu, la forme exponentielle $D(\varphi) = \exp(i\varphi T)$ ne doit pas nous surprendre puisqu'elle reproduit une loi de groupe additive (et donc abélienne), même si T est une matrice.

Pour s'assurer que l'on reproduit la représentation matricielle de départ, on peut calculer l'exponentielle explicitement en observant que $T^2 = \mathbb{I}$, et donc $T^{2k+1} = T$ et $T^{2k} = \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} \mathbb{I} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} T = \mathbb{I} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i T \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \mathbb{I} \cos \varphi + i T \sin \varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

La représentation $D(g)$ est donc entièrement déterminée par la matrice T et la valeur du paramètre correspondant à g . T est assez logiquement appelé le générateur infinitésimal, puisqu'il décrit le premier ordre non-trivial d'une transformation infinitésimale, c'est-à-dire le terme linéaire dans le développement de Taylor de $D(\varphi)$:

$$T = -i \frac{d}{d\varphi} D(\varphi) \Big|_{\varphi=0}. \quad (8.5)$$

Notons que si l'on choisit pour T le nombre 0 (matrice de dimension 1), la formule $D(\varphi) = e^{i\varphi T}$ fournit la représentation triviale $D(\varphi) = 1$ de dimension 1. De façon plus générale, on peut prendre $T = m$ pour m un entier, positif ou négatif, ce qui amène une famille de représentations non-triviales $D_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ de dimension 1, toutes inéquivalentes.

N'importe quelle matrice T cependant ne donne pas lieu à une représentation puisque la loi de groupe impose $D(2\pi) = \mathbb{I}$. Cette contrainte est d'origine topologique: elle traduit le fait que la représentation doit respecter la topologie du groupe $SO(2)$, qui est celle d'un cercle.

8.2 EXPONENTIELLE ET GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX

Ce que l'on vient de faire pour un groupe abélien à un paramètre se généralise à un groupe continu, abélien ou non, et dépendant d'un certain nombre de paramètres t_1, t_2, \dots . Un élément quelconque du groupe sera repéré par les valeurs de ces paramètres, $g = g(t_1, t_2, \dots)$. Nous supposons que les paramètres sont choisis de telle sorte que l'élément neutre corresponde à $t_a = 0$, c'est-à-dire $g(0, 0, \dots) = e$.

Considérons une représentation du groupe, $D(t) = D(g(t))$, que l'on suppose suffisamment régulière dans les paramètres t_a . On a bien sûr $D(t = 0) = \mathbb{I}$. Pour t fixé, $D(t)$ est une matrice dont les coefficients sont des fonctions régulières des variables t_a . Supposons que son développement de Taylor donne au premier ordre (terme linéaire)

$$D(t) = \mathbb{I} + i t_1 T^1 + i t_2 T^2 + \dots + \mathcal{O}(t_a t_b) = \mathbb{I} + i \sum_{a=1}^{\dim G} t_a T^a + \dots \quad (8.6)$$

où les T^a sont certaines matrices numériques, toutes distinctes, en nombre égal à la dimension de groupe. Elles dépendent naturellement de la représentation choisie.

Supposons d'abord que l'on mette tous les paramètres t_i à zéro, sauf l'un d'entre eux, disons t_1 . Alors la forme infinitésimale

$$D(t_1, 0, \dots, 0) = \mathbb{I} + i t_1 T^1 + \dots, \quad t_1 \sim 0, \quad (8.7)$$

correspond à une transformation infinitésimale “dans la direction t_1 ”. L'itération de la forme infinitésimale nous permet de calculer $D(t_1)$ pour des valeurs croissantes du paramètre le long de la courbe $\vec{t} = (t_1, 0, 0, \dots, 0)$. Localement, cette courbe correspond à un sous-groupe abélien (la loi de groupe est l'addition du paramètre t_1), de sorte que l'on se retrouve dans la situation de la section précédente. On en conclut que, pour des valeurs finies de t_1 , la représentation possède la forme $D(t_1, 0, \dots, 0) = \exp(it_1 T^1)$.

Le même raisonnement s'applique à n'importe laquelle des autres directions indépendantes, qui définissent autant de sous-groupes abéliens, et nous donne

$$D(\dots, 0, t_a, 0, \dots) = \exp(it_a T^a). \quad (8.8)$$

Considérons maintenant un élément générique du groupe $g(t_1, t_2, \dots)$. Le vecteur de paramètres \vec{t} définit une direction \hat{t} et une norme:

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots) = |\vec{t}| \cdot \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = |\vec{t}| \cdot \hat{t}. \quad (8.9)$$

On peut ainsi voir l'élément du groupe correspondant $g(\vec{t})$ comme se trouvant dans la direction \hat{t} au départ de l'élément neutre, et à une “distance” $|\vec{t}|$ de celui-ci. L'ensemble des éléments du groupe qui sont dans cette direction, c'est-à-dire ceux associés à des valeurs de paramètres qui ont même direction \hat{t} (au signe près), forment un sous-groupe abélien à un paramètre, la valeur de $|\vec{t}|$. Lorsque ce paramètre est infinitésimal, la forme infinitésimale (8.6) donne

$$D(t) = \mathbb{I} + i|\vec{t}|X + \dots, \quad |\vec{t}| \sim 0, \quad (8.10)$$

avec $X = \sum_a \hat{t}_a T^a$. Le même argument développé plus haut pour les directions élémentaires \hat{e}_a s'applique à la direction \hat{t} . Il s'ensuit que $D(t)$ possède la forme exponentielle pour des valeurs finies de $|\vec{t}|$,

$$D(t) = \exp(i|\vec{t}|X) = \exp\left(i \sum_a t_a T^a\right). \quad (8.11)$$

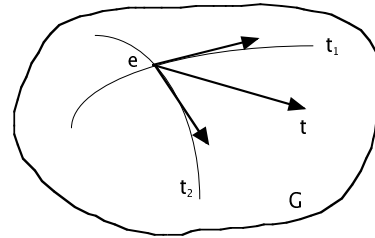
Ce résultat est capital: il relie une représentation d'un groupe de Lie, un objet complexe dépendant de paramètres t_a qui se composent de façon généralement très compliquée (voir plus loin), à un nombre fini de matrices numériques, qui spécifient l'action de la représentation au voisinage de l'identité. Il permet de passer du local au global, d'exprimer une transformation finie en termes d'une transformation infinitésimale.

Les matrices T^a sont appelées les **générateurs infinitésimaux** du groupe dans la représentation D , puisqu'elles spécifient l'action de $D(g)$ pour des éléments du groupe proches de l'élément neutre. On peut voir T^a comme le générateur infinitésimal dans la direction a ,

$$T^a = -i \frac{\partial}{\partial t_a} D(t) \Big|_{t=0}. \quad (8.12)$$

La combinaison $\sum_a \hat{t}_a T^a$ apparaît alors comme le générateur infinitésimal dans une direction mixte, combinaison des directions élémentaires pondérées par les valeurs des coordonnées t^a .

Géométriquement, la situation serait celle de la figure ci-contre (si G n'a que deux directions indépendantes). Les directions tangentées à l'élément neutre, $\frac{\partial}{\partial t_a}$, sont représentées par les générateurs T^a , dans l'espace de représentation. Elles engendrent le plan tangent à l'élément neutre, et l'algèbre de Lie dans l'espace de représentation.



Remplacer un ensemble de matrices T^a par un autre, c'est passer d'une représentation à une autre: *les représentations d'un groupe de Lie sont entièrement spécifiées par des ensembles de matrices T^a , qui donnent les représentations possibles des générateurs infinitésimaux du groupe.*

Le problème des représentations d'un groupe de Lie se trouve ainsi ramené au problème des représentations possibles des générateurs infinitésimaux. Bien sûr, n'importe quel ensemble de matrices T^a ne convient pas. La condition la plus évidente est qu'elles doivent être telles que les matrices $D(t)$ constituent bien une représentation du groupe choisi. Une seconde condition, plus subtile, est que les matrices T^a soient telles que les matrices $\exp(i \sum_a t_a T^a)$ respectent la topologie du groupe, comme cela a été illustré plus haut dans le cas de $SO(2)$.

Nous n'examinerons que la première condition, de nature purement algébrique, ce qui nous mènera directement à la notion d'algèbre de Lie. A une exception près, nous ne nous occuperons pas de la seconde condition, qui implique pourtant des contraintes supplémentaires sur les matrices T^a (sauf pour la classe des groupes de Lie "simplement connexes"). La question qui est au coeur de cette deuxième condition est la suivante: de quel groupe exactement obtient-on une représentation lorsqu'on exponentie une représentation des générateurs infinitésimaux qui satisfait la première condition? C'est une question de nature topologique, plus délicate à aborder. Nous n'y répondrons que dans un cas particulier, celui de $SO(3)$, le groupe des rotations en trois dimensions.

8.3 ALGÈBRES DE LIE

La forme exponentielle des représentations repose de manière essentielle sur le fait qu'un élément quelconque du groupe (dans un voisinage approprié de l'élément neutre) peut s'obtenir par compositions de déplacements infinitésimaux sur la variété de groupe. Cela implique une propriété similaire au niveau des représentations, et permet de calculer $D(t)$ en composant des transformations infinitésimales. Pour cela, il faut que les générateurs infinitésimaux T^a soient tels que la composition des transformations infinitésimales soit bien celle du groupe, et que le résultat $D(t)$ soit effectivement une représentation.

Peut-on expliciter les conditions que doivent satisfaire les générateurs ? Puisque ce sont eux qui assurent que la composition des transformations infinitésimales est bien celle dictée par le groupe, les conditions qu'ils doivent satisfaire doivent être reliées à la loi de composition du groupe.

Précisément, sous l'hypothèse que les générateurs aient les bonnes propriétés, la forme exponentielle $D(t) = \exp(i \sum_a t_a T^a)$ est une représentation, mais le fait que c'en est une est loin d'être manifeste ! En effet, il faut que le produit d'exponentielles de combinaisons de générateurs soit encore l'exponentielle d'une combinaison de générateurs ... Remarquons aussi que si c'est le cas, la loi de composition du groupe est complètement fixée.

Supposons donc que la loi de composition s'écrive $g(t)g(u) = g(v)$ où $v_a = v_a(t, u)$ sont des fonctions, généralement compliquées, de t et u . Ces fonctions $v_a(t, u)$ sont réellement la loi de composition du groupe (dans la paramétrisation choisie) puisqu'elles expriment la manière dont l'élément de paramètre t se compose avec celui du paramètre u pour donner celui du paramètre v .

Par exemple, le groupe des translations et dilatations agit sur la droite réelle par: $x \rightarrow e^{t_2}x + t_1$, avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la composition donne

$$g(t)g(u)x = g(t)[e^{u_2}x + u_1] = e^{t_2}[e^{u_2}x + u_1] + t_1, \quad (8.13)$$

de sorte que $v_1 = t_1 + e^{t_2}u_1$ et $v_2 = t_2 + u_2$.

Comparons maintenant avec la composition des représentations dans la forme exponentielle:

$$\exp(i \sum_a v_a T^a) \stackrel{?}{=} \exp(i \sum_a t_a T^a) \exp(i \sum_a u_a T^a). \quad (8.14)$$

Examinons cette identité en ne retenant que les termes d'ordre 2 au plus. Pour la facilité d'écriture, posons $A = t_a T^a$, $B = u_a T^a$ et $C = v_a T^a$. On trouve, en négligeant tous les termes d'ordre 3,

$$\begin{aligned} e^{iC} &= D(v) = D(t)D(u) = e^{iA} e^{iB} = \left(\mathbb{I} + iA - \frac{1}{2}A^2 + \dots \right) \left(\mathbb{I} + iB - \frac{1}{2}B^2 + \dots \right) \\ &= \mathbb{I} + i(A + B) - \frac{1}{2}(A + B)^2 - \frac{1}{2}[A, B] + \dots \\ &= \exp \left(i(A + B) - \frac{1}{2}[A, B] + \dots \right), \end{aligned} \quad (8.15)$$

et dès lors,

$$C = A + B + \frac{i}{2}[A, B] + \dots = \sum_c (t_c + u_c)T^c + \frac{i}{2} \sum_{a,b} t_a u_b [T^a, T^b] + \dots \quad (8.16)$$

Puisque C doit être une combinaison linéaire des générateurs, et cela pour toutes les valeurs de \vec{t} et \vec{u} , il faut que les commutateurs $[T^a, T^b]$ soient eux-mêmes des combinaisons linéaires des

générateurs. On doit donc avoir

$$[T^a, T^b] = \sum_c i f_{abc} T^c, \quad (8.17)$$

pour $f_{abc} = -f_{bac}$ des nombres (en général complexes) que l'on appelle **constantes de structure**. De plus, la relation (8.16) fixe la loi de composition à l'ordre 2,

$$v_c = t_c + u_c - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{abc} t_a u_b + \dots \quad (8.18)$$

Nous obtenons ainsi que la forme exponentielle de la représentation est consistante avec la composition, à l'ordre 2, si les générateurs infinitésimaux se reproduisent sous commutation, c'est-à-dire qu'ils forment une algèbre. De plus les constantes de structure de cette algèbre fixent la loi de composition du groupe, ou inversement, dépendant du point de vue que l'on adopte, la loi de composition détermine les constantes de structure et donc l'algèbre des générateurs.

L'algèbre satisfaite par les générateurs est l'**algèbre de Lie** du groupe. Elle est la traduction, au niveau infinitésimal, de la loi de composition du groupe, et constitue donc une caractéristique intrinsèque du groupe. En particulier,

quelle que soit la représentation $D(g)$ que l'on choisit, les matrices associées T^a doivent toujours satisfaire la même algèbre.

L'algèbre de Lie d'un groupe est un espace vectoriel. En effet, si A et B sont dans l'algèbre de Lie, il existe deux éléments du groupe dont les formes infinitésimales valent respectivement $\mathbb{I} + iA$ et $\mathbb{I} + iB$. Et dans ce cas, αA et βB y sont aussi, quels que soient les réels α et β , ainsi que leur somme $\alpha A + \beta B$. Dans cet espace vectoriel, un ensemble concret de générateurs T^a forme une base particulière. Un changement de base $T^a \rightarrow L_{ab} T^b$ s'effectue par une transformation linéaire L et correspond à choisir les directions tangentes indépendantes différemment. Ce changement de base dans l'algèbre de Lie s'accompagne d'une transformation opposée des paramètres, $t_a \rightarrow L_{ab}^{-1} t_b$.

