



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit et de la connaissance le développement massif du brevetage et du droit à la propriété intellectuelle à tout va.

Toute reproduction partielle ou totale du présent support électronique est fortement recommandée (évitez le papier quand même pour des raisons écologiques évidentes...) sans autorisation de l'auteur.

Le concept de propriété intellectuelle est un crime contre l'humanité...!

Pour les personnes souhaitant citer le présent document dans leurs travaux voici si besoin un exemple inspiré de la norme ISO 690/AFNOR:

ISOZ Vincent, Éléments de mathématiques appliquées, Lausanne, Éd. Privées, 2012, 3^{ème} version, (1^{ère} version 2001, 2^{ème} version 2005), 729 p., 1'897 nb p., PDF, 21×29.7 cm (ISBN 978-2-8399-0932-7)

Nouvelle présentation
Édition Privée Sciences.ch
22 Chemin de Chandieu – 1006 Lausanne – Suisse



Avant d'imprimer, pensez à l'environnement

Le code de la propriété intellectuelle ne s'applique en aucun cas sur le contenu de ce document quels que soient les avis divergents des différents auteurs du présent PDF. Toute représentation ou reproduction du présent document par quelque procédé que ce soit constitue un pas vers l'acquisition de la connaissance motivée par les auteurs au droit de tout à chacun d'accéder à l'information.

ISBN 978-2-8399-0932-7



9 782839 909327

34. MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Au sens strict du terme, la mécanique des milieux continus (abrégée M.M.C.) est la branche de la mécanique qui a comme propos l'étude des mouvements, des déformations, des champs de contraintes au sein de milieux continus.

Définition:

D1. Nous désignons par "**milieu**", tout fluide (solide, liquide, gaz ou plasma selon ce que nous avons vu en thermodynamique), déformable ou non, quand nous le considérons d'un point de vue macroscopique, par opposition à une description corpusculaire.

D2. Nous désignons par "**milieu continu**", un milieu tel que si M et M' appartiennent à un milieu et si M' appartient au voisinage M , alors quelle que soit la déformation subie par ce milieu, dM' appartiendra au voisinage de dM .

Cette branche apparaît souvent comme la science de l'ingénieur qui permet de comprendre et de décrire le monde matériel qui nous entoure et les phénomènes courants qui s'y déroulent: mouvements de liquides, de gaz, vol des avions, hélicoptères, fusées, satellites, navigation des bateaux, déformations des corps solides, structure interne des étoiles, etc. Par ses attaches à la mécanique thermique (thermodynamique), elle s'étend jusqu'à la thermique, l'énergétique, l'acoustique.

Prenant en compte les comportements des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, l'acoustique, la plasticité et d'autres comportements. Elle est la clé de ce que nous appelons aujourd'hui la "modélisation", qui n'est autre que l'art d'analyser un phénomène physique et de le décrire en termes mathématiques, ce qui permet de l'étudier avec la rigueur propre à cette discipline.

Cette section du site est divisée en 4 parties principales: solides, liquides, gaz et plasmas (dont certaines notions ont délibérément été développées dans le chapitre de Musique Mathématique du site). Dans chaque partie, nous introduirons les outils mathématiques spécifiques à l'étude de tel ou tel milieu continu avec une complexité (toute relative) croissante. Cependant, par choix, il a été décidé d'exposer les théorèmes avec les outils mathématiques les plus simples possibles mais tout en arrivant aux mêmes résultats. Ainsi, par exemple, la démonstration de l'équation de Navier-Stokes qui prendrait 150 pages de développements mathématiques rigoureux n'en prend plus que 27. Il y a donc un avantage non négligeable aussi bien pour l'auteur que pour le lecteur à procéder ainsi.

Remarque: Concernant les équations de Navier-Stokes, nous donnerons aussi des exemples pratiques de celles-ci lors de notre étude de la météorologie (cf. chapitre de Génie Marin & Météo).

1. SOLIDES

Des atomes d'un même élément ou d'éléments différents s'assemblent en des édifices spécifiques. Cela conditionne la force de leurs interactions électriques, qui définissent la structure finale de la substance. Dans les conditions normales sur notre planète, la matière existe à l'état solide, liquide, gaz ou plasma. Si les forces interatomiques sont assez intenses, la collection de particules conserve sa forme et son volume.

Cette propriété de conserver la forme et le volume, ainsi que des propriétés élastiques distinguent les solides.

1.1. PRESSIONS

Les notions de "compression" et "contrainte" (que nous pouvons englober abusivement dans le terme de "pression") sont de première importance en mécanique des fluides (solides inclus donc!). Il convient donc de définir ces différents types de pression avec un minimum de rigueur!

Définitions:

D1. Nous appelons "**pression de compression**", notée traditionnellement P , le rapport exprimé par la force F qui s'exerce (s'appuie) sur un élément de surface S à la perpendiculaire de celle-ci. Ainsi, sous forme scalaire:

$$P = \frac{F}{S} \quad (34.1)$$

Remarque: Si une force agit sur une surface finie, nous parlons alors aussi de "**force répartie**".

