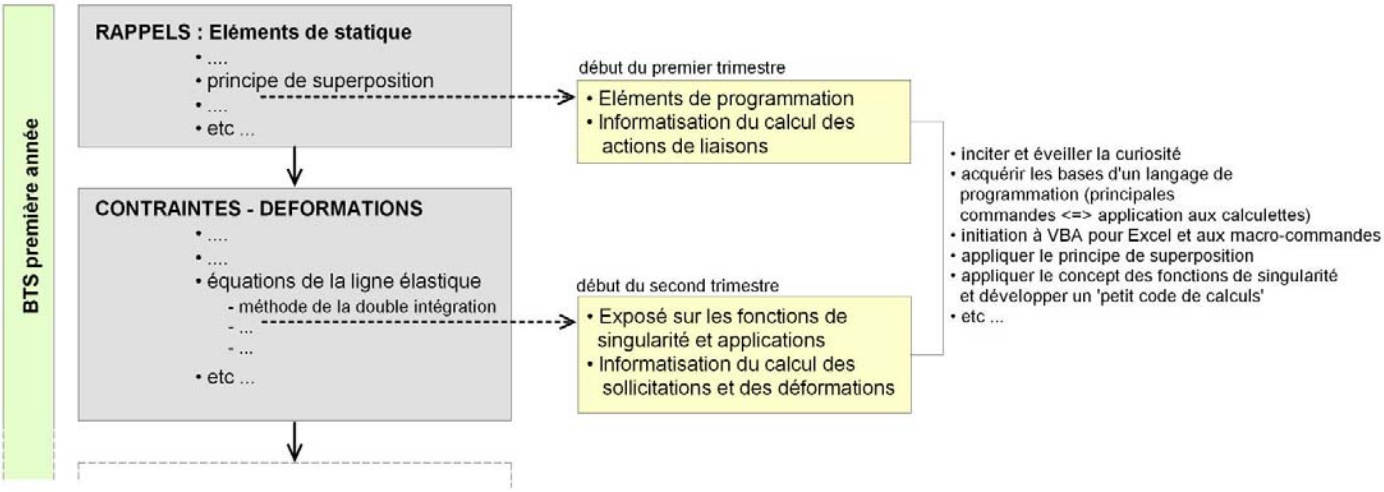
METHODE DES FONCTIONS DE SINGULARITE

F. Gabrysiak - Mécanique des Structures

Le thème-support est une application permettant de calculer les sollicitations et les déformations le long d'une poutre isostatique.
Cette démarche se fait en 2 temps :

- *exposé succinct des principaux éléments de programmation, puis mise en place d'une l'application Excel permettant de calculer les actions de liaisons et les sollicitations,*
- *mise en oeuvre des éléments de programmation permettant le calcul des déformations.*

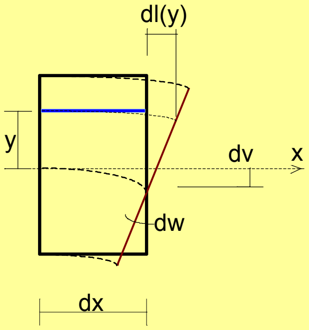


Les pages qui suivent sont un condensé de mes documents ressources et des documents élèves.Elles n'ont pas vocation à être distribuées sous cette forme aux étudiants. En effet, un de mes objectifs, outre l'apport de connaissances, est de susciter leur appétit ! A tout un chacun de les reprendre et de les adapter ...

• UN PEU D'HISTOIRE ...

La méthode dite de la double intégration permet de déterminer les équations de w(x) et v(x) (rotation et flèche). Cette méthode est simple et générale. Cependant, elle devient rapidement fastidieuse avec la complication des chargements.

Soit un tronçon dx subissant un moment fléchissant M(x) :



On sait que $\sigma(y) = E.\varepsilon(y) = E.\dfrac{dl(y)}{dx}$

et que $\sigma(y) = \dfrac{M(x)}{Izz'}.y$

donc $dl(y) = \dfrac{M(x).dx}{E.Izz'}.y$

L'allongement des fibres du tronçon s'accompagne d'une rotation dw. On se place dans le domaine des petites déformations, donc :

$\Rightarrow dw \approx tg(dw))$.

