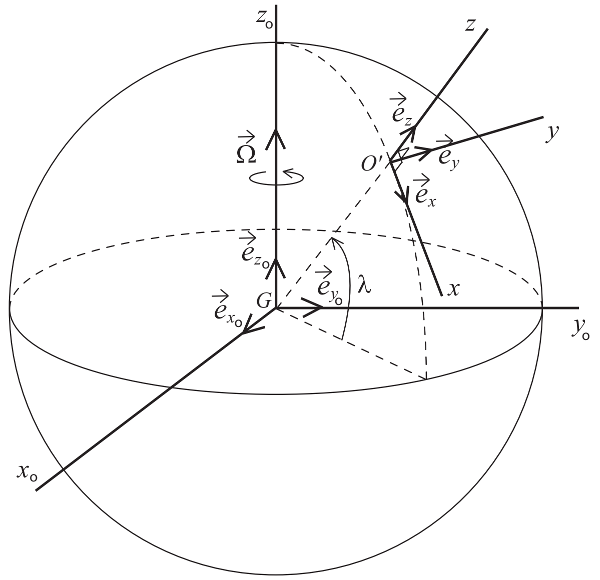
Devoir

Pendule de Foucault

à rendre pour le 21 avril 2008

En 1852, le Physicien français J. B. L. Foucault suspendit une masse ponctuelle ($m = 30$kg) au sommet A de la coupole du Panthéon au moyen d'un fil rectiligne de masse négligeable et de longueur $\ell = 67$m. Le point A est placé à une hauteur ℓ suivant la verticale du lieu de latitude λ.

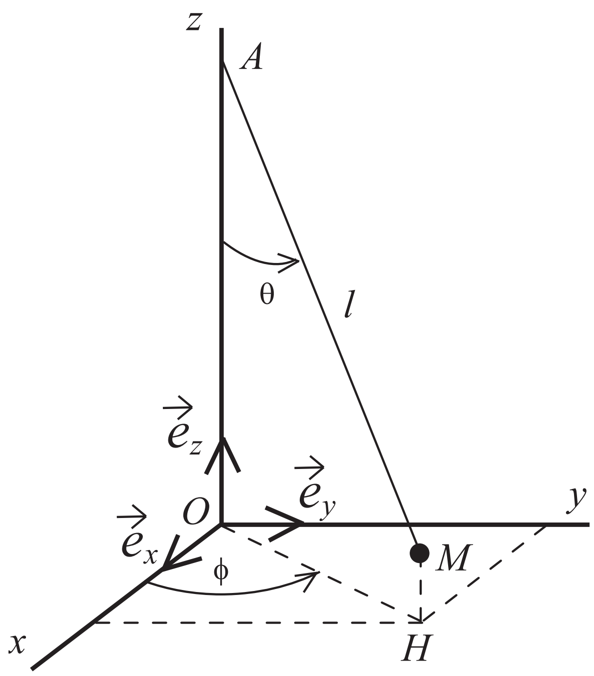
On notera $\mathcal{R}_g(G, \overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}})$ le repère géocentrique et $\mathcal{R}_\lambda(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le repère terrestre local à la latitude λ (voir figure).