Qu'en est-il aux ordres supérieurs? Obtient-on d'autres contraintes sur les générateurs? La réponse est remarquable: les ordres supérieurs n'apportent aucune nouvelle contrainte sur les générateurs! Le fait que les générateurs satisfont l'algèbre de Lie du groupe assure que le produit $D(t)D(u)$ a la forme exponentielle attendue, et fixe la loi de composition du groupe, à tous les ordres. Vérifions cela à l'ordre 3.

En fait, la seule chose à vérifier est que l'écriture exponentielle $e^{iC} = e^{iA} e^{iB}$ est consistante: si A et B sont des combinaisons linéaires des générateurs, alors C l'est également. Si c'est le cas, les coefficients v_a dans C sont automatiquement fixés:

$$v_a(t, u) = -i \log \left(e^{iA} e^{iB} \right) \Big|_{T^a}. \quad (8.19)$$

La seule contrainte non-triviale est donc que la matrice $C = -i \log \left(e^{iA} e^{iB} \right)$ est une combinaison

des générateurs. Poussant le calcul ci-dessus à l'ordre 3 dans les paramètres t, u , on trouve

$$C = A + B + \frac{i}{2}[A, B] - \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] + \dots \quad (8.20)$$

Par la propriété d'algèbre des T^a , c'est bien une combinaison linéaire des générateurs. L'identification des coefficients de la combinaison linéaire fixe la loi de composition à l'ordre 3:

$$v_a = t_a + u_a - \frac{1}{2} \sum_{b,c} f_{bca} t_b u_c - \frac{1}{12} \sum_{b,c,d,e} f_{bcd} f_{dea} t_b u_c (t_e - u_e) + \dots \quad (8.21)$$

De même tous les ordres supérieurs s'expriment en termes de commutateurs multiples, qui se réécrivent comme combinaisons linéaires des T^a . La série (8.20), complète à tous les ordres, s'appelle la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Notons que si toutes les constantes de structure sont nulles, la loi de composition est additive, $v_a = t_a + u_a$, et donc abélienne. Tous les générateurs commutent, et le groupe correspondant est abélien. Dans ce cas, l'algèbre de Lie elle-même est dite abélienne.

La propriété d'algèbre de Lie est donc essentielle. On a montré qu'il existe une paramétrisation particulière des représentations, et donc du groupe, spécifiée par l'écriture exponentielle $D(g) = e^{i t_a T^a}$ en termes de certaines matrices numériques T^a . La loi de composition du groupe, $v_a = v_a(t, u)$, est complètement encodée dans la structure de l'algèbre des générateurs, $[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c$. La connaissance des fonctions $v_a(t, u)$, du moins dans le voisinage de l'élément neutre, est équivalente à celle des constantes de structure f_{abc} (des nombres !). Un groupe de Lie et son algèbre sont donc en parfaite correspondance (modulo les subtilités topologiques évoquées plus haut), comme le sont les représentations du groupe et celles de l'algèbre associée.

La classification des représentations d'un groupe de Lie donné peut maintenant se faire en deux étapes: (1) identifier l'algèbre de Lie du groupe, c'est-à-dire spécifier l'algèbre que doivent satisfaire les générateurs pour que la loi de composition soit bien celle du groupe donné; (2) chercher toutes les représentations de l'algèbre, c'est-à-dire associer des matrices aux générateurs T^a , de toutes les façons possibles, de telle sorte que ces matrices satisfassent l'algèbre de Lie du groupe.

8.4 PARAMÉTRISATIONS

Nous avons vu que n'importe quelle représentation $D(g(t))$ possède une écriture exponentielle, mais d'autres formes sont possibles. Toutes sont équivalentes à l'écriture exponentielle, via un changement de coordonnées (de paramétrisation), le plus souvent hautement non-linéaire, mais certaines sont plus pratiques.

L'écriture factorisée fournit un exemple d'une telle transformation. Plutôt que d'écrire $D(g(t)) = \exp(i \sum_a t_a T^a)$ sous la forme de l'exponentielle d'une somme, on l'écrit comme un produit d'exponentielles,

$$D(g(t)) = \prod_a e^{i t_a T^a}. \quad (8.22)$$

Cette forme factorisée peut se comprendre comme ceci. La forme exponentielle découlait de ce que la représentation associée à l'élément du groupe \vec{t} pouvait s'obtenir en composant des transformations infinitésimales dans la direction \hat{t} . Mais ce déplacement de l'élément neutre "directement" vers \vec{t} ne représente pas le seul chemin possible reliant les deux points. On peut par exemple composer des déplacements le long des directions élémentaires. L'écriture (8.22) correspond à une telle composition de mouvements, dans un ordre spécifié (n'importe quel ordre convient).

Remarquons que les formes infinitésimales, à l'ordre linéaire, des deux écritures, exponentielle et factorisée, sont les mêmes. L'une ou l'autre peut donc être utilisée pour calculer l'algèbre du groupe. La forme factorisée est cependant plus commode puisqu'il suffit de connaître suffisamment de transformations élémentaires indépendantes.

Une utilisation itérative de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff permet de réécrire le produit (8.22) sous la forme d'une seule exponentielle $\exp(it'_a T^a)$, où les coefficients $t'_a = t'_a(t)$ sont des fonctions généralement compliquées mais inversibles des coordonnées t . Ainsi à l'ordre quadratique, on trouve

$$\begin{aligned}
D(g(t)) &= \prod_a e^{it_a T^a} = \prod_a \left(\mathbb{I} + it_a T^a - \frac{1}{2} t_a^2 (T^a)^2 + \dots \right) \\
&= \mathbb{I} + i \sum_a t_a T^a - \frac{1}{2} \sum_a (t_a T^a)^2 - \sum_{a < b} t_a t_b T^a T^b + \dots \\
&= \mathbb{I} + i \sum_a t_a T^a - \frac{1}{2} \left(\sum_a t_a T^a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{a < b} t_a t_b [T^a, T^b] + \dots \\
&= \exp \left\{ i \sum_c \left(t_c - \frac{1}{2} \sum_{a < b} f_{abc} t_a t_b \right) T^c + \dots \right\} \tag{8.23}
\end{aligned}$$

et donc les nouveaux paramètres

$$t'_c = t_c - \frac{1}{2} \sum_{a < b} f_{abc} t_a t_b + \dots \tag{8.24}$$

La loi de composition des paramètres t' est celle de la section précédente, c'est-à-dire

$$v'_c = t'_c + u'_c - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{abc} t'_a u'_b + \dots \tag{8.25}$$

et implique que dans la paramétrisation t , elle devient

$$v_c = t_c + u_c + \sum_{a < b} f_{abc} u_a t_b + \dots \tag{8.26}$$

Cette paramétrisation factorisée est également utile lorsque l'on connaît les représentations de transformations élémentaires $e^{it_a T^a}$ (sans sommation sur a). En effectuant le produit des matrices, on obtient la représentation d'un élément général du groupe, plus facilement que si l'on doit

calculer l'exponentielle d'une somme de matrices qui ne commutent pas, une tâche généralement impossible à mener jusqu'au bout.

8.5 EXEMPLE 1: LE GROUPE $SU(2)$

Le groupe $SU(2)$ est le groupe dont la loi de composition et celle des matrices 2×2 , unitaires et de déterminant 1. Une telle matrice peut s'écrire, pour $a, b \in \mathbb{C}$,

$$D(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{avec } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Si on écrit les deux nombres complexes sous la forme $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$, la contrainte sur a et b devient $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$. La variété de groupe de $SU(2)$ est donc une sphère dans \mathbb{R}^4 , une variété de dimension 3, compacte. Il est cependant plus commode d'utiliser une paramétrisation en termes de 3 paramètres libres, plutôt que 4 paramètres contraints. Les coordonnées polaires s'imposent d'elles-mêmes.

Remarquons que si \hat{n} est un vecteur sur la sphère de \mathbb{R}^3 , alors $\vec{z} = (\hat{n} \cos \chi, \sin \chi)$ est sur la sphère de \mathbb{R}^4 . Utilisant les coordonnées angulaires habituelles sur la sphère de \mathbb{R}^3 , à savoir la longitude φ et la latitude θ en termes desquelles $\hat{n} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$, on obtient

$$\vec{z} = (\cos \varphi \cos \theta \cos \chi, \sin \varphi \cos \theta \cos \chi, \sin \theta \cos \chi, \sin \chi) \equiv (a_1, a_2, b_1, b_2). \quad (8.27)$$

Par conséquent, on trouve $a = \cos \theta \cos \chi e^{i\varphi}$, $b = \sin \theta \cos \chi + i \sin \chi$, et aussi la représentation de dimension 2 de $SU(2)$, qui définit le groupe lui-même:

$$D(\varphi, \theta, \chi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \chi e^{i\varphi} & \sin \theta \cos \chi + i \sin \chi \\ -\sin \theta \cos \chi + i \sin \chi & \cos \theta \cos \chi e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Les angles φ et θ varient dans $[0, 2\pi[$ et $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ respectivement, alors que χ varie dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puisque (\hat{n}, χ) et $(-\hat{n}, \pi - \chi)$ correspondent au même point \vec{z} de la sphère. L'élément neutre correspond à $(\varphi, \theta, \chi) = (0, 0, 0)$.

Pour la suite, nous utiliserons les coordonnées $t_1 = \chi$, $t_2 = \theta$ et $t_3 = \varphi$, de sorte que

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos t_1 \cos t_2 e^{it_3} & \cos t_1 \sin t_2 + i \sin t_1 \\ -\cos t_1 \sin t_2 + i \sin t_1 & \cos t_1 \cos t_2 e^{-it_3} \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

Il n'est pas difficile de calculer la loi de composition en effectuant le produit des matrices $D(t)D(u)$ et en identifiant les nouveaux paramètres v de sorte que la matrice résultante soit $D(v)$. On trouve explicitement:

$$\begin{aligned} \sin v_1 &= \cos t_1 \cos t_2 \cos t_3 \sin u_1 + \cos u_1 \cos u_2 \cos u_3 \sin t_1 \\ &\quad + \cos t_1 \cos u_1 [\cos t_2 \sin t_3 \sin u_2 - \cos u_2 \sin u_3 \sin t_2], \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} \cos v_1 \sin v_2 &= -\cos t_1 \cos t_2 \sin t_3 \sin u_1 + \cos u_1 \cos u_2 \sin u_3 \sin t_1 \\ &\quad + \cos t_1 \cos u_1 [\cos t_2 \cos t_3 \sin u_2 + \cos u_2 \cos u_3 \sin t_2], \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} \cos v_1 \cos v_2 e^{iv_3} &= \cos t_1 \cos t_2 \cos u_1 \cos u_2 e^{i(t_3+u_3)} \\ &\quad - (\cos t_1 \sin t_2 + i \sin t_1)(\cos u_1 \sin u_2 - i \sin u_1). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Ces trois relations déterminent univoquement les trois nouveaux paramètres en termes des anciens, et définissent donc la loi de composition du groupe $SU(2)$.

Calculons à présent l'algèbre de $SU(2)$. On peut le faire en utilisant la représentation de dimension 2 ci-dessus, ou en utilisant la loi de composition abstraite du groupe, indépendante de toute représentation (mais obtenue à partir de l'une d'entre elles). Commençons par la première méthode.

Pour cela, il suffit de développer en série des trois paramètres t_a la matrice $D(t)$, à l'ordre linéaire, et d'identifier les matrices T^a de dimension 2 qui sont les coefficients des trois termes d'ordre 1. Ces matrices dépendent bien entendu de la représentation de départ, mais leurs relations de commutation n'en dépendent pas et fournissent l'algèbre de groupe.

Nous trouvons

$$D(t) = \begin{pmatrix} 1 + it_3 + \dots & it_1 + t_2 + \dots \\ it_1 - t_2 + \dots & 1 - it_3 + \dots \end{pmatrix} = \mathbb{I} + i \sum_{a=1}^3 t_a T^a + \dots \quad (8.33)$$

avec les trois matrices suivantes, appelées matrices de Pauli,

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.34)$$

Le calcul des commutateurs est direct, et donne l'algèbre

$$[T^1, T^2] = 2iT^3, \quad [T^2, T^3] = 2iT^1, \quad [T^3, T^1] = 2iT^2, \quad (8.35)$$

ce que l'on écrit encore sous forme condensée,

$$[T^a, T^b] = 2i\epsilon_{abc}T^c, \quad (8.36)$$

où ϵ_{abc} est totalement antisymétrique, et normalisé de sorte que $\epsilon_{123} = +1$. Les constantes de structure de l'algèbre sont donc égales, dans cette base, à

$$f_{abc} = 2\epsilon_{abc}. \quad (8.37)$$

On notera que les trois matrices T^a sont hermitiennes de trace nulle, et qu'elles génèrent l'espace vectoriel de telles matrices (n'importe quelle matrice 2×2 , hermitienne et de trace nulle, est une combinaison linéaire des matrices de Pauli). Nous pouvons donc caractériser l'algèbre de $SU(2)$, de façon abstraite (sans faire référence à une base particulière), comme l'algèbre des matrices 2×2 , hermitiennes et de trace nulle.

Le calcul de l'algèbre (des constantes de structure) peut également se faire en développant la loi de composition, à l'ordre 2 cette fois. Un calcul direct donne

$$v_1 = t_1 + u_1 + t_2u_2 - t_2u_3 + \dots \quad (8.38)$$

$$v_2 = t_2 + u_2 - t_3u_1 + t_1u_3 + \dots \quad (8.39)$$

$$v_3 = t_3 + u_3 - t_1u_2 + t_2u_1 + \dots \quad (8.40)$$

Identifiant ce développement avec $v_c = t_c + u_c - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{abc} t_a u_b$, on obtient que les seules constantes de structure non-nulles sont égales à

$$f_{231} = -f_{321} = 2, \quad f_{312} = -f_{132} = 2, \quad f_{123} = -f_{213} = 2, \quad (8.41)$$

c'est-à-dire le résultat précédent $f_{abc} = 2\epsilon_{abc}$.