D2. Nous appelons "**pression de contrainte**" le rapport exprimé par la force F qui tire sur un élément de surface S non nécessairement à la perpendiculaire, force qui peut dès lors être décomposée en deux vecteurs respectivement tangent et normal. Ainsi, sous forme vectorielle:

$$\vec{\sigma} + \vec{\tau} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

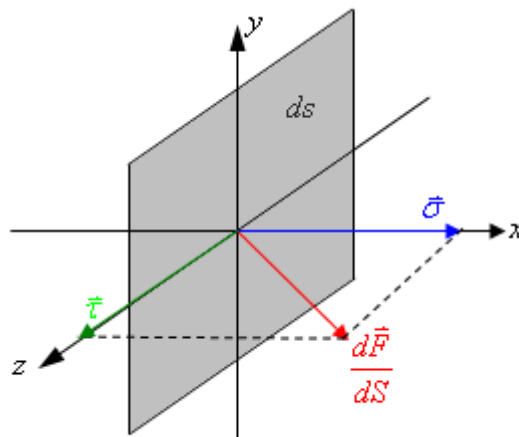


Figure: 34.1 - Illustration des contraintes tangentielle et normale

où $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont respectivement la "**contrainte normale**" et la "**contrainte tangentielle**" (parfois indiquées avec un s en indice pour indiquer que c'est par rapport à une surface).

Nous pourrions très bien englober les deux définitions ci-dessus en une seule et travailler avec les signes des forces. Mais par souci de cohérence avec ce qui est enseigné dans les écoles, nous garderons ces deux définitions qui s'identifient par définition par le fait que leurs forces sont opposées par rapport à un élément de surface S .

1.2. ÉLASTICITÉ DES SOLIDES

D'une manière ou d'une autre, une contrainte de compression ou de traction peut déformer le triplet hauteur, largeur, épaisseur d'un corps. S'attaquer directement à l'étude d'un cas qui déforme ces trois paramètres est un peu long et sera abordé plus bas dans la partie traitant de la détermination de l'expression du module de Young de cisaillement.

Mais il est utile, ne serait-ce que du point de vue du vocabulaire de donner un exemple à partir du cas le plus simpliste qui puisse être. Si nous imaginons un corps élastique à une dimension (n'ayant ni hauteur, ni largeur mais juste une longueur) sous l'application de deux forces de contraintes parfaitement colinéaires mais antagonistes, nous pouvons imaginer que le corps en considération s'allonge d'un certain facteur.

Définition: La "**déformation normale**" sous des forces axiales et antagonistes est donnée par le rapport entre la variation de longueur du corps sur sa longueur initiale (soit: l'allongement relatif) tel que:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta L|}{L_0} \quad (34.2)$$

Cette relation est une forme extrêmement simplifiée de tous les types de déformations qui peuvent exister et que nous verrons plus loin en détails.

Il y a nécessairement une relation entre forces de compression et de traction et la variation de dimension d'un corps. Cette relation est dépendante de la structure atomique du matériau et devrait rigoureusement faire appel à la physique quantique pour être déterminée (nous nous en abstenons cependant dans cette section du site). Nous observons cependant suivant les matériaux des caractéristiques diverses qui intéressent au plus haut point les ingénieurs:

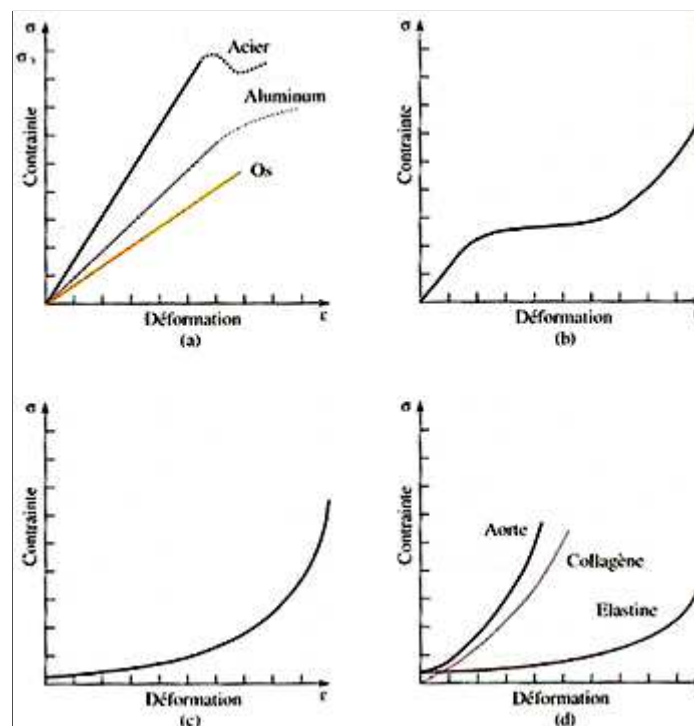


Figure: 34.2 - Comportement sous contrainte/compression pour certains matériaux

Les figures ci-dessus représentent la variation de la contrainte de compression en fonction de la

déformation pour certains matériaux (habituellement nous représentons ces caractéristiques en inversant les axes).