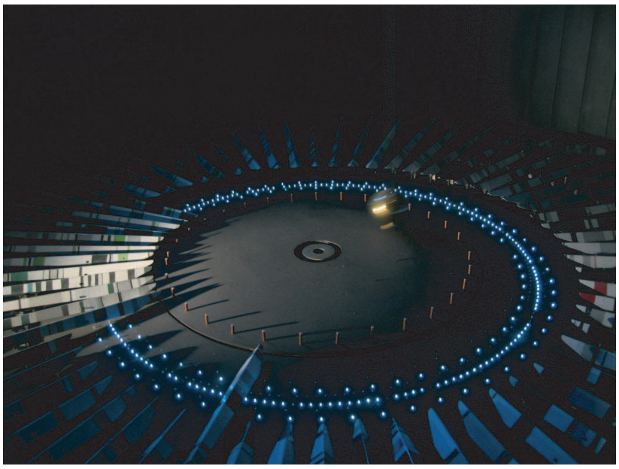
1. Quelles sont, en fonction de ℓ, θ et ϕ, les expressions des coordonnées cartésiennes x, y, z du point M dans le repère $\mathcal{R}_\lambda$?
2. En supposant que les oscillations du pendule sont très petites ($\theta \ll 1$), montrer, en première approximation, que le mouvement de celui-ci peut-être considéré comme plan. Pour cela, on montrera en négligeant les termes d'ordres supérieurs ou égals à θ^2 que $x \simeq \ell\theta\cos\phi$, $y \simeq \ell\theta\sin\phi$ et $z \simeq 0$.
3. En se rappelant que l'accélération locale de la pesanteur $\overrightarrow{g}$ prend déjà en compte les effets de l'accélération d'entraînement, énumérer les forces agissant sur le pendule dans le repère $\mathcal{R}_\lambda$. Justifier simplement pourquoi la tension du fil peut être écrite comme $\overrightarrow{T} = T\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\ell}$.
4. En considérant que $x, y \ll \ell$, ou de manière équivalente que $\theta \ll 1$, montrer que l'intensité de la tension du fil est $T \simeq mg$.
5. En utilisant la seconde loi de Newton, montrer que les coordonnées de M dans le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ obéissent au système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2\Omega\sin\lambda\ \dot{y} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\sin\lambda\ \dot{x} + \omega^2 y = 0 \end{array} \right. .$$

   Justifier les approximations faites pour arriver à ce résultat. Que représentent les constantes Ω et ω ?



6. Résoudre le système d'équations différentielles précédent en posant $\xi = x + iy$ et en utilisant les conditions initiales suivantes : $x(0) = x_m$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Pour alléger l'écriture on pourra poser $\Omega_1 = \Omega \sin \lambda$ et $\omega_1^2 = \Omega_1^2 + \omega^2$.
7. On fait le changement de repère suivant $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}) \rightarrow (O, \overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y})$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_X}}) = (\widehat{\overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_Y}}) = -\Omega_1 t$. Les vecteurs $\overrightarrow{e_X}$ et $\overrightarrow{e_Y}$ tournent par rapport aux vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ avec une vitesse angulaire $-\Omega_1$. Montrer que dans le repère $(O, \overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y})$ la trajectoire du pendule est une ellipse dont on donnera le demi-grand axe et le demi-petit axe. Justifier le fait que cette ellipse soit très aplatie (et ainsi le fait qu'on à l'impression que le pendule oscille dans un plan vertical).
8. Faire un schéma donnant l'allure de la trajectoire du pendule dans le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
9. Les axes de cette ellipse très aplatie tournent dans le sens inverse du sens de rotation de la terre. Quelle est la période T de ce mouvement ? Calculer T pour le pendule se trouvant au Musée du Temps dans le Palais Granvelle de Besançon.
10. Interpréter d'un point de vue Physique ce qu'il se passe en Nouvelle-Zélande, au pole Nord et à l'équateur ? (Calculer en particulier les période T).



11. D'un point de vue fondamental, que met en évidence l'expérience du pendule de Foucault ? Si on construit un pendule en un point du globe, quelle information géographique peut-on tirer de la période de rotation du plan d'oscillation.
12. Facultatif : Visiter la tour du palais Granvelle où se trouve un pendule de $13,11$m de longueur et de $2,25$m d'amplitude. Vous pourrez alors confronter vos résultats théoriques à l'expérience.

Rappels sur la résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants

On désire résoudre l'équation différentielle suivante : $ay'' + by' + cy = 0$.
Considérons pour cela les racines de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, qui sont

$$r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta.$$

La solution de l'équation différentielle est alors :

- si $r_+ = r_- = r$: $y(x) = e^{rx}(A + Bx)$
- si $r_+ \neq r_-$: $y(x) = A\,e^{r_+ x} + B\,e^{r_- x} = e^{\alpha x}\left(A\,e^{\beta x} + B\,e^{-\beta x}\right)$

En toute généralité, les racines r_+ et r_- peuvent être complexes ainsi que les coefficients A et B.