Ce calcul de l'algèbre de $SU(2)$ est basé sur la paramétrisation particulière du groupe donnée en (8.29). Est-ce la paramétrisation exponentielle ? La réponse est non, et il faut bien avouer qu'il y avait très peu de chances que cela soit le cas... Pour se convaincre qu'elle n'est en effet pas la paramétrisation exponentielle, il suffit de calculer la loi de composition à l'ordre 3 et vérifier qu'elle ne coïncide pas avec celle obtenue en (8.21) pour la paramétrisation exponentielle. Développant la loi de composition à l'ordre 3, nous trouvons

$$v_1 = t_1 + u_1 + t_3 u_2 - t_2 u_3 - \frac{1}{2} \left[t_1 (u_2^2 + u_3^2) + u_1 (t_2^2 + t_3^2) \right] + \dots \quad (8.42)$$

Le terme d'ordre 3 dans cette expression est différent de l'ordre 3 calculé dans la paramétrisation exponentielle, et donné en (8.21):

$$-\frac{1}{12} \sum_{b,c,d,e} f_{bcd} f_{de1} t_b u_c (t_e - u_e) = \frac{1}{3} (t_1 u_3 - t_3 u_1) + \frac{1}{3} (t_1 u_2 - t_2 u_1) (t_2 - u_2). \quad (8.43)$$

Nous pouvons ainsi conclure que la paramétrisation que nous avons utilisée ici n'est pas la paramétrisation exponentielle, mais coïncide avec elle à l'ordre 2.

En fait, dans le cas particulier de ce groupe, on peut écrire explicitement la représentation de dimension 2 dans une paramétrisation exponentielle. Un choix de coordonnées commode est le suivant, en termes d'un angle ψ et d'un vecteur \hat{n} de \mathbb{R}^3 de norme 1, écrit en coordonnées polaires comme précédemment sous la forme $\hat{n} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$,

$$\begin{aligned} D^{\text{exp}}(\hat{n}, \psi) &= e^{i \frac{\psi}{2} \hat{n} \cdot \vec{T}} = \mathbb{I} \cos \frac{\psi}{2} + i (\hat{n} \cdot \vec{T}) \sin \frac{\psi}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} + i \sin \theta \sin \frac{\psi}{2} & i e^{-i\varphi} \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} \\ i e^{i\varphi} \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \theta \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.44)$$

où les T^a sont les matrices de Pauli données plus haut. Les angles φ et θ prennent leurs valeurs habituelles, $0 \leq \varphi < 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, alors que ψ varie dans $] -2\pi, 2\pi]$. Cependant les paramètres (\hat{n}, ψ) et $(-\hat{n}, -\psi)$ correspondent aux mêmes éléments du groupe, de telle sorte que l'on peut restreindre ψ à l'intervalle fermé $[0, 2\pi]$. De plus, les valeurs des paramètres $(\hat{n}, 0)$ pour n'importe quel \hat{n} définissent le même élément du groupe (l'élément neutre) et doivent être identifiés, et il est en de même pour les valeurs des paramètres $(\hat{n}, 2\pi)$. Si l'on forme avec les paramètres \hat{n} et ψ le vecteur de \mathbb{R}^3 défini par $\vec{x} = \psi \hat{n}$, on obtient que la variété de groupe dans ces coordonnées est une sphère pleine de rayon 2π , dont tous les points de la surface doivent être identifiés.

On peut y définir une mesure d'intégration, c'est-à-dire un élément de volume dans la variété de groupe,

$$dg = \cos \theta \sin^2 \frac{\psi}{2} d\varphi d\theta d\psi. \quad (8.45)$$

Le volume du groupe est alors donné par

$$|SU(2)| = \int dg = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} = 4\pi^2. \quad (8.46)$$

L'intégration normalisée $\frac{1}{4\pi^2} \int dg$ est l'équivalent continu de la somme normalisée $\frac{1}{|G|} \sum_g$ utilisée précédemment pour un groupe fini (notamment dans les relations d'orthogonalité des caractères).

8.6 EXEMPLE 2: LE GROUPE $SO(3)$

Le groupe des rotations en trois dimensions dépend de trois paramètres. N'importe quelle rotation dans \mathbb{R}^3 est spécifiée par un vecteur unitaire \hat{n} (qui détermine l'axe de rotation) et un angle de rotation ψ autour de cet axe. Du fait que (\hat{n}, ψ) et $(-\hat{n}, -\psi)$ spécifient la même rotation, on peut restreindre ψ entre 0 et π en identifiant (\hat{n}, π) et $(-\hat{n}, \pi)$ (puisque $\pi = -\pi \pmod{2\pi}$). Une rotation quelconque pourra ainsi être repérée par un vecteur $\vec{x} = \psi \hat{n}$ de \mathbb{R}^3 , de direction \hat{n} et de norme ψ . La variété de groupe de $SO(3)$, dans ces coordonnées, est donc une sphère pleine dans \mathbb{R}^3 , de rayon π , dont les points de la surface diamétralement opposés doivent être identifiés, $(\hat{n}, \pi) \sim (-\hat{n}, \pi)$. Cette identification introduit une structure topologique non-triviale.

$SO(3)$ est aussi le groupe des matrices 3×3 , orthogonales de déterminant 1. On pourrait calculer une paramétrisation de ces matrices et ensuite l'algèbre de $SO(3)$ à partir de la représentation de dimension 3 ainsi obtenue, comme on l'a fait pour $SU(2)$.

Pour changer, et pour illustrer les propos de la section 4, nous pouvons partir de la représentation associée aux trois sous-groupes à un paramètre indépendants que sont les rotations autour de l'axe \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} . Ces trois sous-groupes sont clairement représentés par

$$D_x(t_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t_1 & \sin t_1 \\ 0 & -\sin t_1 & \cos t_1 \end{pmatrix}, \quad D_y(t_2) = \begin{pmatrix} \cos t_2 & 0 & -\sin t_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t_2 & 0 & \cos t_2 \end{pmatrix}, \quad (8.47)$$

$$D_z(t_3) = \begin{pmatrix} \cos t_3 & \sin t_3 & 0 \\ -\sin t_3 & \cos t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.48)$$

D'après la section 1, ces trois matrices peuvent s'écrire respectivement sous la forme $e^{it_1 J_1}$, $e^{it_2 J_2}$ et $e^{it_3 J_3}$. Puisque l'écriture factorisée de la représentation est identique à l'écriture exponentielle à l'ordre linéaire,

$$\begin{aligned} D_x(t_1)D_y(t_2)D_z(t_3) &= (\mathbb{I} + it_1 J_1 + \dots)(\mathbb{I} + it_2 J_2 + \dots)(\mathbb{I} + it_3 J_3 + \dots) \\ &= (\mathbb{I} + it_1 J_1 + it_2 J_2 + it_3 J_3 + \dots) = \exp \left\{ \sum_a it_a J_a + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

on peut utiliser les trois sous-groupes indépendants pour calculer l'algèbre de $SO(3)$. Des trois matrices ci-dessus, on trouve facilement les trois générateurs

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.50)$$

que l'on peut d'ailleurs écrire $(J_k)_{ij} = -i\epsilon_{kij}$. Le calcul des commutateurs est immédiat, et donne

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c. \quad (8.51)$$

Il s'ensuit que les générateurs $(2J_a)$ satisfont la même algèbre que celle de $SU(2)$. Puisqu'il existe une base de l'algèbre de $SO(3)$ dans laquelle les constantes de structure sont les mêmes que celles de l'algèbre de $SU(2)$, les deux algèbres sont identiques ! Les algèbres étant identiques, les lois de composition de $SU(2)$ et $SO(3)$ coïncident au voisinage de l'élément neutre. Mais les deux groupes sont distincts, comme nous allons le voir, et diffèrent donc par leurs aspects globaux, topologiques.

Observons que les trois matrices 3×3 ci-dessus sont antisymétriques, et que n'importe quelle matrice 3×3 antisymétrique est une combinaison linéaire de celles-là. On peut ainsi caractériser l'algèbre de $SO(3)$ comme l'algèbre de telles matrices.

Terminons en mentionnant qu'une rotation d'angle ψ autour d'un axe \hat{n} est représentée dans \mathbb{R}^3 par la matrice de représentation

$$D^{\text{exp}}(\hat{n}, \psi) = e^{i\psi \hat{n} \cdot \vec{J}}. \quad (8.52)$$

De manière générale, cette matrice représente une telle rotation dans \mathbb{R}^d si l'on prend une représentation de dimension d des générateurs \vec{J} .

Pour le voir, il suffit de réaliser que la matrice $\hat{n} \cdot \vec{J} = \hat{n}_1 J_1 + \hat{n}_2 J_2 + \hat{n}_3 J_3$ agissant sur \hat{n} donne identiquement zéro

$$[(\hat{n} \cdot \vec{J})\hat{n}]_i = \sum_k \sum_j \hat{n}_k (J_k)_{ij} \hat{n}_j = 0 \quad (8.53)$$

en raison de l'antisymétrie sous l'échange de k et j , due à la relation $(J_k)_{ij} = -i\epsilon_{kij}$ notée plus haut. Dès lors, la direction spécifiée par \hat{n} est invariante. Comme la seule direction laissée invariante par une rotation est celle de son axe, \hat{n} est bien l'axe de rotation.

Du reste, la relation $(\hat{n} \cdot \vec{J})^3 = \hat{n} \cdot \vec{J}$, valide pour n'importe quel vecteur \hat{n} de norme 1, implique

$$D^{\text{exp}}(\hat{n}, \psi) = \mathbb{I} - (\hat{n} \cdot \vec{J})^2 + (\hat{n} \cdot \vec{J})^2 \cos \psi + i(\hat{n} \cdot \vec{J}) \sin \psi, \quad (8.54)$$

et permet de vérifier que l'action de $e^{i\psi \hat{n} \cdot \vec{J}}$ dans le plan orthogonal à \hat{n} est bien une rotation.

8.7 LA RELATION ENTRE $SU(2)$ ET $SO(3)$

La similarité entre les descriptions de $SU(2)$ et $SO(3)$ est frappante. Les représentations de dimension 2 et 3, qui définissent respectivement les deux groupes, sont données par

$$D_{SU(2)}(\hat{n}, \psi) = e^{i\frac{\psi}{2}\hat{n}\cdot\vec{T}}, \quad D_{SO(3)}(\hat{n}, \psi) = e^{i\psi\hat{n}\cdot\vec{J}}. \quad (8.55)$$

Les générateurs respectifs $\frac{\vec{T}}{2}$ et \vec{J} satisfont exactement la même algèbre, avec des constantes de structure identiques. Il s'ensuit que, localement, les lois de composition sont rigoureusement les mêmes.

L'unique différence réside dans le domaine de variation du paramètre ψ . Lorsque ψ parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$ et que \hat{n} balaie la sphère S^2 , tous les éléments de $SU(2)$ sont obtenus une et une seule fois, alors tous ceux de $SO(3)$ le sont exactement deux fois, en raison de

$$D_{SO(3)}(-\hat{n}, 2\pi - \psi) = D_{SO(3)}(\hat{n}, \psi). \quad (8.56)$$

Par conséquent, il existe une correspondance 2 : 1 entre $SU(2)$ et $SO(3)$: deux éléments de $SU(2)$ sont envoyés sur un même élément de $SO(3)$. Ces deux éléments de $SU(2)$ sont reliés par $-\mathbb{1}$, puisque

$$D_{SU(2)}(-\hat{n}, 2\pi - \psi) = -D_{SU(2)}(\hat{n}, \psi). \quad (8.57)$$

On peut rétablir l'isomorphisme si on identifie deux éléments de $SU(2)$ qui diffèrent par la multiplication par $-\mathbb{1}$, ce qui revient à considérer le groupe quotient $SU(2)/\{\pm\mathbb{1}\}$. On obtient ainsi

$$SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2. \quad (8.58)$$

Au niveau de la variété de groupe de $SU(2)$, le groupe \mathbb{Z}_2 relie les points (\hat{n}, ψ) et $(-\hat{n}, 2\pi - \psi)$. Il relie ainsi la moitié extérieure de la sphère de rayon 2π et la moitié intérieure. A l'interface entre ces deux parties, située à une distance π du centre de la sphère, il relie les points antipodaux de la coquille sphérique. Le résultat du quotient, par lequel on doit identifier les points de la variété de $SU(2)$ qui sont reliés par le groupe \mathbb{Z}_2 , redonne la variété de $SO(3)$, avec les identifications telles que nous les avons trouvées précédemment.

8.8 EXEMPLE 3: LE GROUPE $SU(N)$

Ce groupe, de dimension réelle $N^2 - 1$, possède une loi de composition identique à celle des matrices $N \times N$ unitaires et de déterminant 1. Pour N quelconque, il devient (très) difficile de donner une paramétrisation générale de ces matrices, et donc de la représentation $D(g)$ de dimension N de $SU(N)$ correspondante. La méthode explicite et constructive que l'on a utilisée pour calculer l'algèbre de $SU(2)$ n'est donc plus possible pour $SU(N)$. La méthode suivante s'avère plus directe et plus simple encore.

La représentation $D(g)$ de dimension N qui définit $SU(N)$ est unitaire et de déterminant 1,

$$D^\dagger(g) = D^{-1}(g), \quad \det D(g) = +1, \quad (8.59)$$

et ce sont les deux seules conditions qu'elle doit satisfaire, par définition du groupe. D'autre part, elle s'écrit en termes de générateurs sous la forme exponentielle $D(g) = \exp(it_a T^a)$ pour des matrices $N \times N$ que nous cherchons à caractériser.

En écrivant $D(g) = \exp(i|\vec{t}| \sum_a \hat{t}_a T^a)$, et puisque la matrice $\sum_a \hat{t}_a T^a$ commute avec elle-même, on obtient l'inverse de $D(g)$,

$$D^{-1}(g) = \exp(-i|\vec{t}| \sum_a \hat{t}_a T^a) = \exp(-it_a T^a). \quad (8.60)$$

L'adjoint de $D(g)$ valant simplement $D^\dagger(g) = \exp(-it_a T^{a\dagger})$, la première condition ci-dessus implique $T^{a\dagger} = T^a$, c'est-à-dire les générateurs dans la représentation de définition de $SU(N)$ sont des matrices $N \times N$ hermitiennes.

La seconde condition sur le déterminant implique, en vertu de

$$\det D(g) = \det \exp(it_a T^a) = \exp(it_a \text{Tr} T^a) = +1, \quad (8.61)$$

que les générateurs sont de trace nulle.