- Les matériaux ductiles comme l'acier doux (a), cessent d'être linéaires à la limite d'élasticité notée σ_e ci-dessus.
- Sous traction les polymères (b) caoutchouteux s'allongent d'abord en dépliant leurs molécules (cf. chapitre de Génie Des Matériaux) puis en tirant sur les liaisons chimiques (cf. chapitre de Chimie Quantique).
- La plupart des matériaux biologiques (c) sont sous contrainte, même lorsqu'ils ne sont pas déformés. La peau, par exemple, est comme un gant de caoutchouc enveloppant le corps.
- L'élastine (d) est habituellement renforcée de collagène dans les systèmes biologiques comme les artères. Un tendon est fait principalement de collagène.

Dans un cas plus général, les ingénieurs ont pour habitude de définir les points représentés ci-dessous dans leurs mesures d'essais de traction:

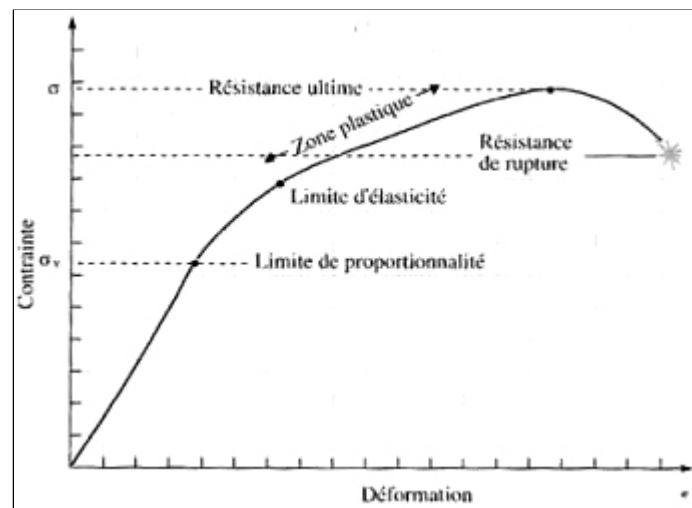


Figure: 34.3 - Définitions de termes importants pour l'étude des déformations

La caractéristique ci-dessus comporte une partie linéaire comme c'est le cas d'une certaine classe de matériaux. Cela signifie que la pente de la caractéristique est une constante, qui reflète la déformation élastique du matériau sous l'effet de la contrainte croissante. Cette contrainte élastique par unité de déformation définit le "**module de Young**" (il n'y a pas de composante tangentielle dans ce cas d'étude!):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (34.3)$$

cette relation étant valable aussi bien en contraintes de compression qu'en traction. Nous reviendrons sur cette relation dans les paragraphes suivants.

Remarques:

R1. La "**rhéologie**" est une partie de la mécanique qui étudie la plasticité, l'élasticité, la viscosité et la fluidité caractéristiques des corps déformables. C'est une branche très importante de l'ingénierie industrielle.

R2. Attention les calculs qui vont suivre sont relativement longs et difficiles et ce même si nous avons essayé de les simplifier au maximum. Cependant, tous les résultats nous seront infiniment utiles que ce soit pour déterminer l'équation de Navier-Stokes ou pour l'étude de la résistance des matériaux (cf. chapitre de Génie Mécanique)!

1.2.1. LOI DE HOOKE

Étant donnés les définitions données précédemment, nous obtenons la relation:

$$\frac{|\Delta L|}{L_0} = \frac{F}{E \cdot S} \quad (34.4)$$

qui est par définition la "**loi linéaire de Hooke**" en contrainte normale uniquement!

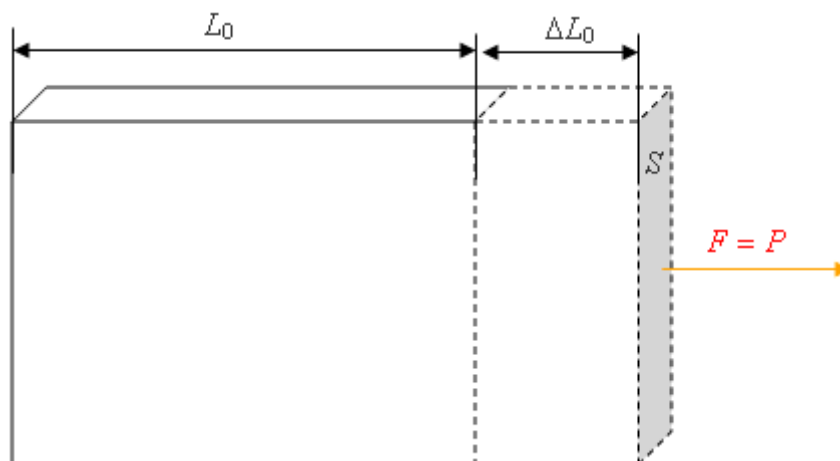


Figure: 34.4 - Illustration de l'effet d'une contrainte normale

Il est assez intuitif de supposer que plus la force de liaison des atomes constituant le matériau étudié est grande, plus grande est la force à appliquer pour éloigner les atomes, donc pour étirer le corps. Les solides, qui ont des grandes forces de liaisons, ont une haute température de fusion (cela est approfondi dans le chapitre traitant de la Chimie Quantique).