En linéarisant, on a :

$\Rightarrow dl(y) = y.dw$

$$\boxed{\begin{aligned} y.dw &= \frac{M(x).dx}{E.Izz'}.y \\ \Rightarrow dw &= \frac{M(x)}{E.Izz'}.dx \\ \Rightarrow dv &= dw.dx \end{aligned}}$$

Ceux qui lisent ces lignes ... vont pouvoir découvrir une approche basée sur les fonctions de singularité. Ces fonctions, appliquées dés 1919 par MacAuley à l'analyse des poutres, utilisent les notions et les concepts des opérateurs de Dirac et de Heaviside[1] (bien connues des électroniciens et des informaticiens).
Les fondements mathématiques de ces opérateurs, bien que définis avec rigueur, sont introduit dans ce qui suit avec un formalisme discutable, mais nécessaire afin d'être applicables. Le champ d'utilisation de ces opérateurs aux calculs des structures est très large. Ils simplifient notablement les temps de résolution, et permettent également une informatisation « élégante » des calculs de poutre.

Bibliographie :

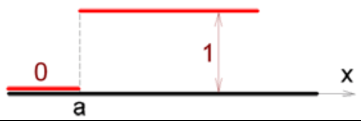
- Les matrices transfert dans le calcul des structures - P.M. GERY et J.A. CALGARO - éditions Eyrolles - 1971
- Mécanique des structures DEUG - éditions Dunod - 1975
- L'outil informatique : résistance des matériaux - Tome 4 - B. BOUMARD et F. LAVASTE - éditions Delagrave - 1984
- Cours et TD, J. PROBECK - CNAM Génie Civil
- Cours et TP, J.P. DOREMUS et C. HIRSCH - IUT du Montet

[1] L'opérateur de Heaviside est la fonction primitive de la fonction de Dirac.

• UN PEU DE THEORIE …

• L'opérateur de Heaviside

Une primitive de la fonction de Dirac au point (a) est la fonction de Heaviside Y(x-a) définie par :



$$\begin{cases} Y(x-a)=0 \quad \text{si} \quad x<a \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-a\right)<0 \\ Y(x-a)=1 \quad \text{si} \quad x>a \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-a\right)>0 \end{cases}$$

• Les parenthèses angulaires : fonctions de singularité

Les parenthèses angulaires[2] $\left\langle x-a\right\rangle$ concrétisent les conditions :

si $\left\langle x-a\right\rangle$ est <u>NEGATIF</u> alors (x - a) = 0 ⇔ x < a

si $\left\langle x-a\right\rangle$ est <u>POSITIF</u> alors (x - a) = (x - a) ⇔ x > a

La fonction de singularité devra donc être définie, dans le cas courant en mécanique des structures par :

$$f_d(x) = \left\langle x-a\right\rangle^n$$

Cette fonction obéit à la loi d'intégration :

$$\int_{-\infty}^{x}\left\langle y-a\right\rangle^n dy = \frac{\left\langle x-a\right\rangle^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour } n \geq 0$$

Il faut également définir la loi d'intégration pour n = -1 et n = -2, ce qui se fait comme suit :

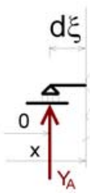
$$\int_{-\infty}^{x}\left\langle y-a\right\rangle^{-1} dy = \left\langle x-a\right\rangle^{0} = \begin{cases} 0 & \text{quand } x<a \\ 1 & \text{quand } x>a \end{cases}$$

et

$$\int_{-\infty}^{x}\left\langle y-a\right\rangle^{-2} dy = \left\langle x-a\right\rangle^{-1}$$

Ces fonctions $\left\langle x-a\right\rangle^{-1}$ et $\left\langle x-a\right\rangle^{-2}$ sont nulles partout sauf pour x = a, où elles sont infinies de sorte que les 2 expressions ci-dessus sont valables.

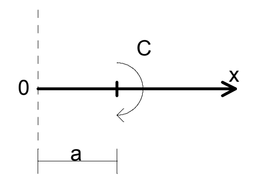
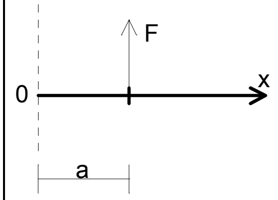
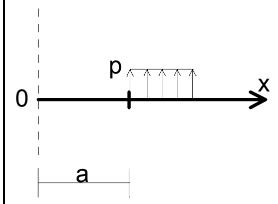
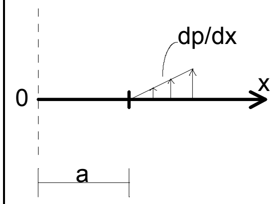
On admettra que si $(x)=0$ alors $\left\langle 0\right\rangle^0 = 1$, ce qui est mathématiquement faux. Mais en mécanique des structures, afin de prendre en compte les efforts dans la section de droite du tronçon de gauche se traduit par :