On trouve ainsi que l'algèbre de Lie de $SU(N)$ est l'algèbre des matrices $N \times N$ hermitiennes, de trace nulle. Le choix d'une base dans cet espace fournit une base de l'algèbre, et permet de calculer, dans cette base, les constantes de structure de l'algèbre.

EXERCICES

8.1 Montrer que l'associativité de la loi de groupe, $e^{iA}(e^{iB}e^{iC}) = (e^{iA}e^{iB})e^{iC}$, implique, à l'ordre 3 dans les paramètres, l'identité de Jacobi,

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0. \quad (8.62)$$

8.2 Le groupe des translations et dilatations de la droite réelle possède une représentation de dimension 2 donnée par

$$D(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} e^{t_2} & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.63)$$

Calculer l'algèbre de Lie du groupe dans cette représentation, et vérifier que celle-ci est donnée dans une forme factorisée $e^{it_1 T^1} e^{it_2 T^2}$. Calculer ensuite la forme exponentielle et montrer qu'elle est donnée par

$$e^{it'_1 T^1 + it'_2 T^2} = \begin{pmatrix} e^{t'_2} & t'_1(1 - e^{t'_2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.64)$$

En déduire le changement de coordonnées $(t_1, t_2) \longleftrightarrow (t'_1, t'_2)$.

8.3 Vérifier la paramétrisation exponentielle de la représentation de dimension 2 de $SU(2)$ donnée en (8.44). Montrer pour cela que si les T^a sont les trois matrices de Pauli, on a l'identité suivante

$$(\hat{n} \cdot \vec{T})^2 = \mathbb{I}. \quad (8.65)$$

Montrer également que dans cette même paramétrisation, on peut voir la variété de groupe de $SU(2)$ comme l'union de deux sphères dans \mathbb{R}^3 , dont les surfaces doivent être identifiées.

8.4 Considérer la paramétrisation suivante de $SU(2)$ par des matrices 2×2 unitaires et de déterminant 1,

$$D(g(t)) = \begin{pmatrix} e^{it_1} \cos t_2 & -e^{-it_3} \sin t_2 \\ e^{it_3} \sin t_2 & e^{-it_1} \cos t_2 \end{pmatrix}. \quad (8.66)$$

Calculer l'algèbre à partir de cette représentation ? Pour comprendre l'origine du problème, examiner la forme infinitésimale de la représentation (parfaitement acceptable) $D(g(t)) = \exp(it_1 T^1) \exp(it_2 T^3) \exp(it_3 T^1)$.

8.5 Vérifier que la mesure d'intégration dg donnée en (8.45) est invariante sous le groupe, c'est-à-dire sous les changements de coordonnées qui sont des transformations du groupe.

8.6 Vérifier la relation (8.54),

$$e^{i\psi \hat{n} \cdot \vec{J}} = \mathbb{I} - (\hat{n} \cdot \vec{J})^2 + (\hat{n} \cdot \vec{J})^2 \cos \psi + i(\hat{n} \cdot \vec{J}) \sin \psi, \quad (8.67)$$

où les J_i sont les générateurs de $SO(3)$ dans la représentation de dimension 3.

8.7 La représentation suivante donne une paramétrisation du groupe $SL(2; \mathbb{R})$ autour de l'élément neutre,

$$D(g(t)) = \begin{pmatrix} e^{t_3} + t_1 t_2 e^{-t_3} & t_1 e^{-t_3} \\ t_2 e^{-t_3} & e^{-t_3} \end{pmatrix}. \quad (8.68)$$

En tirer l'algèbre de $SL(2; \mathbb{R})$, et la comparer à celle de $SU(2)$.

8.8 Calculer l'algèbre de Lie des groupes $SO(n; \mathbb{R})$ et $SL(n; \mathbb{R})$ en suivant la méthode de la section 8.8.

REPRÉSENTATIONS DE $SU(2)$ ET $SO(3)$

Nous avons calculé au chapitre précédent l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$, d'ailleurs égale à celle du groupe $SO(3)$. Il est traditionnel de la noter

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2, \quad (9.1)$$

c'est-à-dire la forme que l'on avait obtenue pour $SO(3)$. La relation avec la base utilisée pour l'algèbre de $SU(2)$ dans le chapitre précédent s'écrit $J_i = \frac{1}{2}T^i$.

Toutes les représentations du groupe $SU(2)$ s'obtiennent en exponentiant les représentations de l'algèbre, $D(t) = \exp(i \sum_j t_j J_j)$ (la raison technique est que la variété de groupe est simplement connexe). N'importe quelle représentation de dimension finie est équivalente à une représentation unitaire (comme pour les groupes finis; c'est le cas pour les groupes de Lie compacts), et une représentation $D(t) = \exp(i \sum_j t_j J_j)$ est unitaire si les générateurs sont hermitiens. Le problème des représentations unitaires de $SU(2)$ revient donc à classifier toutes les représentations hermitiennes irréductibles inéquivalentes de l'algèbre $su(2)$. Les représentations du groupe $SO(3)$ seront discutées par après.

9.1 LES REPRÉSENTATIONS DE L'ALGÈBRE $SU(2)$

Nous cherchons à représenter les générateurs par des matrices hermitiennes. Etant hermitiennes, elles sont séparément diagonalisables, mais pas simultanément diagonalisables puisqu'elles ne commutent pas. Nous choisirons, suivant la tradition, de diagonaliser la matrice (représentant) $J_3 = J_3^\dagger$. Il s'avère alors judicieux de remplacer J_1 et J_2 par les deux combinaisons J_+ et J_- , définies par

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2. \quad (9.2)$$

Notons que si les matrices J_i sont hermitiennes, J_\pm ne le sont plus mais satisfont $J_+^\dagger = J_-$. Dans cette base, les relations de commutation deviennent

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_3. \quad (9.3)$$

J_3, J_\pm sont donc des matrices agissant dans un espace vectoriel V , et nous devons y calculer leur action de sorte que les relations de commutation soient satisfaites. Nous choisissons d'exprimer cette action dans une base où J_3 est diagonal. Nous supposons aussi que l'espace V supporte une représentation irréductible, de dimension finie.

La base de V que nous avons choisie est constituée de vecteurs propres de J_3 . Une première observation cruciale consiste à remarquer que si $|m\rangle$ est un état propre de J_3 de valeur propre m , $J_3|m\rangle = m|m\rangle$, alors $J_{\pm}|m\rangle$ sont également des états propres de J_3 de valeur propre $m \pm 1$. En effet, on a

$$J_3 J_{\pm}|m\rangle = J_{\pm} J_3|m\rangle + [J_3, J_{\pm}]|m\rangle = m J_{\pm}|m\rangle \pm J_{\pm}|m\rangle = (m \pm 1) J_{\pm}|m\rangle. \quad (9.4)$$

Considérons maintenant dans V le sous-espace propre de valeur propre maximale de J_3 , que nous dénotons par j , et choisissons dans ce sous-espace un vecteur propre $|j\rangle$ de norme 1. La remarque précédente montre que $J_-|j\rangle$ est un état propre de J_3 de valeur propre $j - 1$. Il doit donc exister un vecteur propre de J_3 , de valeur propre $j - 1$ et de norme 1, que nous dénotons par $|j - 1\rangle$, en termes duquel on a $J_-|j\rangle = c_{j-1}|j - 1\rangle$.

De la même manière, le vecteur $J_+|j - 1\rangle$ est un état propre de J_3 , de valeur propre égale à j , qui peut être proportionnel au vecteur $|j\rangle$ de départ, ou à un autre vecteur propre du sous-espace propre de valeur propre j , ou à une combinaison linéaire de tels vecteurs propres. La deuxième observation fondamentale répond à cette question.

Considérons l'opérateur $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. On vérifie directement que J^2 commute avec les trois générateurs, $[J^2, J_i] = 0$. Par exemple

$$\begin{aligned} [J^2, J_1] &= [J_2^2 + J_3^2, J_1] = J_2[J_2, J_1] + [J_2, J_1]J_2 + J_3[J_3, J_1] + [J_3, J_1]J_3 \\ &= -iJ_2J_3 - iJ_3J_2 + iJ_3J_2 + iJ_2J_3 = 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Les polynômes des générateurs qui ont cette propriété de commuter avec tous les générateurs de l'algèbre sont appelés des **opérateurs de Casimir**. Dans le cas présent, on peut montrer que J^2 est le seul opérateur de Casimir indépendant, dans le sens où n'importe quelle fonction des générateurs qui commute avec tous les J_i est une fonction de J^2 .

Puisque J^2 commute avec les trois générateurs, il commute avec la représentation que nous sommes en train de calculer. Puisque celle-ci est supposée irréductible, J^2 doit être, en vertu du lemme de Schur (voir le chapitre 4), proportionnel à l'identité sur l'espace V , $J^2 = \lambda \mathbb{I}$. Nous pouvons calculer λ en faisant agir J^2 sur l'état propre $|j\rangle$. Réécrivant d'abord J^2 en termes de J_3, J_{\pm} ,

$$J^2 = J_-J_+ + J_3^2 + J_3 = J_+J_- + J_3^2 - J_3, \quad (9.6)$$

nous obtenons

$$J^2|j\rangle = J_-J_+|j\rangle + (j^2 + j)|j\rangle = j(j + 1)|j\rangle, \quad (9.7)$$

et donc $\lambda = j(j + 1)$. Nous avons utilisé $J_+|j\rangle = 0$ puisqu'il n'existe pas de vecteur propre de valeur propre $j + 1$ (j est la valeur propre maximale).

Revenant au vecteur $J_+|j - 1\rangle = \frac{1}{c_{j-1}}J_+J_-|j\rangle$, l'identité ci-dessus montre que $J_+J_- = J^2 - J_3^2 + J_3$ est diagonal, et donc que $J_+|j - 1\rangle$ est proportionnel à $|j\rangle$, $J_+|j - 1\rangle = d_j|j\rangle$.

Les mêmes arguments permettent de construire un vecteur propre $|j-2\rangle$ de valeur propre $j-2$, tel que

$$J_-|j-1\rangle = c_{j-2}|j-2\rangle, \quad J_+|j-2\rangle = d_{j-1}|j-1\rangle. \quad (9.8)$$

Continuant de la sorte, on construit une chaîne de vecteurs propres $|j\rangle, |j-1\rangle, |j-2\rangle, \dots$ formant comme une échelle, le long de laquelle J_+ et J_- font respectivement monter et descendre d'un échelon (on les appelle d'ailleurs des opérateurs d'échelle, pour cette raison).

Sur un vecteur propre quelconque de la chaîne, ils agissent selon

$$J_+|m\rangle = d_{m+1}|m+1\rangle, \quad J_-|m\rangle = c_{m-1}|m-1\rangle, \quad (9.9)$$

où les vecteurs $|m\rangle$, pour $m = j, j-1, j-2, \dots$, sont supposés orthonormaux, $\langle m|m'\rangle = \delta_{m,m'}$. Cette suite de vecteurs ne peut pas être infinie puisque l'espace V est de dimension finie. Il doit donc y avoir une valeur minimale $m = j - N$ telle que l'état propre correspondant $|j - N\rangle$ est annihilé par J_- :

$$J_-|j - N\rangle = 0. \quad (9.10)$$

Si c'est le cas, l'échelle est finie et comprend les vecteurs $|j\rangle, |j-1\rangle, \dots, |j-N\rangle$, tous états propres de J_3 . Par conséquent, la matrice J_3 est diagonale,

$$J_3 = \text{diag}(j, j-1, j-2, \dots, j-N). \quad (9.11)$$

Elle doit cependant être de trace nulle puisque $iJ_3 = [J_1, J_2]$ est un commutateur. Cette condition implique $N = 2j$, de sorte que la base de l'espace de représentation V comprend les $(2j+1)$ vecteurs $|j\rangle, |j-1\rangle, \dots, |-j+1\rangle, |-j\rangle$. Puisque $2j+1$ doit être un entier, j doit être entier ou demi-entier.

Pour déterminer complètement la représentation, il faut calculer les matrices J_+ et J_- (J_3 est déjà déterminé), et donc les coefficients d_{m+1} et c_{m-1} . Tous les vecteurs $|m\rangle$ étant supposés normalisés, nous obtenons

$$\begin{aligned} d_{m+1}^2 &= \langle m|J_-J_+|m\rangle = \langle m|J^2 - J_3^2 - J_3|m\rangle = j(j+1) - m(m+1), \\ c_{m-1}^2 &= \langle m|J_+J_-|m\rangle = \langle m|J^2 - J_3^2 + J_3|m\rangle = j(j+1) - m(m-1). \end{aligned} \quad (9.12)$$

La représentation est maintenant complètement déterminée dans la base des $|m\rangle$. Les matrices représentant J_+ et J_- y ont la forme

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & d_j & & & \\ & 0 & d_{j-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{-j+1} & \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ c_{j-1} & 0 & & & \\ & c_{j-2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & c_{-j} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

Elles vérifient bien la relation $J_-^\dagger = J_+$, puisque $c_m = d_{m+1}$.

De plus, la construction ci-dessus montre que la représentation est unique dès que la dimension de l'espace V est fixée. Nous obtenons ainsi notre résultat central:

L'algèbre $su(2)/so(3)$ possède, pour chaque dimension, une unique représentation irréductible, à équivalences près. La représentation de dimension $2j + 1$, avec $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, est univoquement déterminée par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} J_+ |m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |m+1\rangle, \\ J_3 |m\rangle &= m |m\rangle, \\ J_- |m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |m-1\rangle. \end{aligned} \quad (-j \leq m \leq j) \quad (9.14)$$

L'ensemble complet de toutes les représentations irréductibles inéquivalentes de dimension finie du groupe $SU(2)$ s'obtiennent de celles de l'algèbre par exponentiation, $D_j(g) = \exp(i\psi \hat{n} \cdot \vec{J})$, avec $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$.

En particulier, dans la représentation de dimension 2, $j = 1/2$, on obtient

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (9.15)$$

et donc,

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

et les générateurs J_i sont égaux aux matrices de Pauli, divisées par 2 (voir la Section 8.5).

9.2 REPRÉSENTATIONS DE $SU(2)$ ET CARACTÈRES

Toutes les représentations de dimension finie du groupe $SU(2)$ s'obtiennent en exponentiant les représentations de son algèbre. Dans la section précédente, nous avons déterminé toutes les représentations irréductibles de l'algèbre, qui fournissent donc toutes les représentations irréductibles du groupe, de dimension finie. La forme matricielle explicite qu'elles prendront dépendra de la paramétrisation choisie.