Si nous notons:

$$\frac{E \cdot S}{L_0} = k \quad (34.5)$$

Nous nous retrouvons avec la loi que nous connaissons:

$$F = k |\Delta L| \quad (34.6)$$

qui est la force de rappel des ressorts (cf. chapitre de Mécanique Classique et Génie Mécanique).

Mais il existe plusieurs types de contraintes avec leurs modules respectifs. Ainsi voici les définitions des plus importantes dans la partie linéaire de leur caractéristique avec le schéma explicatif associé:

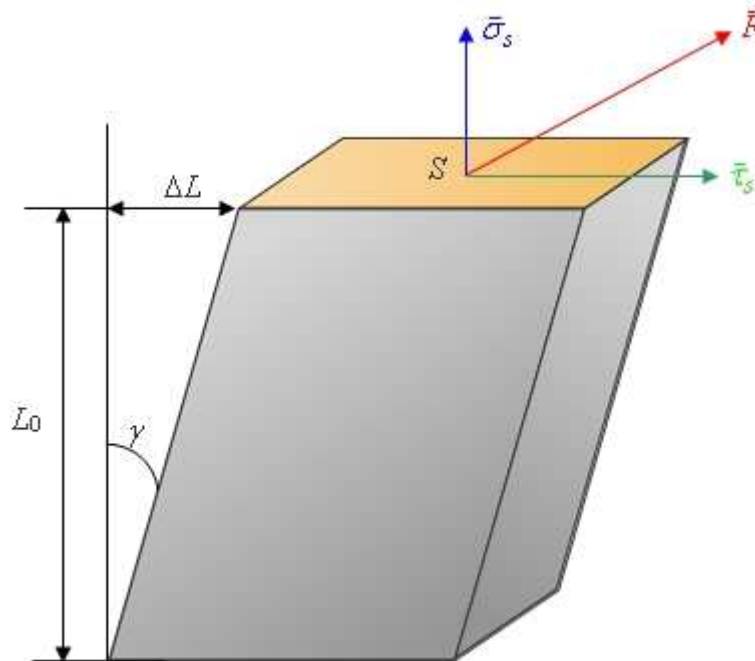


Figure: 34.5 - Illustration de l'effet d'une contrainte de cisaillement

D1. Nous définissons le "**module de cisaillement**" ou "**module de rigidité**" par le rapport de la composante normale de la force (pression de compression) à la déformation de cisaillement:

$$G = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} = \frac{F_M / S}{\gamma} \quad (34.7)$$

où le numérateur est appelé "**contrainte de cisaillement**" et où γ est "**l'angle de déformation**". Généralement cet angle étant petit, nous avons l'approximation:

$$\varepsilon_s = \gamma \cong \tan(\gamma) = \frac{|\Delta L|}{L_0}$$

S est la surface de la face supérieure ou inférieure du corps déformé représenté ci-dessus.

D2. Nous définissons le "**module d'élasticité de glissement**", appelé également "**module de glissement**" ou encore "**module de Coulomb**" par le rapport de la composante tangentielle de la force (pression de contrainte) à la déformation de cisaillement:

$$G = \frac{\tau_s}{\varepsilon_s} = \frac{F_T / S}{\gamma} = \frac{E}{2(1+\eta)} \quad (34.8)$$

où η est le "**coefficient de Poisson**" dont nous démontrerons l'origine un peu plus bas dans le présent texte.

Remarquez que bien que le numérateur de la définition précédente soit une force divisée par une

surface, il ne s'agit pas d'une pression car la force est tangentielle (d'où le T en indice de F) à la surface.

C'est parce que toute force peut être décomposée en une force normale et tangentielle (voir la définition plus haut de la pression de compression et de la pression de contrainte) que nous avons les deux définitions distinctes ci-dessus. Dans la grande majorité des cas de laboratoires, nous nous arrangeons pour avoir une force purement tangentielle (d'où le T en indice de F) ou purement normale (d'où le N en indice de F) à la surface S .

Dans la pratique il n'est souvent fait usage que de la deuxième définition et ce à un point tel que cette dernière est souvent assimilée au "module de rigidité" aussi...