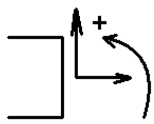
$(0+d\xi)=d\xi$ alors $\left\langle d\xi\right\rangle^0 = 1$

2 La notation des parenthèses angulaires a été choisie de façon à distinguer les écritures.

• LES CHARGEMENTS COURANTS :

	Fonction de Singularité	**Représentation**
couple	$p(x) = C\left\langle x-a\right\rangle^{-2}$	
force	$p(x) = F\left\langle x-a\right\rangle^{-1}$	
charge uniformément répartie	$p(x) = p\left\langle x-a\right\rangle^{0}$	
charge variant linéairement	$p(x) = \frac{dp}{dx}\left\langle x-a\right\rangle^{1}$	

Nota : Le tableau explicite « les actions extérieures » appliquées. Par exemple, d'après notre convention de signes, le couple (C) dans le tableau « tourne » dans le sens négatif, il provoque un moment fléchissant positif dans la section de droite du tronçon de gauche.

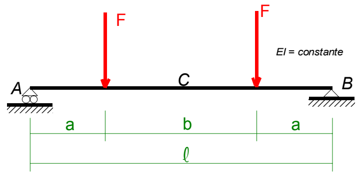


Donc, il suffit d'écrire la somme des densités de charge le long d'une poutre (on obtient ainsi la fonction intensité de charges), de procéder aux différentes intégrations successives !... et de déterminer les constantes d'intégration par des conditions aux limites. Bien évidemment, ce qui est valable pour des forces verticales, l'est également pour des forces horizontales.

Cette technique de calcul des équations de déformation (rotation, flèche) s'applique particulièrement bien lorsque le terme EI est constant le long de la poutre. L'écriture peut paraître dans un premier temps un peu « lourde ». Mais l'application des fonctions de singularité permet de réduire considérablement le temps de résolution et les erreurs de calculs (en comparaison à la méthode de la double intégration + recherche des constantes). Enfin, l'application des fonctions de singularité prend tout son sens dans l'informatisation du calcul des sollicitations et des déformations.

• UN PEU D'APPLICATIONS ….

• Exemple 1



$$f_d(x) = Y_A.\langle x-0\rangle^{-1} - F.\langle x-a\rangle^{-1} - F.\langle x-(a+b)\rangle^{-1} + Y_B.\langle x-\ell\rangle^{-1}$$

$$-V(x) = Y_A.\langle x-0\rangle^{0} - F.\langle x-a\rangle^{0} - F.\langle x-(a+b)\rangle^{0} + Y_B.\langle x-\ell\rangle^{0}$$

$$M(x) = Y_A.\langle x-0\rangle^{1} - F.\langle x-a\rangle^{1} - F.\langle x-(a+b)\rangle^{1} + Y_B.\langle x-\ell\rangle^{1}$$

$$EI.w(x) = \frac{Y_A}{2}.\langle x-0\rangle^{2} - \frac{F}{2}.\langle x-a\rangle^{2} - \frac{F}{2}.\langle x-(a+b)\rangle^{2} + \frac{Y_B}{2}.\langle x-\ell\rangle^{2} + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$EI.v(x) = \frac{Y_A}{6}.\langle x-0\rangle^{3} - \frac{F}{6}.\langle x-a\rangle^{3} - \frac{F}{6}.\langle x-(a+b)\rangle^{3} + \frac{Y_B}{6}.\langle x-\ell\rangle^{3} + C_1.x + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad (2)$$

On pose : F = 10 kN a = 1 m b = 2 m ℓ = 4 m

- **conditions aux limites :**
  - * pour x = 0 $\Rightarrow$ v(0) = 0 donc C2 = 0
  - * pour x = $\ell \Rightarrow v(\ell)$ = 0 donc

$$-4C_1 = \frac{10}{6}\left(4\right)^3 - \frac{10}{6}\left(3\right)^3 - \frac{10}{6}\left(1\right)^3$$