Plutôt que d'écrire explicitement les matrices des représentations, ce qui serait d'ailleurs extrêmement fastidieux, on peut en calculer les caractères, plus simples à déterminer et plus utiles en pratique.

Nous avons donné au chapitre 8 la représentation de dimension 2, ou de spin $j = 1/2$,

$$D_{1/2}(\psi, \theta, \varphi) = e^{i\frac{\psi}{2}\hat{n}\cdot\vec{T}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} + i \sin \theta \sin \frac{\psi}{2} & ie^{-i\varphi} \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} \\ ie^{i\varphi} \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \theta \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

avec $\psi, \varphi \in [0, 2\pi]$ et θ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Clairement le caractère de cette représentation vaut

$$\chi_{1/2}(\psi) = 2 \cos \frac{\psi}{2}. \quad (9.18)$$

Nous avons obtenu ce résultat à partir de la forme explicite de la représentation, mais celle-ci n'est pas facilement accessible dans le cas d'une représentation de spin j quelconque. Recalculons donc le caractère de $D_{1/2}$ d'une façon qui se généralise.

Puisque les caractères sont constants sur les classes de conjugaison, on peut essayer de trouver un représentant pour chaque classe de telle sorte que les matrices de représentation associées à ces représentants soient les plus simples possibles. Il faut donc d'abord déterminer les classes de conjugaison du groupe. On peut raisonner pour cela sur la représentation de dimension 2.

La matrice $D_{1/2}(g)$ est unitaire et s'exprime comme l'exponentielle d'une matrice hermitienne $\hat{n} \cdot \vec{T}$, à un multiple $i\psi/2$ près. Cette matrice hermitienne est diagonalisable par une transformation unitaire U , c'est-à-dire par une conjugaison de $SU(2)$. Etant de trace nulle, $\text{Tr } \hat{n} \cdot \vec{T} = 0$, et de carré égal à \mathbb{I} (voir l'exercice 8.3), la forme diagonalisée de $\hat{n} \cdot \vec{T}$ doit être égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^3$. La même conjugaison appliquée à la matrice $D_{1/2}(g)$ la met sous la forme

$$U D_{1/2}(g) U^\dagger = e^{i\frac{\psi}{2}T^3} = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

On obtient que tous les éléments du groupe qui correspondent à la même valeur de ψ et qui diffèrent par leur valeur de \hat{n} sont conjugués dans le groupe. Un choix commode pour le représentant de la classe est de prendre $\hat{n} = (0, 0, 1)$.

Est-ce que deux éléments qui ont des valeurs de ψ différentes peuvent être conjugués ? Puisque la trace de $D_{1/2}(g)$ vaut $2 \cos \frac{\psi}{2}$, et qu'elle est invariante sous conjugaison, seules des valeurs de ψ qui donnent à $\cos \frac{\psi}{2}$ des valeurs identiques peuvent être conjuguées. Puisque deux valeurs quelconques de ψ dans $[0, 2\pi]$ donnent à $\cos \frac{\psi}{2}$ des valeurs différentes, deux éléments du groupe correspondant à deux valeurs de ψ différentes ne sont pas conjugués.

Nous obtenons donc que les classes de conjugaison de $SU(2)$ sont paramétrisées par la variable ψ dans $[0, 2\pi]$. Explicitement les classes s'expriment par

$$C_0 = \{\mathbb{I}\}, \quad C_{2\pi} = \{-\mathbb{I}\}, \quad (9.20)$$

$$C_\psi = \{g = (\hat{n}, \psi) \text{ avec } \hat{n} \in \mathbb{R}^3, |\hat{n}| = 1\}. \quad (\psi \neq 0, 2\pi) \quad (9.21)$$

On comprend mieux pourquoi le caractère de la représentation de spin $1/2$ ne dépendait que de ψ .

Les autres représentations irréductibles de $SU(2)$ sont obtenues en prenant pour les générateurs $\frac{\vec{T}}{2} = \vec{J}$ les matrices déterminées à la section précédente, correspondant aux valeurs de spin $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, c'est-à-dire

$$D_j(\hat{n}, \psi) = e^{i\psi \hat{n} \cdot \vec{J}}. \quad (9.22)$$

Par les arguments développés plus haut, le caractère de la représentation de spin j ne dépend que de la variable ψ , et peut être déterminé en choisissant le représentant de chaque classe comme étant $\hat{n} = (0, 0, 1)$. On trouve alors, puisque $\hat{n} \cdot \hat{J}$ se réduit à J_3 , une matrice diagonale, que le caractère s'écrit

$$\chi_j(\psi) = \text{Tr } e^{i\psi J_3} = \text{Tr } \text{diag} (e^{i\psi j}, e^{i\psi(j-1)}, \dots, e^{-i\psi j}) = \sum_{k=-j}^j e^{ik\psi} = \frac{\sin(j + \frac{1}{2})\psi}{\sin \frac{\psi}{2}}. \quad (9.23)$$

Cette formule, pour toutes les valeurs de j , établit la table des caractères irréductibles de $SU(2)$.

Comme dans le cas des groupes finis, les caractères irréductibles satisfont des relations d'orthogonalité par rapport à la mesure sur le groupe données en (8.45) (c'est le cas pour tous les groupe de Lie compacts et connexes, pour autant que l'on utilise la mesure invariante sur le groupe). Explicitement, on a

$$\langle \chi_j | \chi_{j'} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{\sin(j + \frac{1}{2})\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} \frac{\sin(j' + \frac{1}{2})\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} \quad (9.24)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi [\cos(j - j')\psi - \cos(j + j' + 1)\psi] = \delta_{j, j'}. \quad (9.25)$$

Les relations de complétude sont également satisfaites, et prennent la forme explicite

$$\sum_{j=0, \frac{1}{2}, \dots} \chi_j(\psi) \chi_j(\psi') = \frac{\pi}{\sin^2 \frac{\psi}{2}} \delta(\psi - \psi') = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\psi}{2}} \delta\left(\cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\psi'}{2}\right). \quad (9.26)$$

Elles expriment le fait que les caractères irréductibles de $SU(2)$ forment une famille complète de fonctions sur les classes de conjugaison, c'est-à-dire les fonctions périodiques paires de la variable $\frac{\psi}{2}$. Les premiers caractères s'écrivent

$$\chi_0 = 1, \quad \chi_{1/2} = 2 \cos \frac{\psi}{2}, \quad \chi_1 = 1 + 2 \cos \psi, \quad \chi_{3/2} = 2 \cos \frac{\psi}{2} + 2 \cos \frac{3\psi}{2}. \quad (9.27)$$

Plus généralement, les éléments de matrice des représentations irréductibles forment un ensemble complet de fonctions pour l'espace des fonctions de carré sommable définies sur le groupe (théorème de Peter-Weyl).

9.3 PRODUITS TENSORIELS

Le produit de deux représentations irréductibles n'est pas irréductible, sauf si l'une d'entre elles est de spin $j = 0$ (la représentation triviale). Afin d'expliciter la réduction des produits, il est commode de travailler au niveau de l'algèbre; on effectue la réduction de la représentation de l'algèbre correspondant au produit de représentations du groupe, et on exponentie les composants irréductibles. (La réduction peut également être calculée en termes des caractères, comme pour les groupes finis, voir l'exercice 9.3).

Si $D_{j_1}(g)$ et $D_{j_2}(g)$ sont deux représentations irréductibles, la représentation de l'algèbre correspondant à leur produit s'obtient du développement suivant,

$$\begin{aligned} D_j(g) \otimes D_j(g) &= e^{i\psi\hat{n}\cdot\vec{J}^1} e^{i\psi\hat{n}\cdot\vec{J}^2} = \left[\mathbb{I} + i\psi\hat{n}\cdot\vec{J}^1 + \dots \right] \otimes \left[\mathbb{I} + i\psi\hat{n}\cdot\vec{J}^2 + \dots \right] \\ &= \mathbb{I} + i\psi\hat{n}\cdot(\vec{J}^1 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{J}^2) + \dots \end{aligned} \quad (9.28)$$

La représentation des générateurs s'écrit donc (addition des moments angulaires)

$$\vec{J} \equiv \vec{J}^{j_1 \otimes j_2} = \vec{J}^1 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{J}^2. \quad (9.29)$$

L'espace produit possède une base $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ qui diagonalise J_3^1 et J_3^2 , et dans laquelle l'action des générateurs de la représentation produit vaut simplement

$$\vec{J}|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \vec{J}^1|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle + |j_1, m_1\rangle \otimes \vec{J}^2|j_2, m_2\rangle. \quad (9.30)$$

En particulier le générateur J^3 dans l'espace produit est également diagonal

$$J_3|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle, \quad (9.31)$$

alors que J_{\pm} agissent par

$$\begin{aligned} J_+|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} |j_1, m_1+1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ &\quad + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2+1\rangle, \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} J_-|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} |j_1, m_1-1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ &\quad + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2-1\rangle. \end{aligned} \quad (9.33)$$

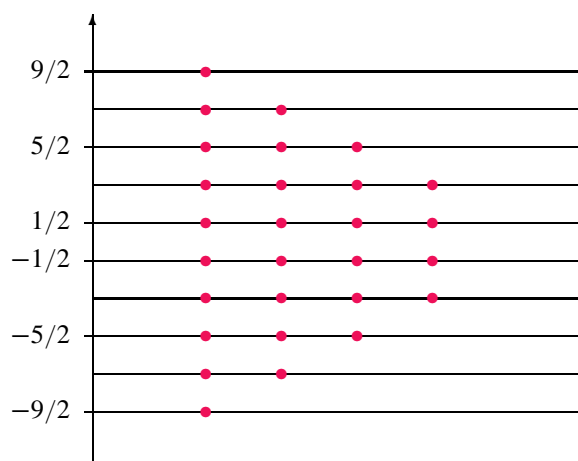
Puisque la présence d'une représentation irréductible D_j dans l'espace produit se traduit par l'existence d'un ensemble de $2j + 1$ vecteurs propres de J_3 de valeurs propres $m = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$, la réduction du produit tensoriel peut s'effectuer par un simple décompte des états propres et des valeurs propres de J_3 .

On s'aperçoit ainsi que les valeurs propres $m = \pm(j_1 + j_2)$ sont non-dégénérées, que $m = \pm(j_1 + j_2 - 1)$ sont chacune deux fois dégénérées, $m = \pm(j_1 + j_2 - 2)$ le sont trois fois, et ainsi de suite jusqu'aux valeurs propres $m = \pm|j_1 - j_2|$ qui sont chacune dégénérées $(2j_2 + 1)$ fois ou $2j_1 + 1$ fois suivant que $j_1 \geq j_2$ ou $j_1 \leq j_2$. Toutes les valeurs propres dans l'intervalle $[-|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2|]$ ont même dégénérescence, égale à $2j_2 + 1$ ou $2j_1 + 1$.

On obtient graphiquement le tableau suivant, illustré dans le cas $j_1 = 3, j_2 = \frac{3}{2}$.

La dégénérescence maximale et égale au nombre de représentations irréductibles dans le produit tensoriel, et vaut $2j_2 + 1$ si $j_1 \geq j_2$ ou $2j_1 + 1$ si $j_1 \leq j_2$, c'est-à-dire $j_1 + j_2 + 1 - |j_1 - j_2|$. La réduction s'écrit donc

$$D_{j_1} \otimes D_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D_j. \quad (9.34)$$



La base naturelle de l'espace produit (membre de gauche) sont les vecteurs $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$, alors que celle pour l'action des représentations D_j du membre de droite est organisée par les valeurs de j et de m , c'est-à-dire des vecteurs $|j, m\rangle$. Si l'on choisit ces deux bases orthonormales, il existe une matrice unitaire U qui effectue le changement de base, et qui diagonalise par blocs la représentation produit:

$$|j, m\rangle = \sum_{j_1, m_1, j_2, m_2} U_{(j,m)(j_1, m_1, j_2, m_2)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle. \quad (9.35)$$

Les entrées de la matrice U sont appelées les **coefficients de Clebsch-Gordan**.

Dans les cas les plus simples, la matrice U peut être calculée simplement et explicitement. Prenons par exemple le produit tensoriel de $j_1 = 1$ et de $j_2 = \frac{1}{2}$. L'espace produit est de dimension 6, et la réduction s'écrit

$$D_1 \otimes D_{1/2} = D_{3/2} \oplus D_{1/2}. \quad (9.36)$$

Il n'existe qu'un seul état de valeur propre $m = 3/2$. Il doit nécessairement être le sommet de la représentation de spin $j = 3/2$,

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \quad (9.37)$$

L'action successive de J_- sur cette identité fournit les 3 autres états de la représentation de spin $j = \frac{3}{2}$. Par exemple,

$$J_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = J_- |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle \quad (9.38)$$

donne

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle. \quad (9.39)$$

En appliquant encore J_- deux fois, on trouve les deux autres états de la représentation de spin $j = \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle, \\ |\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\rangle &= |1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Il reste à trouver les deux états formant la représentation de spin $j = \frac{1}{2}$. Ceux-ci doivent être orthogonaux à $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ et $|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$, et donc égaux aux combinaisons suivantes (au choix d'une phase globale près)

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle, \\ |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle = J_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (9.41)$$

9.4 LES REPRÉSENTATIONS DE $SO(3)$

Les représentations irréductibles de $SO(3)$ sont a priori données par la même formule exponentielle que celles de $SU(2)$, $D_j = \exp(i\psi \hat{n} \cdot \vec{J}(j))$. Cependant la question se pose de savoir si le résultat est bien une représentation de $SO(3)$, qui d'après notre discussion du chapitre précédent, doit satisfaire,

$$D_j^{SO(3)}(\hat{n}, \psi) = D_j^{SO(3)}(-\hat{n}, 2\pi - \psi). \quad (9.42)$$

Exprimé autrement, les paramètres (\hat{n}, ψ) et $(-\hat{n}, 2\pi - \psi)$ correspondent à des éléments de $SU(2)$ reliés par $-\mathbb{I}$, de sorte qu'au niveau des représentations de $SU(2)$, on a

$$D_j(-\hat{n}, 2\pi - \psi) = D_j(-\mathbb{I})D_j(\hat{n}, \psi). \quad (9.43)$$

Par conséquent, seules les représentations de $SU(2)$ qui satisfont $D_j(-\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ sont également des représentations de $SO(3)$.