Exemple:

Une chose intéressante (pour la parenthèse...) si nous considérons que les plaques tectoniques sont en cisaillement entre elles nous avons alors d'après le module de glissement:

$$F_T = \gamma \cdot G \cdot S = \frac{|\Delta L|}{L_0} \cdot G \cdot S \quad (34.9)$$

Or pour une plaque tectonique en frottement de longueur L_0 sur une hauteur H :

$$F_T = \frac{|\Delta L|}{L_0} \cdot G \cdot (L_0 \cdot H) = G \cdot \left(\frac{|\Delta L|}{L_0} \right) \cdot (L_0 \cdot H) \quad (34.10)$$

et puisque l'énergie est une force multipliée par une distance, il vient:

$$E = F_T \cdot \Delta L = \left[G \cdot \left(\frac{|\Delta L|}{L_0} \right) \cdot (L_0 \cdot H) \right] \Delta L = G \cdot \Delta L^2 \cdot H \quad (34.11)$$

qui est typiquement l'énergie dégagée par le cisaillement de la friction de deux plaques tectoniques dont les surfaces de contact ont une hauteur moyenne H , une longueur initiale L_0 et qui subissent une déformation de ΔL .

Typiquement pour un tremblement de terre du type Sumatra (2004), nous avons:

$$\Delta L \cong 10 \text{ [m]}, H \cong 10'000 \text{ [m]}, L_0 \cong 10'000 \text{ [m]}, G \cong 10^{10} \text{ [Pa]} \quad (34.12)$$

Dès lors il vient:

$$E \cong 10^{16} \text{ [J]} \quad (34.13)$$

en d'autres termes... mille fois l'énergie de la bombe nucléaire d'Hiroshima.

Soit en notant M la magnitude sur l'échelle de Richter:

$$E \cong 10^{5+1.44M} = 10^{16} \Rightarrow M \cong 7.6 \quad (34.14)$$

alors que les estimations donnent un intervalle de 6.2 à 8.5... donc, nous ne sommes pas trop mauvais dans l'approche théorique.

Voilà pour un exemple non appliqué à l'industrie...

D3. Nous définissons le "**module de compressibilité omnidirectionnel**", comme le rapport de la contrainte volumique à la déformation volumique (nous démontrerons plus loin les développements mathématiques qui amènent au dernier terme de la relation):

$$\kappa = \frac{\varepsilon_v}{\sigma} = \frac{F/S}{\Delta V/V_0} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \quad (34.15)$$

Nous pourrions encore définir beaucoup de modules tels que le module de flexion, de flexion pure, de flexion composée, de torsion... Nous étudierons certains d'entre eux plus loin.

Pour chacune des différentes définitions de modules que nous pouvons envisager, nous pouvons définir une loi de Hooke qui lui est adapté. Cependant, tout cela peut paraître assez arbitraire, mais au fait il n'en est rien car toutes les définitions de modules que nous avons vues précédemment sont un cas particulier d'une relation mathématique généralisée qui sera démontrée sur ce site dans un proche avenir.

1.2.2. MODULE DE GLISSEMENT

La condition nécessaire pour qu'un solide rigide soit en équilibre statique est comme nous l'avons vue dans le chapitre de Mécanique Classique, que la résultante des forces que l'extérieur exerce sur le corps soit nulle:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad (34.16)$$

Cependant, quand un solide subit des contraintes et qu'il peut en subir, il peut y avoir déformation qui peut être suivie d'une rupture ou d'une modification similaire. Plus, précisément, il y a "**déformation**" d'un corps (non nécessairement solide) quand les distances entre certains points du corps ont changé.

Lorsque dans l'étude théorique de l'élasticité, nous excluons les modifications du corps étudié telles que les ruptures, nous disons que nous nous restreignons aux "**déformations élastiques**".

La géométrie et la physique des déformations peuvent être complexes. Leur description se déduit de celle d'un certain nombre de déformations élémentaires dont nous préciserons plus loin les caractéristiques.

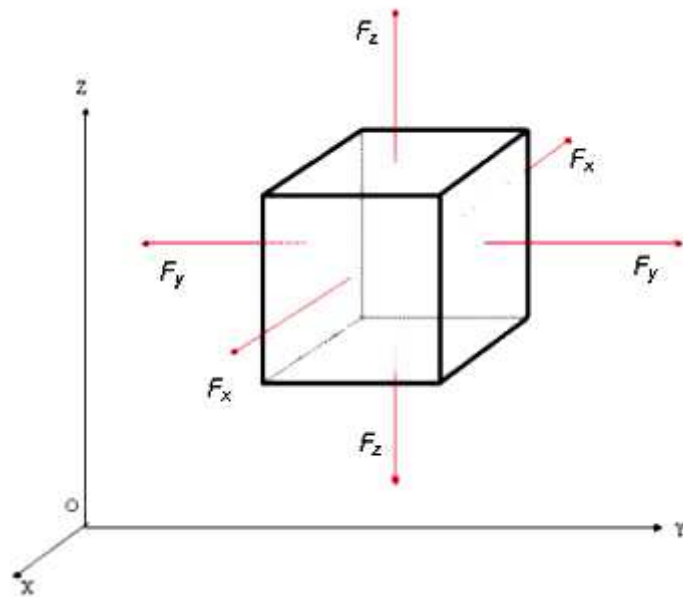


Figure: 34.6 - Cube sous contraintes normales

Les forces scalaires de contraintes de traction F_x, F_y, F_z engendrent sur leurs faces respectives des tensions "normales" (perpendiculaires donc!):