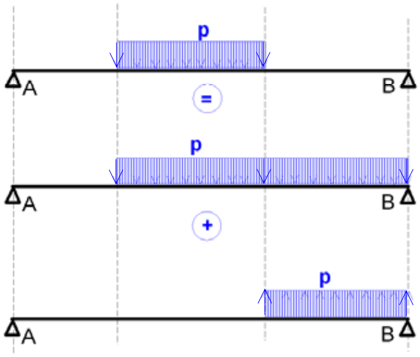
$$\Rightarrow \quad C_1 = -15$$

$$EI.v(x) = \frac{5}{3}.\langle x\rangle^{3} - \frac{5}{3}.\langle x-1\rangle^{3} - \frac{5}{3}.\langle x-3\rangle^{3} + \frac{5}{3}.\langle x-4\rangle^{3} - 15.x$$

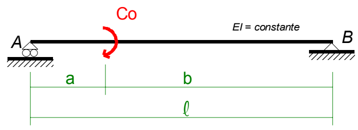
- **la flèche** à mi-travée (x=2 m) a pour expression :

$$EI.v_{max} = \frac{5}{3}.2^3 - \frac{5}{3}.1^3 - 30 \text{ donc } \quad v_{max} = \frac{-55}{3EI}$$

• Exemple 2 : Charges appliquées « en partie »



• Exemple 3



$$f_d(x) = -\frac{Co}{\ell}.\langle x-0\rangle^{-1} + Co.\langle x-a\rangle^{-2} + \frac{Co}{\ell}.\langle x-\ell\rangle^{-1}$$

$$-V(x) = -\frac{Co}{\ell}.\langle x-0\rangle^{0} + Co.\langle x-a\rangle^{-1} + \frac{Co}{\ell}.\langle x-\ell\rangle^{0}$$

$$M(x) = -\frac{Co}{\ell}.\langle x-0\rangle^{1} + Co.\langle x-a\rangle^{0} + \frac{Co}{\ell}.\langle x-\ell\rangle^{1}$$

$$EI.w(x) = -\frac{Co}{2\ell}.\langle x-0\rangle^{2} + Co.\langle x-a\rangle^{1} + \frac{Co}{2\ell}.\langle x-\ell\rangle^{2} + C_1$$

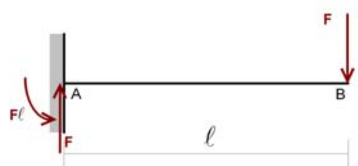
$$EI.v(x) = -\frac{Co}{6\ell}.\langle x-0\rangle^{3} + \frac{Co}{2}.\langle x-a\rangle^{2} + \frac{Co}{6\ell}.\langle x-\ell\rangle^{3} + C_1.x + C_2$$

- **conditions aux limites :**
  - * pour x = 0 $\Rightarrow$ v(0) = 0 donc C2 = 0
  - * pour x = $\ell \Rightarrow v(\ell)$ = 0 donc $C_1 = \frac{Co}{6}\left(\ell^2 - 3b^2\right)$

$$EI.w(x) = \frac{-Co}{2\ell}.\langle x\rangle^{2} + Co.\langle x-a\rangle^{1} + \frac{Co}{2\ell}.\langle x-\ell\rangle^{2} + \frac{Co}{6}.\left(\ell^2 - 3b^2\right)$$

$$EI.v(x) = \frac{-Co}{6\ell}.\langle x\rangle^{3} + \frac{Co}{2}.\langle x-a\rangle^{2} + \frac{Co}{6\ell}.\langle x-\ell\rangle^{3} + \frac{Co}{6}.\left(\ell^2 - 3b^2\right).x$$

• Exemple 4



$$f_d(x) = -F\ell.\langle x-0\rangle^{-2} + F.\langle x-0\rangle^{-1} + F.\langle x-\ell\rangle^{-1}$$

$$-V(x) = -F\ell.\langle x-0\rangle^{-1} + F.\langle x-0\rangle^{0} + F.\langle x-\ell\rangle^{0}$$

$$M(x) = -F\ell.\langle x-0\rangle^{0} + F.\langle x-0\rangle^{1} + F.\langle x-\ell\rangle^{1}$$

$$EI.w(x) = -F\ell.\langle x-0\rangle^{1} + \frac{F}{2}.\langle x-0\rangle^{2} + \frac{F}{2}.\langle x-\ell\rangle^{2} + C1$$

$$EI.v(x) = -\frac{F\ell}{2}.\langle x-0\rangle^{2} + \frac{F}{6}.\langle x-0\rangle^{3} + \frac{F}{6}.\langle x-\ell\rangle^{3} + C1.x + C2$$