Dans la variété de groupe de $SU(2)$, l'élément $-\mathbb{I}$ est associé à $\psi = 2\pi$ et n'importe quel vecteur \hat{n} (tous les points de la surface de la sphère de rayon 2π sont identifiés), par exemple $\hat{n} = (0, 0, 1)$. On a ainsi

$$D_j(-\mathbb{I}) = D_j((0, 0, 1), 2\pi) = e^{2i\pi J_3} = \text{diag}(e^{2i\pi j}, e^{2i\pi(j-1)}, \dots, e^{-2i\pi j}) = (-\mathbb{I})^{2j}. \quad (9.44)$$

On obtient que $D_j(-\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ dans $SU(2)$ si et seulement si j est entier: *seules les représentations de $SU(2)$ de spin entier sont des représentations de $SO(3)$* . Par construction, elles forment l'ensemble complet de toutes les représentations unitaires irréductibles inéquivalentes de dimension finie de $SO(3)$.

9.5 HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Il est possible de réaliser toutes les représentations de $SO(3)$ en termes de fonctions définies sur la sphère unité dans \mathbb{R}^3 . Cela paraît assez raisonnable: l'espace des fonctions sur la sphère est par construction invariant sous rotations (elles préservent la sphère !), ce qui signifie qu'elles constituent un espace de représentation pour le groupe $SO(3)$, de dimension infinie. La réduction de cette représentation de dimension infinie en représentations irréductibles nous permet d'atteindre le but proposé. Techniquement, on s'intéresse aux fonctions sur la sphère unité qui sont de carré sommable, et on utilise donc la norme hilbertienne propre à l'espace de Hilbert $L^2(S^2)$. La construction peut s'effectuer comme suit.

Les rotations agissent bien entendu sur les trois coordonnées x, y, z de \mathbb{R}^3 en préservant la norme euclidienne du vecteur (x, y, z) , que nous supposons égale à 1. L'espace euclidien \mathbb{R}^3 est irréductible sous les rotations, et donc les trois coordonnées x, y, z engendrent un espace de représentation de spin 1. Quelles sont les relations entre ces trois coordonnées et les vecteurs de base canoniques $|m = 1\rangle$, $|m = 0\rangle$ et $|m = -1\rangle$ utilisés dans les sections précédentes ?

Pour le voir, il faut d'abord calculer l'action des générateurs infinitésimaux des rotations sur les trois coordonnées. Les générateurs des rotations sont les composantes du moment angulaire, classiquement défini par $\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p}$, et dont l'action sur les fonctions de x, y, z devient

$$\vec{J} = -i \vec{x} \times \vec{\nabla}. \quad (9.45)$$

On vérifie en effet que les trois composantes $J_1 = i(z\partial_y - y\partial_z)$, $J_2 = i(x\partial_z - z\partial_x)$ et $J_3 = i(y\partial_x - x\partial_y)$ satisfont bien $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$, l'algèbre de $SO(3)$.

On calcule ainsi l'action de J_3 sur les trois coordonnées,

$$J_3 x = iy, \quad J_3 y = -ix, \quad J_3 z = 0. \quad (9.46)$$

A part sur la coordonnée z , on voit que l'action de J_3 n'est pas diagonale. On vérifie cependant facilement qu'elle devient diagonale sur les combinaisons suivantes,

$$J_3 (x + iy) = x + iy, \quad J_3 z = 0, \quad J_3 (x - iy) = x - iy, \quad (9.47)$$

ce qui permet d'identifier $(x + iy)$, z et $(x - iy)$ avec les trois vecteurs propres de J_3 , c'est-à-dire les trois états $|1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$, aux normalisations près. Il suffit de normaliser correctement l'état de plus grande valeur de m , puisque l'action des générateurs fournissent automatiquement les autres. La norme se calcule aisément en utilisant les coordonnées polaires $(x, y, z) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ et la mesure d'intégration $\sin \theta d\varphi d\theta$,

$$\|x + iy\|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |x + iy|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{8\pi}{3}. \quad (9.48)$$

Les trois états de la représentation de dimension 3 correspondent alors aux trois fonctions (un facteur -1 est conventionnellement introduit dans l'expression de l'état $m = 1$),

$$Y_1^1(\theta, \varphi) \equiv |1\rangle = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x + iy) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad (9.49)$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) \equiv |0\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad (9.50)$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) \equiv |-1\rangle = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x - iy) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad (9.51)$$

Les trois fonctions $Y_1^m(\theta, \varphi)$ pour $m = \pm 1, 0$, sont les **harmoniques sphériques** de spin (ou de moment angulaire) 1.

Les fonctions correspondant aux autres représentations s'obtiennent facilement, en principe du moins. Il est facile de vérifier que la fonction $(x + iy)^l$ pour l entier positif, satisfait $J_3(x + iy)^l = l(x + iy)^l$ et $J_+(x + iy)^l = 0$, et correspond donc au sommet d'une représentation de spin l . Le calcul de sa norme et le choix d'une convention de phase fournissent alors un état $|m = l\rangle$, duquel les autres $2l$ fonctions s'obtiennent par application répétée de J_- . Ensemble, elles forment un ensemble de $2l + 1$ fonctions $Y_l^m(\theta, \varphi)$, les harmoniques sphériques de spin l . Leur expression générale est connue en termes des fonctions de Legendre associées,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi} \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad -l \leq m \leq l. \quad (9.52)$$

L'ensemble de ces fonctions, pour toutes les valeurs de l et m forment une base orthonormée pour l'espace des fonctions de carré sommable sur la sphère.

EXERCICES

- 9.1 Ecrire explicitement les générateurs J_1, J_2, J_3 de $su(2)$ dans la représentation de spin 1 en utilisant les formules de la section 1. Les comparer avec ceux obtenus en (8.50).
- 9.2 Vérifier la relation de complétude (9.26) des caractères de $SU(2)$.
- 9.3 Confirmer la réduction du produit $D_{j_1} \otimes D_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D_j$ de représentations de $SU(2)$ en calculant les projections du caractère produit $\langle \chi_j | \chi_{j_1} \chi_{j_2} \rangle$.
- 9.4 Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan de la réduction du produit $D_{1/2} \otimes D_{1/2}$.
- 9.5 Les représentations D_j et D_j^* de $SU(2)$ sont équivalentes, puisqu'elles sont de même dimension. Le vérifier explicitement pour $j = \frac{1}{2}$, en montrant que la deuxième matrice de Pauli,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.53)$$

réalise l'équivalence, $\sigma_2(iJ_k)\sigma_2 = (iJ_k)^*$ pour les J_k donnés en (9.16).

9.6 Calculer l'indicateur de Frobenius-Schur pour les représentations irréductibles de $SU(2)$ (voir la section 4.6). En utilisant les caractères irréductibles donnés en (9.23) et la mesure invariante (8.45), vérifier que

$$\int dg \chi_j(g^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot \frac{\sin(2j+1)\psi}{\sin \psi} = (-1)^{2j}. \quad (9.54)$$

En déduire que les représentations de spin entier sont réelles, et que celles de spin demi-entier sont pseudo-réelles.

9.7 Généraliser les identités (8.44) et (8.54) aux représentations de spin plus élevé. Montrer que celle pour le spin $j = \frac{3}{2}$ prend la forme

$$D^{\text{exp}}(\hat{n}, \psi) = e^{i\frac{\psi}{2}\hat{n}\cdot\vec{T}} = \left\{ \frac{9}{8} \cos \frac{\psi}{2} - \frac{1}{8} \cos \frac{3\psi}{2} \right\} \mathbb{I} + i \left\{ \frac{9}{8} \sin \frac{\psi}{2} - \frac{1}{24} \sin \frac{3\psi}{2} \right\} (\hat{n} \cdot \vec{T}) \\ - \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{3\psi}{2} \right\} (\hat{n} \cdot \vec{T})^2 - i \left\{ \frac{1}{8} \sin \frac{\psi}{2} - \frac{1}{24} \sin \frac{3\psi}{2} \right\} (\hat{n} \cdot \vec{T})^3. \quad (9.55)$$

Procéder comme suit.

a. Utiliser le fait qu'une matrice satisfait sa propre équation caractéristique (théorème de Cayley-Hamilton) pour montrer que $e^{i\frac{\psi}{2}\hat{n}\cdot\vec{T}}$ peut être écrit sous la forme

$$f_0(\hat{n}, \psi)\mathbb{I} + f_1(\hat{n}, \psi)(\hat{n} \cdot \vec{T}) + f_2(\hat{n}, \psi)(\hat{n} \cdot \vec{T})^2 + f_3(\hat{n}, \psi)(\hat{n} \cdot \vec{T})^3, \quad (9.56)$$

pour des fonctions f_i des paramètres.

b. Puisque les éléments associés aux paramètres (ψ, \hat{n}) et $(\psi, (0, 0, 1))$ sont conjugués (voir section 9.2), il s'ensuit qu'il existe une matrice inversible telle que $S(\hat{n} \cdot \vec{T})S^{-1} = T_3$. Conjuguant l'équation précédente, on trouve

$$e^{i\frac{\psi}{2}T_3} = f_0(\hat{n}, \psi)\mathbb{I} + f_1(\hat{n}, \psi)T_3 + f_2(\hat{n}, \psi)T_3^2 + f_3(\hat{n}, \psi)T_3^3, \quad (9.57)$$

qui montre que les fonctions $f_i = f_i(\psi)$ sont des fonctions de ψ uniquement.

c. En multipliant l'équation qui précède successivement par \mathbb{I} , T_3 , T_3^2 et T_3^3 , et en prenant à chaque fois la trace, on trouve quatre équations linéaires pour les quatre fonctions inconnues. La solution du système linéaire fournit l'expression (9.55).

d. Alternativement, réduire la série exponentielle à la forme donnée au point b en utilisant systématiquement l'équation satisfaite par T_3 , à savoir $T_3^4 - 10T_3^2 + 9\mathbb{I} = 0$.

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES LINÉAIRES: MÉTHODES TENSORIELLES

Tous les groupes de matrices, $GL(N)$, $SL(N)$, $SU(N)$, $SO(N)$, \dots , sont définis en termes d'une représentation fondamentale, de dimension N , qui est la représentation naturelle par les matrices associées au groupe (générales inversibles, inversibles de déterminant 1, unitaires de déterminant 1, orthogonales). La matrice associée à un élément du groupe (ou plutôt, par laquelle un élément du groupe est défini) agit sur les vecteurs de base

$$D(g) e_i = \sum_{j=1}^N e_j M_{ji}, \quad (10.1)$$

dans l'espace vectoriel correspondant. Cette représentation est la représentation vectorielle dans l'espace vectoriel naturel V .

Les produits tensoriels $V^{\otimes n}$ et la représentation produit correspondante $D^{\otimes n} = D \otimes \dots \otimes D$ (n fois) agit sur la base produit par (voir le chapitre 5)

$$(D \otimes \dots \otimes D)(g) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^N e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n} M_{j_1 i_1} \dots M_{j_n i_n}. \quad (10.2)$$

Les éléments de la puissance tensorielle $V^{\otimes n}$ sont des tenseurs de rang n , dont l'écriture dans la base produit,

$$t = \sum_{i_1 \dots i_n=1}^N t^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad (10.3)$$

fait apparaître les composantes $t^{i_1 \dots i_n}$ du tenseur t . L'action de la représentation $D(g)$ ou ses puissances tensorielles peut être transférée sur les composantes du vecteur ou du tenseur, auquel cas la matrice ou les matrices M^{-1} agissent par la gauche

$$(D \otimes \dots \otimes D)(g) t^{i_1 \dots i_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} (M^{-1})_{i_1 j_1} \dots (M^{-1})_{i_n j_n} t^{j_1 \dots j_n}. \quad (10.4)$$

Pour $n > 1$, la représentation produit $D^{\otimes n}$ n'est pas irréductible (voir le chapitre 5), et se réduit en une somme directe de représentations irréductibles. Le premier résultat fondamental, valide pour

tous les groupes linéaires, est que *n'importe quelle représentation irréductible est contenue dans une puissance tensorielle de la représentation fondamentale*. Toute représentation irréductible de ces groupes est donc équivalente à une représentation tensorielle. On a discuté au chapitre 5 l'intérêt pratique que cette observation implique, pour autant que l'on dispose d'un critère simple qui permette d'isoler les parties irréductibles des produits tensoriels.

L'exemple que l'on a déjà mentionné est celui de la représentation du groupe de Lorentz dans laquelle se transforme le champ électrique et le champ magnétique. Cette représentation, de dimension 6, est équivalente à une représentation tensorielle agissant dans la partie antisymétrique du produit $V \otimes V$ (avec V un espace vectoriel de dimension 4). La conséquence est que les six composantes des champs peuvent être vues comme les six composantes indépendantes d'un tenseur de rang 2 antisymétrique, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Le cas général est une vaste généralisation de ce cas particulier. Nous commencerons par discuter le cas de $GL(N)$, le plus général des groupes linéaires. Les résultats obtenus pour $GL(N)$ s'appliquent directement à $SL(N)$ et $SU(N)$ sans aucune modification. Les groupes $SO(N)$ par contre sont particuliers et nécessitent une discussion complémentaire⁴.

10.1 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DE $GL(N)$

Dresser la liste des représentations irréductibles de $GL(N)$ se ramène à réduire les produits tensoriels $D^{\otimes n}$ de la représentation fondamentale (vectorielle) D en parties irréductibles puisqu'elles sont toutes obtenues de cette manière. Il faut pour cela identifier les sous-espaces invariants de $V_n \equiv V^{\otimes n}$. L'observation suivante est déterminante, et fait intervenir, de façon profonde, le groupe des permutations S_n .