$$\sigma_x = \frac{F_x}{S_x} \quad \sigma_y = \frac{F_y}{S_y} \quad \sigma_z = \frac{F_z}{S_z} \quad (34.17)$$

En admettant que la force F_x agit seule, la déformation unitaire est par définition:

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (34.18)$$

Lorsqu'un parallélépipède est soumis à un effort de traction F_y , il y a intuitivement contraction des dimensions dans la direction x . Contraction observable de façon tout aussi intuitive pour F_z .

Nous avons alors si F_y agit seule:

$$\varepsilon''_x = -\eta \frac{\sigma_y}{E} \quad (34.19)$$

où le signe "-" indique une contraction et où η est un coefficient appelé "**coefficient de Poisson**".

Si F_z agit seule:

$$\varepsilon'''_x = -\eta \frac{\sigma_z}{E} \quad (34.20)$$

En acceptant le principe de superposition des forces, l'effet produit par plusieurs forces agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des forces superposées agissant séparément. Dès lors:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x \quad (34.21)$$

Ceci est admissible, étant donné la linéarité des équations unissant la déformation unitaire et la tension normale. Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \eta (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \eta (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \eta (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{aligned} \quad (34.22)$$

En ayant procédé de manière identique pour les deux autres directions OY et OZ .

À partir des relations précédentes, il est aisé de trouver les équations unissant σ à ε :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\eta} \left[\varepsilon_x + \frac{\eta}{1-2\eta} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\eta} \left[\varepsilon_y + \frac{\eta}{1-2\eta} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\eta} \left[\varepsilon_z + \frac{\eta}{1-2\eta} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \end{aligned} \quad (34.23)$$

Soit un matériau soumis à des contraintes diverses. À l'intérieur de celui-ci, nous opérons, par la pensée, l'extraction d'un parallélépipède rectangle. Les faces de celui-ci sont sollicitées par des contraintes normales σ et tangentielles τ (sur le schéma ci-dessous le solide est en équilibre statique).

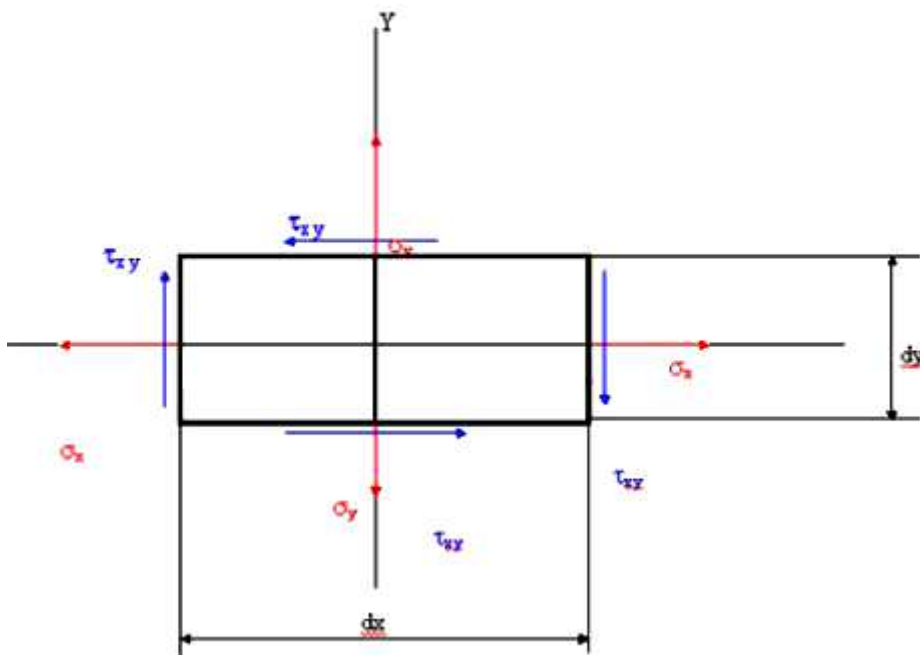


Figure: 34.7 - Illustration générique d'un matériau sous contraintes normales et tangentielles

Les contraintes normales σ et de tangentielles τ représentent les actions du parallélépipède de

matériau ôté mentalement sur les faces de l'élément examiné.