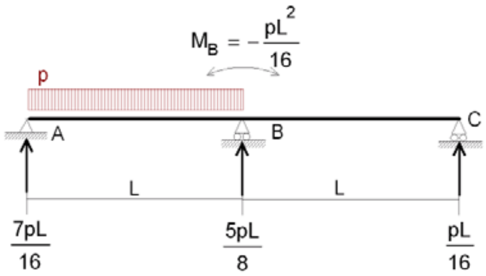
• **conditions aux limites :**

* pour x = 0 $\Rightarrow$ v(0) = 0 donc C2 = 0

* pour x = 0 $\Rightarrow$ w(0) = 0 donc C1 = 0

• **pour x = ℓ :** $EI.v(\ell) = -\frac{F.\ell^3}{2} + \frac{F.\ell^3}{3} = -\frac{F.\ell^3}{3}$

• *Exemple 5*



$$M(x) = \frac{7pL}{16}\langle x\rangle^1 - \frac{p}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{5pL}{8}\langle x-L\rangle^1 + \frac{p}{2}\langle x-L\rangle^2 - \frac{pL^2}{16}\langle x-L\rangle^0 + \frac{pL}{16}\langle x-2L\rangle^1$$

$$EIw(x) = \frac{7pL}{32}\langle x\rangle^2 - \frac{p}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{5pL}{16}\langle x-L\rangle^2 + \frac{p}{6}\langle x-L\rangle^3 - \frac{pL^2}{16}\langle x-L\rangle^1 + \frac{pL}{32}\langle x-2L\rangle^2 + C1$$

$$EIv(x) = \frac{7pL}{96}\langle x\rangle^3 - \frac{p}{24}\langle x\rangle^4 + \frac{5pL}{48}\langle x-L\rangle^3 + \frac{p}{24}\langle x-L\rangle^4 - \frac{pL^2}{32}\langle x-L\rangle^2 + \frac{pL}{96}\langle x-2L\rangle^3 + C1.x + C2$$

• **conditions aux limites :**

* pour x = 0 $\Rightarrow$ v(0) = 0 donc C2 = 0

* pour x = L $\Rightarrow$ v(L) = 0 donc :

$$\frac{7pL^4}{96} - \frac{pL^4}{24} + C1.L = 0 \quad \Rightarrow C1 = \frac{-3pL^3}{32}$$

• **valeurs particulières :**

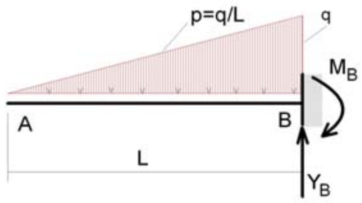
* pour $x = \frac{L}{2}$ on a :

$$EIv(L/2) = \frac{7pL}{96}.\left(\frac{L^3}{8}\right) - \frac{p}{24}.\left(\frac{L^4}{16}\right) - \frac{pL^3}{32}.\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7}{768}pL^4$$

* pour $x = \frac{7L}{16}$ on a :

$$M_{max} = \frac{7pL}{96}.\left(\frac{7L}{16}\right) - \frac{p}{2}.\left(\frac{49L^2}{256}\right) = \frac{49}{512}pL^2$$

• *Exemple 6*



$$f_d(x) = -p.\langle x-0\rangle^1 + Y_B.\langle x-L\rangle^{-1} + M_B.\langle x-L\rangle^{-2}$$

$$-V(x) = -\frac{p}{2}.\langle x-0\rangle^2 + Y_B.\langle x-L\rangle^0 + M_B.\langle x-L\rangle^{-1}$$

$$M(x) = -\frac{p}{6}.\langle x-0\rangle^3 + Y_B.\langle x-L\rangle^1 + M_B.\langle x-L\rangle^0$$

$$EIw(x) = -\frac{p}{24}.\langle x-0\rangle^4 + \frac{Y_B}{2}.\langle x-L\rangle^2 + M_B.\langle x-L\rangle^1 + C1$$

$$EIv(x) = -\frac{p}{120}.\langle x-0\rangle^5 + \frac{Y_B}{6}.\langle x-L\rangle^3 + \frac{M_B}{2}.\langle x-L\rangle^2 + C1.x + C2$$

• **conditions aux limites :**

* pour x = L $\Rightarrow$ w(L) = 0 donc $C1 = \frac{pL^4}{24}$

* pour x = L $\Rightarrow$ v(L) = 0 donc $C2 = -\frac{pL^5}{30}$

• **valeur particulière :**

* pour $x = 0$ on a : $v_A = -\frac{pL^5}{30.EI}$