En coordonnées sphériques (R,θ,φ), la métrique de Schwarzschild est définie par l'intervalle d'espace-temps ds:

$$ds^2 = (1 - R_0/R)dt^2 - dR^2/(1 - R_0/R) - R^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) \qquad (1)$$

où t est la coordonnée de temps en mètres ($t = c \times t_s$ où t_s est la coordonnée de temps en sec), c est la vitesse de la lumière, R est la coordonnée radiale d'espace, θ est la colatitude, φ est la longitude, G est la constante gravitationnelle, M est la masse du corps central sphérique, et $R_0=2GM/c^2$.

Utilisant la transformation: $dr = dR/|1 - R_0/R|$ (2)

nous transformons l'intervalle ds (1) dans la forme suivante, en coordonnées de la tortue (r,θ,φ):

$$ds^2 = (1 - R_0/R)(dt^2 - dr^2) - [R(r)]^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) \qquad (3)$$

$$r = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \qquad (3a)$$

Soit u=t+r et v=t−r. Considérons maintenant la métrique suivante où k_u et k_v sont deux constantes arbitraires:

$$ds^2 = 16\, k_u k_v e^{2k_u u} e^{2k_v v}(1 - R_0/R)(dt^2 - dr^2) - [R(u,v)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (4)$$

$$e^{2k_u u} - e^{2k_v v} = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \qquad (5)$$

Soit, en t et r :

$$ds^2 = 16\, k_u k_v e^{2k_u(t+r)} e^{2k_v(t-r)}(1 - R_0/R)(dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (6)$$

$$e^{2k_u(t+r)} - e^{2k_v(t-r)} = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \qquad (7)$$

Les transformations suivantes montrent que cette métrique n'est en fait rien d'autre que la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = 16\, k_u k_v e^{2k_u u} e^{2k_v v}(1 - R_0/R)(du\, dv) - [R(u,v)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (8)$$

$$ds^2 = 4(1 - R_0/R)\; d\left(e^{2k_u u}\right)\; d\left(e^{2k_v v}\right) - [R(u,v)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (9)$$

$$ds^2 = (1 - R_0/R)\left\{\left[d\left(e^{2k_u u} + e^{2k_v v}\right)\right]^2 - \left[d\left(e^{2k_u u} - e^{2k_v v}\right)\right]^2\right\} - [R(u,v)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (10)$$

Posons maintenant: $e^{2k_u u} + e^{2k_v v} = t'$ et $e^{2k_u u} - e^{2k_v v} = r'$

$$ds^2 = (1 - R_0/R)\{[dt']^2 - [dr']^2\} - [R(r')]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (11)$$

$$r' = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \qquad (12)$$

Il s'agit donc de la métrique classique en coordonnées de la tortue.

L'élément différentiel de distance réelle radiale dL_r est donné par :$dL_r = \sqrt{1 - R_0/R(r')}\; dr'$

Cette différentielle s'intègre donc directement sur un intervalle fini.

Revenons à la forme :

$$ds^2 = 16 k_u k_v e^{2k_u(t+r)} e^{2k_v(t-r)}(1 - R_0/R)(dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (6)$$

On cherche à retrouver des notions de temps réel et distance réelle en raisonnant uniquement sur cette forme (6)

On peut calculer la différence de temps réel ΔT (en mètres) entre deux événements localisés aux coordonnées (r,θ,φ) :

$dT = 4\sqrt{k_u k_v} e^{k_u(t+r)} e^{k_v(t-r)} \sqrt{(1 - R_0/R)}\; dt$ qui peut s'intégrer directement puisque r est fixe dans l'intégration.

La différence des valeurs de la coordonnée t pour deux événements simultanés ayant lieu en des points infiniment voisins est nulle, puisque $g_{0\alpha} = 0$.

L'élément différentiel de distance réelle radiale dL_r est donné par :$dL_r = 4\sqrt{k_u k_v} e^{(k_u+k_v)t} e^{(k_u-k_v)r} \sqrt{(1 - R_0/R)}\; dr$

Question: est-il possible de trouver une méthode d'intégration de cette relation pour calculer un intervalle de distance fini, ou bien de trouver une correspondance entre coordonnées (t,r) et (t',r') qui permettrait de déduire de l'intégrale en r' l'intégrale en (t,r) ?