Il est intéressant (dans le sens que cela facilite l'analyse) de rechercher les contraintes qui existent dans un plan faisant un angle θ avec l'axe des x . Pour ce faire, nous imaginons un triangle de matière ayant un angle θ au sommet enlevé hors de la matière mentalement. Nous négligerons l'effet de la pesanteur.

Soit:

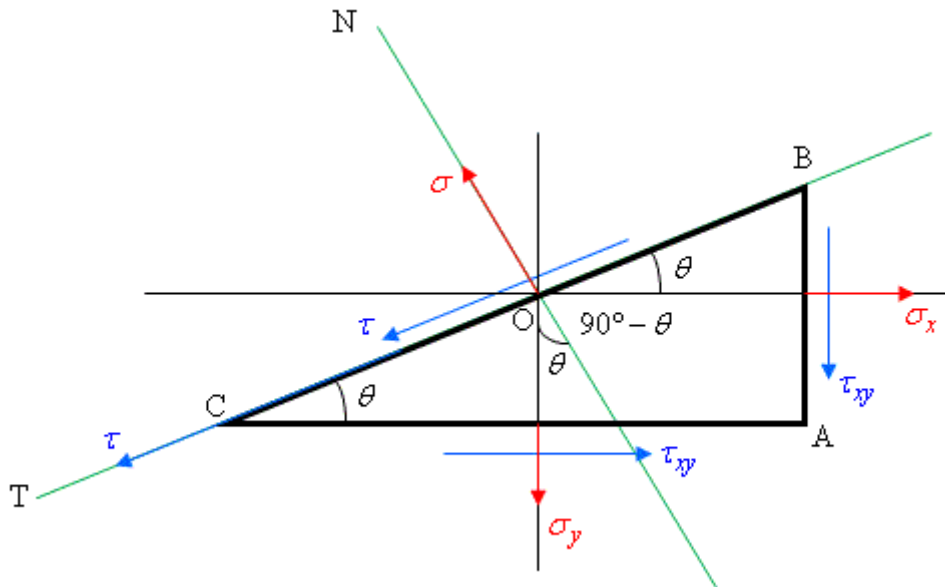


Figure: 34.8 - Recherche des expressions des contraintes dans un plan oblique

Posons:

$$\overline{CB} = ds, \overline{CA} = dx, \overline{AB} = dy \quad (34.24)$$

et dz étant l'épaisseur du solide (non représenté sur le schéma ci-dessus).

Sur la longueur ds , des contraintes apparaissent et se décomposent en contraintes normales σ et tangentes τ (ces dernières étant aussi appelées "**contraintes de cisaillement**" ou "**contraintes de flexion**").

Le problème consiste à établir les relations entre σ, τ et σ_x, σ_y et τ_{xy} .

Les conventions de signes sont:

- Les contraintes σ exerçant une traction sont positives alors que les tensions σ exerçant une compression sont négatives.
- Les contraintes τ ayant tendance à faire tourner le parallépipède dans le sens des aiguilles d'une montre, sont positives. Dans le sens antihoraire, elles seront négatives.

L'équation d'équilibre de projection sur la direction ON est:

$$\sigma_x dz ds - \left[\sigma_y dz dx \cos \theta + \sigma_x dz dy \cos(90^\circ - \theta) + \tau_{xy} dz dy \cos \theta + \tau_{xy} dz dx \cos(90^\circ - \theta) \right] = 0 \quad (34.25)$$

Rappelons que:

$$\sigma_i = \frac{F_{iN}}{S} \Leftrightarrow F_{iN} = S\sigma_i \quad (34.26)$$

Comme $dx = ds \cos \theta$ et $dy = ds \sin \theta$ nous avons:

$$\begin{aligned} \sigma ds &= \sigma_x ds \sin^2 \theta + \sigma_y ds \cos^2 \theta + \tau_{xy} ds \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} ds \sin \theta \cos \theta \\ \sigma &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (34.27)$$

comme:

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (34.28)$$

alors:

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2} (1 + \cos 2\theta) + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (34.29)$$

Finalement:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (34.30)$$

Conclusion: En fonction de σ_x , σ_y et τ_{xy} , il est possible de calculer la tension normale qui existe sur une surface plane quelconque d'angle θ .

L'équation d'équilibre de projection sur la direction de OT est:

$$\begin{aligned} \tau dz ds - \sigma_x dz dy \cos \theta + \tau_{xy} dz dy \cos(90^\circ - \theta) + \sigma_y dz dx \cos(90^\circ - \theta) - \tau_{xy} dz dx \cos \theta &= 0 \\ \tau ds &= \sigma_x ds \sin \theta \cos \theta - \sigma_y ds \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} ds \sin^2 \theta + \tau_{xy} ds \cos^2 \theta = 0 \\ \tau &= \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (34.31)$$

comme $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ alors finalement:

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (34.32)$$

Conclusion: En fonction de σ_x , σ_y et τ_{xy} , il est possible de calculer la tension τ tangentielle qui existe sur une surface plane quelconque d'angle θ .