Le groupe S_n possède une action naturelle sur l'espace produit V_n , qui consiste à échanger l'ordre des vecteurs de base dans le produit (ou de façon équivalente, l'ordre des indices des composantes $t^{i_1 \dots i_n}$ du tenseur),

$$D(\sigma) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(n)}}. \quad (10.5)$$

L'espace vectoriel V_n supporte donc l'action de deux représentations de deux groupes différents, dont aucune n'est irréductible. Cependant, et c'est une observation capitale pour leur réduction, elles commutent ! En effet, on a

$$D(\sigma) D^{\otimes n}(g) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{\sigma(n)}} M_{j_1 i_1} \dots M_{j_n i_n} \quad (10.6)$$

$$= \sum_{j_1 \dots j_n} e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{\sigma(n)}} M_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}} \dots M_{j_{\sigma(n)} i_{\sigma(n)}} \quad (10.7)$$

par un simple réarrangement des éléments de matrice M ,

$$= \sum_{j_1 \dots j_n} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n} M_{j_1 i_{\sigma(1)}} \dots M_{j_n i_{\sigma(n)}} \quad (10.8)$$

⁴Il existe une dernière série de groupes linéaires classiques, les groupes symplectiques $Sp(2N)$, dont nous ne parlerons pas. Pour eux également, une discussion complémentaire est nécessaire.

par changement des variables de sommation, $j_{\sigma(i_k)} \rightarrow j_k$,

$$= D^{\otimes n}(g)D(\sigma) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}. \quad (10.9)$$

La commutation des deux représentations est la clé du problème. Ecrivons les réductions respectives des deux représentations en parties irréductibles,

$$D(\sigma) = \bigoplus_Y m_Y D_Y(\sigma), \quad D^{\otimes n}(g) = \bigoplus_i m_i D_i(g), \quad (10.10)$$

où D_Y est la représentation irréductible de S_n associée au diagramme de Young Y à n boîtes, et D_i est une représentation irréductible de $GL(N)$; les entiers m_Y et m_i sont des multiplicités.

La relation de commutation $D(\sigma)D^{\otimes n}(g) = D^{\otimes n}(g)D(\sigma)$ montre que le sous-espace V_n^Y qui se transforme selon les m_Y représentations D_Y est un sous-espace invariant pour $D^{\otimes n}(g)$, de dimension $m_Y f_Y$ (f_Y est la dimension de D_Y). Inversement, le sous-espace V_n^i qui se transforme selon les représentations D_i est un sous-espace invariant pour $D(\sigma)$, de dimension $m_i \times \dim D_i$.

Le sous-espace invariant correspondant à un type de représentation irréductible d'un groupe est un sous-espace invariant pour l'autre groupe, mais pas nécessairement irréductible. La réduction complète a été déterminée par Hermann Weyl, et mène aux résultats remarquables suivants, connus sous le nom de dualité de Weyl:

Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-espaces V_n^Y et celui des V_n^i : la restriction de la représentation $D^{\otimes n}(g)$ à chaque V_n^Y se décompose précisément en m_i copies de D_i , pour un certain i , et la restriction de $D(\sigma)$ à chaque V_n^i se réduit en m_Y copies de D_Y . De plus, la multiplicité de D_i dans V_n^Y est égale à la dimension de D_Y , et la multiplicité de D_Y dans V_n^i vaut la dimension D_i ,

$$m_i = f_Y, \quad m_Y = \dim D_i. \quad (10.11)$$

Cet ensemble de résultats découvre un lien extrêmement profond entre les représentations irréductibles des groupes de permutations et les représentations irréductibles des groupes linéaires $GL(N)$. Ils permettent ni plus ni moins de classer l'ensemble de toutes les représentations irréductibles des groupes $GL(N)$, et aussi $SL(N)$ et $SU(N)$, puisque les résultats décrits plus haut s'appliquent mot pour mot à ces deux séries de groupes.

L'image que l'on obtient est la suivante. Une représentation irréductible de $GL(N)$ (ou de $SL(N)$ ou $SU(N)$) est une représentation tensorielle, et donc contenue dans une puissance $D^{\otimes n}$ de la représentation fondamentale, de dimension N . Elle peut être mise en correspondance avec un diagramme de Young Y de S_n , et agit dans un sous-espace V_n^Y de l'espace produit qui se transforme lui-même selon la représentation D_Y (en fait plusieurs copies de D_Y). Puisque D_Y agit par permutations des éléments de base dans la base produit, le sous-espace V_n^Y se caractérise par des propriétés de symétrie bien précises. Les composantes $t^{i_1 \cdots i_n}$ du tenseur dans ce sous-espace possèdent les mêmes propriétés de symétrie.

En résumé, une représentation irréductible de $GL(N)$ agit sur des tenseurs de rang n ayant des propriétés de symétrie sous l'échange de ses indices, caractérisées par un diagramme de Young de S_n . Par conséquent, toute représentation irréductible de $GL(N)$, $SL(N)$ ou $SU(N)$, peut être caractérisée par un diagramme de Young, bien que cette association ne soit pas biunivoque (plusieurs représentations de rangs différents, correspondant à des diagrammes de Young différents, peuvent être équivalentes).

Nous illustrerons ces résultats en examinant les représentations irréductibles correspondent aux valeurs de rang les plus basses, $n = 1, 2$ et 3 . Un exemple important se rapportant à une représentation tensorielle de rang $n = 4$ sera également donné plus loin.

Le rang $n = 1$ est trivial: il n'y a qu'une seule représentation irréductible de rang 1, à savoir la représentation vectorielle elle-même, $D(g)$, de dimension N . Elle est associée au diagramme de Young ne possédant qu'une seule boîte.

Le cas du rang $n = 2$ a déjà été discuté précédemment, au chapitre 5, et nous le remettons simplement en perspective. Le groupe S_2 possède deux représentations inéquivalentes, $\square\square$ et \square , associées respectivement à la représentation triviale et la représentation alternée, chacune de dimension 1. Les sous-espaces correspondants de $V_2 = V^{\otimes 2}$ sont donnés par les combinaisons symétriques et antisymétriques des vecteurs de base:

$$V_2^{\square\square} = \left\{ \sum_{i,j=1}^N t^{ij} (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) \right\} \quad (10.12)$$

$$= \left\{ \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2} (t^{ij} + t^{ji}) (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) \right\} = \left\{ \sum_{i,j=1}^N (t^{ij} + t^{ji}) e_i \otimes e_j \right\} \quad (10.13)$$

$$= \left\{ \sum_{i,j=1}^N s^{ij} e_i \otimes e_j : s^{ij} = s^{ji} \right\}, \quad (10.14)$$

$$V_2^{\square} = \left\{ \sum_{i,j=1}^N a^{ij} e_i \otimes e_j : a^{ij} = -a^{ji} \right\}. \quad (10.15)$$

Ils constituent respectivement l'espace des tenseurs symétriques et des tenseurs antisymétriques, de dimension $\frac{N(N+1)}{2}$ et $\frac{N(N-1)}{2}$. Puisque les deux diagrammes de Young définissent des représentations de dimension $f_Y = 1$, les deux sous-espaces se transforment de manière irréductible sous $GL(N)$. La réduction de l'espace produit V_2 sous l'action de S_2 et de $GL(N)$ s'écrit donc (dualité de Weyl)

$$N^2 = \frac{N(N+1)}{2} \cdot \square\square_{S_2} \oplus \frac{N(N-1)}{2} \cdot \square_{S_2}, \quad (10.16)$$

$$N^2 = 1 \cdot \frac{N(N+1)}{2} \Big|_{GL(N)} \oplus 1 \cdot \frac{N(N-1)}{2} \Big|_{GL(N)}. \quad (10.17)$$

Notons que pour $N = 2$, la représentation de $GL(2)$ agissant dans la partie antisymétrique est de

dimension 1, et correspond à la représentation donnée par le déterminant:

$$\begin{aligned} D^{\otimes 2}(g) (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) &= \sum_{k,\ell=1}^2 (e_k \otimes e_\ell - e_\ell \otimes e_k) M_{k1} M_{\ell 2} \\ &= (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) (M_{11} M_{22} - M_{21} M_{12}) = (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \det M. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Elle n'est pas équivalente à la représentation triviale de $GL(2)$, mais l'est par contre dans le cas de $SL(2)$ ou $SU(2)$.

Pour le rang $n = 3$, il nous faut considérer les trois représentations irréductibles de S_3 , et les sous-espaces de $V_3 = V^{\otimes 3}$ correspondants. Le sous-espace $V_3^{\square\square\square}$ correspond aux tenseurs de rang 3 totalement symétriques sous l'échange des trois indices,

$$V_3^{\square\square\square} = \left\{ \sum_{i,j,k} s^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k : D(\sigma) s^{ijk} = s^{ijk} \right\}, \quad (10.19)$$

et possède une dimension $\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$. Puisque cette représentation de S_3 est de dimension 1, le sous-espace $V_3^{\square\square\square}$ est irréductible pour $GL(N)$ et définit donc une représentation irréductible de dimension $\frac{N(N+1)(N+2)}{2}$.

Le sous-espace $V_3^{\square\square}$ contient les tenseurs de rang 3 totalement antisymétriques,

$$V_3^{\square\square} = \left\{ \sum_{i,j,k} a^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k : D(\sigma) a^{ijk} = \epsilon(\sigma) a^{ijk} \right\}, \quad (10.20)$$

Il est de dimension $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ et est irréductible sous $GL(N)$.

Le troisième et dernier sous-espace V_3^{\square} , de dimension $2 \frac{N(N^2-1)}{3}$, se transforme sous $GL(N)$ dans deux représentations équivalentes, chacune de dimension $\frac{N(N^2-1)}{3}$. Ces deux représentations agissent sur des tenseurs ayant des propriétés de symétrie mixtes, ni totalement symétriques ni totalement antisymétriques. Les tenseurs en question sont construits à l'aide des deux diagrammes standards $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ de la façon suivante (voir le chapitre 7, où les représentations de S_n elles-mêmes étaient construites de manière très semblable).

Au premier diagramme standard $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$ est associée la combinaison de permutations

$$a_{YsY} = [e - (13)][e + (12)] = e + (12) - (13) - (13)(12). \quad (10.21)$$

Appliquée à un élément de base arbitraire $e_i \otimes e_j \otimes e_k$, elle fournit

$$e_{ijk} = e_i \otimes e_j \otimes e_k + e_j \otimes e_i \otimes e_k - e_k \otimes e_j \otimes e_i - e_k \otimes e_i \otimes e_j. \quad (10.22)$$

Lorsque i, j, k prennent toutes leurs valeurs entre 1 et N , les N^3 directions e_{ijk} ne sont pas indépendantes mais satisfont les relations linéaires suivantes

$$e_{ijk} + e_{jki} + e_{kij} = 0, \quad (10.23)$$

$$e_{ijk} = e_{jik}. \quad (10.24)$$

Le décompte des directions indépendantes est ici un peu moins direct.

Considérons d'abord les directions e_{ijk} avec $i \neq j \neq k$. Leur nombre total est égal à $N(N-1)(N-2)$, et se décomposent en $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ groupes de six, correspondant aux six permutations de i, j, k . Les relations ci-dessus impliquent que dans chaque groupe de six, seulement deux sont indépendantes, par exemple e_{ijk} et e_{ikj} . Il y a donc $\frac{N(N-1)(N-2)}{3}$ directions indépendantes e_{ijk} avec $i \neq j \neq k$. Ensuite il y a $3N(N-1)$ directions e_{ijk} pour lesquelles deux des indices sont égaux. Elles forment $N(N-1)$ groupes de trois, chaque groupe correspondant aux trois permutations qui ont un effet non-trivial sur le triplet i, j, k . Les relations linéaires plus haut indiquent que chaque groupe de trois ne contient qu'une seule direction indépendante, ce qui fait un total de $N(N-1)$ directions indépendantes e_{ijk} pour lesquelles deux indices sont égaux. Finalement, les relations linéaires impliquent que les directions avec trois indices identiques sont nulles, $e_{iii} = 0$. On trouve ainsi un total de

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{3} + N(N-1) = \frac{N(N^2-1)}{3} \quad (10.25)$$

directions e_{ijk} linéairement indépendantes. Elles engendrent un sous-espace de cette dimension, invariant et irréductible sous $GL(N)$. Un tenseur général appartenant à ce sous-espace est de la forme

$$\sum_{i,j,k} t^{ijk} e_{ijk} = \sum_{i,j,k} [t^{ijk} + t^{jik} - t^{kji} - t^{jki}] e_i \otimes e_j \otimes e_k \equiv \sum_{i,j,k} m^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k. \quad (10.26)$$

Les tenseurs de rang 3 associés à cette représentation irréductible sont donc caractérisés par les symétries des m^{ijk} , "transposées" de celles des e_{ijk} , à savoir

$$\begin{cases} m^{ijk} + m^{jki} + m^{kij} = 0, \\ m^{ijk} = -m^{kji}. \end{cases} \quad (10.27)$$

L'autre diagramme standard $\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}$ fabrique la combinaison de permutations

$$a'_Y s'_Y = [e - (12)][e + (13)] = e + (13) - (12) - (12)(13), \quad (10.28)$$

et de manière similaire à ci-dessus, les combinaisons

$$\tilde{e}_{ijk} = e_i \otimes e_j \otimes e_k + e_k \otimes e_j \otimes e_i - e_j \otimes e_i \otimes e_k - e_j \otimes e_k \otimes e_i. \quad (10.29)$$

Elles satisfont les relations linéaires

$$\tilde{e}_{ijk} + \tilde{e}_{jki} + \tilde{e}_{kij} = 0, \quad (10.30)$$

$$\tilde{e}_{ijk} = \tilde{e}_{kji}, \quad (10.31)$$

et sont en nombre égal aux e_{ijk} , le comptage se faisant de la même manière que ci-dessus. Elles engendrent un second sous-espace invariant de dimension $\frac{N(N^2-1)}{3}$, irréductible sous $GL(N)$, et sur lequel agit une représentation équivalente à la première. Ce sous-espace est caractérisé par des tenseurs $\tilde{m}^{ijk} = t^{ijk} + t^{kji} - t^{jik} - t^{kij}$ possédant des symétries semblables à celles du premier tenseur irréductible,

$$\begin{cases} \tilde{m}^{ijk} + \tilde{m}^{jki} + \tilde{m}^{kij} = 0, \\ \tilde{m}^{ijk} = -\tilde{m}^{jik}. \end{cases} \quad (10.32)$$

Sous le groupe des permutations S_3 par contre, l'ensemble des directions e_{ijk} et \tilde{e}_{ijk} se transforment par paires dans une somme directe de $\frac{N(N^2-1)}{3}$ représentations irréductibles de dimension 2. La réduction explicite nécessite de prendre en compte les valeurs des indices, de sorte qu'une formule générale de réduction n'est pas aisée.

L'espace total V_3 , de dimension N^3 , se décompose donc sous l'action des deux groupes selon

$$N^3 = \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \cdot \square\square\square_{S_3} \oplus \frac{N(N^2-1)}{3} \cdot \square\square_{S_3} \oplus \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \cdot \square_{S_3}, \quad (10.33)$$

$$N^3 = 1 \cdot \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \Big|_{GL(N)} \oplus 2 \cdot \frac{N(N^2-1)}{3} \Big|_{GL(N)} \oplus 1 \cdot \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \Big|_{GL(N)}. \quad (10.34)$$

La réduction sous $GL(N)$ correspond à la décomposition explicite d'un tenseur de rang 3 en parties irréductibles selon

$$t^{ijk} = \frac{1}{6} s^{ijk} + \frac{1}{6} a^{ijk} + \frac{1}{3} m^{ijk} + \frac{1}{3} \tilde{m}^{ijk}. \quad (10.35)$$

Lorsque $N = 2$, la représentation sur les tenseurs totalement antisymétriques disparaît (la formule donne une dimension nulle) puisqu'on ne sait pas construire un tenseur de rang 3 totalement antisymétrisé avec seulement deux valeurs pour les indices.

10.2 FORMULE POUR LES DIMENSIONS

Le cas des tenseurs de rang 3 examiné à la section précédente le montre déjà: le décompte du nombre de composantes indépendantes d'un tenseur soumis à des propriétés de symétrie mixtes devient très vite complexe. Il est donc impérieusement souhaitable de disposer d'une formule simple et efficace. Une telle formule existe, qui présente d'ailleurs des analogies frappantes avec celle donnant les dimensions des représentations irréductibles des groupes de permutations (on aurait pu s'en douter...).

Une représentation irréductible de $GL(N)$ est associée à un diagramme de Young Y , comportant disons n boîtes. On associe à chaque boîte un nombre de la manière suivante. Les boîtes de

la diagonale principale du diagramme reçoivent toutes le nombre N . Une boîte placée sur une ligne à une distance k à droite de la boîte diagonale reçoit le nombre $N + k$, et une boîte placée sur une colonne à une distance k en-dessous de la boîte diagonale reçoit le nombre $N - k$. Les nombres marqués dans les boîtes sont donc constants le long des diagonales. La dimension de la représentation irréductible de $GL(N)$ (ou $SL(N)$ ou $SU(N)$) associée à Y est donnée par

$$\dim D_i = \frac{\prod_i (\text{nombre dans la boîte } i)}{\prod_i \ell_i} \quad (10.36)$$

où les entiers ℓ_i sont les longueurs des équerres centrées sur les boîtes (voir le chapitre 7).

On vérifie facilement les dimensions des représentations tensorielles de rang 3 annoncées dans la section précédente. Et de même on trouve que la décomposition d'un tenseur général de rang 4 en parties irréductibles est donnée par

$$\begin{aligned} N^4 = & 1 \cdot \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{24} \Big|_{GL(N)} \oplus 3 \cdot \frac{N(N^2-1)(N+2)}{8} \Big|_{GL(N)} \oplus 2 \cdot \frac{N^2(N^2-1)}{12} \Big|_{GL(N)} \\ & \oplus 3 \cdot \frac{N(N^2-1)(N-2)}{8} \Big|_{GL(N)} \oplus 1 \cdot \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24} \Big|_{GL(N)}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

10.3 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DE $SO(N)$

Le groupe $SO(N)$ est un sous-groupe de $GL(N)$. Dès lors la décomposition des représentations tensorielles par rapport aux groupes de permutations reste valable. Cependant les f_Y copies de la représentation D_i que l'on trouve dans le sous-espace associé à un diagramme de Young Y ne sont plus irréductibles sous $SO(N)$. On a déjà rencontré une situation semblable au chapitre 5 lorsqu'on a examiné la réduction du carré tensoriel de la représentation orthogonale de dimension 2 de S_3 . On avait trouvé que la partie symétrique était bien invariante mais pas irréductible, et cela précisément en raison du caractère orthogonal de cette représentation de dimension 2.

La représentation fondamentale de $SO(N)$, de dimension N , est orthogonale et mène à des résultats semblables. Supposons que $t^{i_1 i_2 \dots i_n}$ soit un tenseur irréductible sous $GL(N)$, ayant des propriétés de symétrie fixées par un certain diagramme de Young de S_n . Sa transformation sous $GL(N)$ s'écrit, pour une certaine représentation irréductible D_i ,

$$D_i(g) t^{i_1 \dots i_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} t^{j_1 \dots j_n} M_{j_1 i_1} M_{j_2 i_2} \dots M_{j_n i_n}. \quad (10.38)$$

Prenons maintenant la trace sur les deux premiers indices de cette équation, c'est-à-dire que nous posons $i_1 = i_2$ et sommions sur i_1 entre 1 et N (une contraction des indices i_1, i_2). Nous obtenons

$$D_i(g) \sum_{i_1} t^{i_1 i_1 i_3 \dots i_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} t^{j_1 \dots j_n} \sum_{i_1} M_{j_1 i_1} M_{j_2 i_1} \dots M_{j_n i_n}. \quad (10.39)$$

Si M est une matrice inversible sans autre propriété particulière, ce qui est le cas lorsque M est associée à un élément g de $GL(N)$, la sommation sur i_1 ne peut pas être simplifiée. Si par contre M est une matrice inversible et orthogonale, la sommation sur i_1 donne

$$\sum_{i_1} M_{j_1 i_1} M_{j_2 i_1} = \sum_{i_1} M_{j_1 i_1} M_{i_1 j_2}^t = (MM^t)_{j_1 j_2} = \delta_{j_1 j_2}. \quad (10.40)$$

L'équation ci-dessus devient alors

$$D_i(g) \sum_{i_1} t^{i_1 i_1 i_3 \dots i_n} = \sum_{j_1} \sum_{j_3 \dots j_n} t^{j_1 j_1 j_3 \dots j_n} M_{j_3 i_3} \dots M_{j_n i_n}, \quad (10.41)$$

et montre que les combinaisons $\sum_k t^{k k i_3 \dots i_n}$ du tenseur original constituent un sous-espace invariant pour l'action de $SO(N)$, et que le tenseur de départ n'est plus irréductible. Puisque la contraction peut s'effectuer sur n'importe quelle paire d'indices, on en déduit aussitôt que les seuls tenseurs irréductibles sous $GL(N)$ qui restent irréductibles sous $SO(N)$ sont ceux qui ont toutes leurs traces nulles (on parle alors de tenseur sans trace: la contraction de n'importe quelle paire d'indices est nulle). Les seuls tenseurs de ce type sont ceux qui sont complètement antisymétriques, associés aux diagrammes de Young ne possédant qu'une seule colonne.

En pratique, la réduction d'un tenseur qui possède des traces non-nulles, s'effectue en lui soustrayant toutes les traces indépendantes de sorte que le résultat des soustractions produise un tenseur sans trace, et donc irréductible sous $SO(N)$. Les traces elles-mêmes, qui correspondent à des tenseurs de rang inférieur au rang du tenseur de départ, doivent être soumises au même traitement de soustractions si elles possèdent des traces non-nulles. Ainsi dans l'exemple général que l'on vient de traiter, la première étape consistera à décomposer

$$t^{i_1 i_2 \dots i_n} = \left[t^{i_1 i_2 \dots i_n} - \frac{1}{N} \delta_{i_1 i_2} t^{k k i_3 \dots i_n} \right] + \frac{1}{N} \delta_{i_1 i_2} t^{k k i_3 \dots i_n}. \quad (10.42)$$

La partie entre accolades possède une trace nulle sur les deux premiers indices. Elle peut cependant posséder des traces non-nulles sur d'autres paires d'indices; de même la première trace qui a été soustraite, à savoir $t^{k k i_3 \dots i_n}$, qui est un tenseur de rang $n - 2$, peut également posséder des traces non-nulles. En soustrayant et rajoutant systématiquement les traces non-nulles, puis les traces des traces, puis les traces des traces des traces, etc, on peut décomposer n'importe quel tenseur en parties irréductibles sous $SO(N)$.

Pour le rang 2, le tenseur symétrique possède une unique trace non-nulle. Sa réduction s'écrit

$$\square\square : t^{ij} = \left(t^{ij} - \frac{1}{N} \delta_{ij} t^{kk} \right) + \frac{1}{N} \delta_{ij} t^{kk}, \quad (10.43)$$

et celle de la représentation de $GL(N)$,

$$\frac{N(N+1)}{2} \Big|_{GL(N)} = \frac{(N-1)(N+2)}{2} \Big|_{SO(N)} \oplus 1 \Big|_{SO(N)}. \quad (10.44)$$

Effectivement la partie contraction $\delta_{ij} t^{kk}$ est un tenseur invariant à une seule composante puisque

$$\sum_{i,j} \sum_k t^{kk} \delta_{ij} (e_i \otimes e_j) = \left(\sum_k t^{kk} \right) \sum_i e_i \otimes e_i \quad (10.45)$$

définit une direction invariante sous $SO(N)$.

Pour le rang 3, le tenseur ayant la symétrie associée au diagramme $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array}$ ne possède qu'une seule trace non-nulle indépendante, en raison de l'antisymétrie de deux de ses indices,

$$t^{\ell\ell k} = -t^{k\ell\ell} \quad , \quad t^{\ell j\ell} = 0. \quad (10.46)$$

La décomposition s'écrit donc

$$t^{ijk} = \left(t^{ijk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} t^{\ell\ell k} \right) + \frac{1}{N} \delta_{ij} t^{\ell\ell k}, \quad (10.47)$$

et la réduction de la représentation de $GL(N)$ est donnée par,

$$\frac{N(N^2 - 1)}{3} \Big|_{GL(N)} = \frac{N(N^2 - 4)}{3} \Big|_{SO(N)} \oplus N \Big|_{SO(N)}. \quad (10.48)$$

Mentionnons pour terminer que dans le cas du groupe de Lorentz $SO(1, 3)$ ($N = 4$), les contractions s'effectuent avec la métrique de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$, qui remplace également la métrique euclidienne δ_{ij} dans les termes de soustraction.

10.4 LE TENSEUR DE RIEMANN

Une application importante des méthodes tensorielles concerne le tenseur de Riemann, un tenseur de rang 4 qui possède une signification géométrique importante en géométrie riemannienne, et qui joue un rôle capital en relativité générale.

La version totalement covariante du tenseur de Riemann possède les propriétés de symétrie suivantes:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \quad (10.49)$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0. \quad (10.50)$$

Nous montrerons dans cette section que ces symétries sont précisément celles qui sont dictées par le diagramme de Young $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array}$ de S_4 , et par conséquent que le tenseur de Riemann est irréductible sous l'action du groupe $GL(N)$. La formule pour la dimension implique immédiatement qu'en N dimensions, le nombre de ses composantes indépendantes vaut

$$\dim R_{ijkl} = \frac{N^2(N^2 - 1)}{12}, \quad (10.51)$$

égal à 20 en dimension 4.

Un des deux diagrammes standards associé au diagramme ci-dessus est $\begin{array}{|c|} \hline 13 \\ \hline 24 \\ \hline \end{array}$, auquel est associé la combinaison de 16 permutations suivantes,

$$a_{YSY} = [e - (12) - (34) + (12)(34)][e + (13) + (24) + (13)(24)]. \quad (10.52)$$

L'application de cet opérateur sur un tenseur général de rang 4 donne

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = & t^{ijk\ell} + t^{kji\ell} + t^{i\ell kj} + t^{k\ell ij} - t^{jik\ell} - t^{kij\ell} - t^{j\ell ki} - t^{k\ell ji} \\ & - t^{ij\ell k} - t^{\ell jik} - t^{i\ell kj} - t^{\ell kij} + t^{j\ell ik} + t^{\ell ijk} + t^{j\ell ki} + t^{\ell kji}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Sous $GL(N)$, toutes les composantes R_{ijkl} se transforment dans une représentation irréductible de la dimension donnée plus haut.

La forme de la combinaison linéaire définissant R_{ijkl} montre clairement les (anti)symétries (10.49); de même la relation cyclique (10.50) se vérifie directement. Finalement on peut montrer que le tenseur R_{ijkl} ainsi construit ne satisfait pas d'autres relations.

Le tenseur de Riemann n'est pas irréductible sous les transformations orthogonales. Ses symétries montrent qu'il ne possède qu'une seule trace non-nulle indépendante; par exemple celle sur les premier et quatrième indices définit le tenseur de Ricci,

$$R_{ij} \equiv \sum_k R_{kijk} = \delta^{k\ell} R_{kij\ell}. \quad (10.54)$$

Ce tenseur de rang 2 est symétrique, $R_{ij} = R_{ji}$, et possède lui-même une trace non-nulle, qui est maintenant un invariant sous les transformations orthogonales,

$$R \equiv \sum_i R_{ii} = \delta^{ij} R_{ij}. \quad (10.55)$$

La réduction complète du tenseur de Riemann sous $SO(N)$ s'écrit

$$\frac{N^2(N^2-1)}{12} \Big|_{GL(N)} = \frac{N(N+1)(N+2)(N-3)}{12} \Big|_{SO(N)} \oplus \frac{(N+2)(N-1)}{2} \Big|_{SO(N)} \oplus 1 \Big|_{SO(N)}. \quad (10.56)$$

Les parties irréductibles sont appelées respectivement tenseur de Weyl, tenseur de Ricci sans trace, et scalaire de courbure.

EXERCICES

- 10.1 Pour $N = 2$, montrer comment le sous-espace invariant de V_3 , de dimension 4 et orthogonal au sous-espace complètement symétrique (voir section 1), se transforme sous S_3 .

- 10.2 Vérifier la décomposition d'un tenseur général de rang 4 en parties irréductibles sous $GL(N)$, donnée à la fin de la section 2.
- 10.3 Pour $N = 2$, la représentation irréductible de $GL(2)$ associée au diagramme $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ de S_3 est de dimension 2. Est-ce que cette représentation est équivalente à la représentation vectorielle (fondamentale) de $GL(2)$?
- 10.4 Etablir la relation entre les représentations irréductibles de $SU(2)$ étudiées au chapitre 9, et les méthodes tensorielles présentées dans ce chapitre (avec $N = 2$). Montrer que la représentation irréductible de spin j peut être associée à la représentation tensorielle de rang $n = 2j$ correspondant au diagramme de Young de S_{2j} comportant une seule ligne (totalement symétrique). Plus généralement, les tenseurs associés aux diagrammes $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ dont les $2j$ dernières colonnes comportent une seule boîte, correspondent tous à la représentation de spin j de $SU(2)$.