Soit, à présent, la situation suivante:

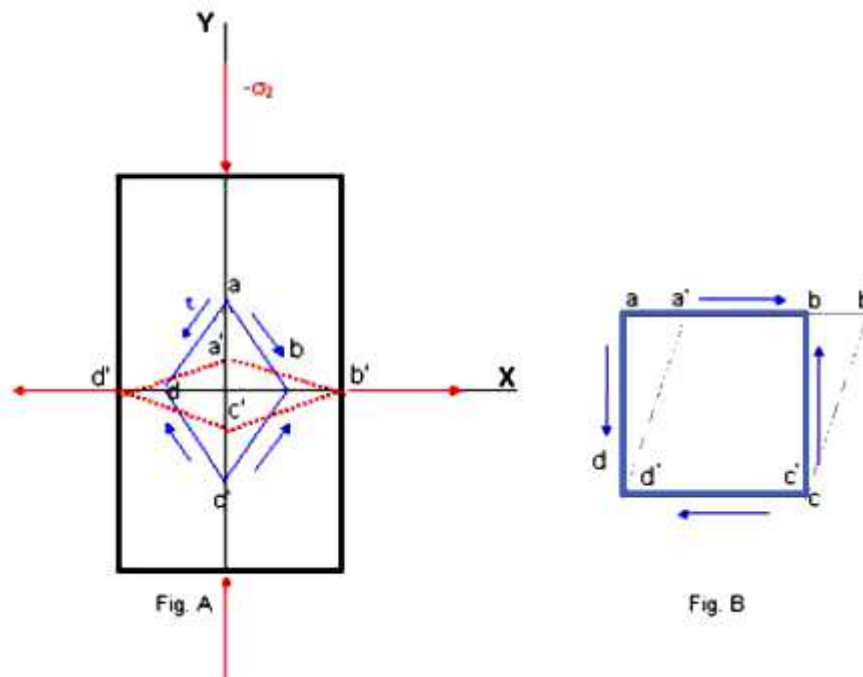


Figure: 34.9 - Mise en situation pour revenir au cas tridimensionnel

Il s'agit à gauche d'un bloc de matière dont l'on extrait virtuellement un petit plan de forme carrée (en bleu sur la figure de gauche) que l'on va étudier en ne prenant en premier lieu qu'un des triangles rectangles le composant pour ensuite étudier l'ensemble.

Avant la sollicitation, nous considérons donc le losange $abcd$ qui est en fait initialement un carré à $\pi/4$ suivant la direction OX (schéma perspective suite à la demande d'un internaute):

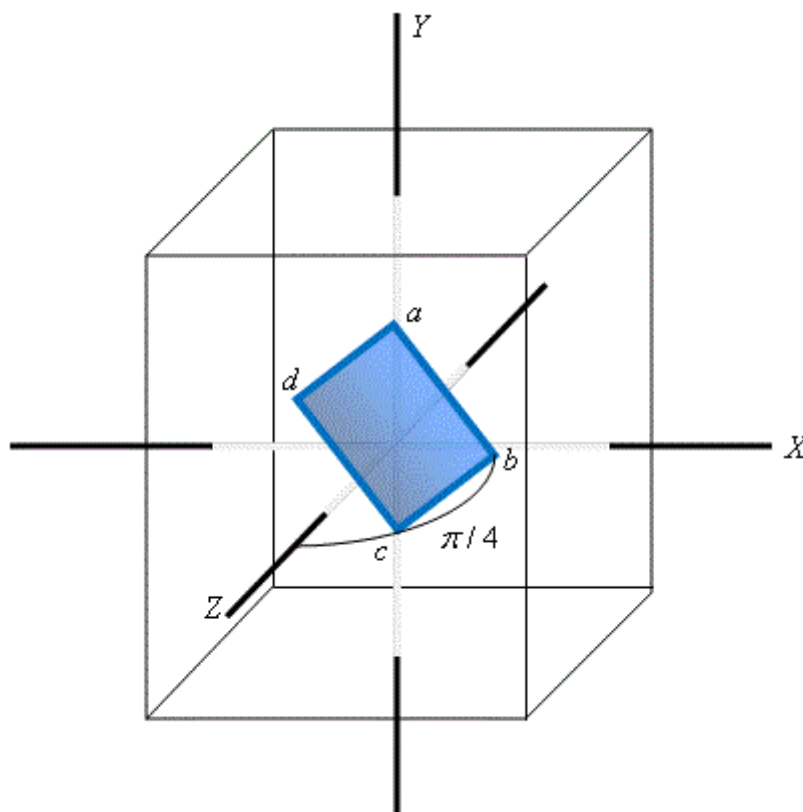


Figure: 34.10 - Situation initiale

Pendant la sollicitation, ce losange se déforme sous l'action des contraintes tangentielles décomposées en contraintes de cisaillement pures et devient le losange $a'b'c'd'$ (schéma perspective suite à la demande d'un internaute):

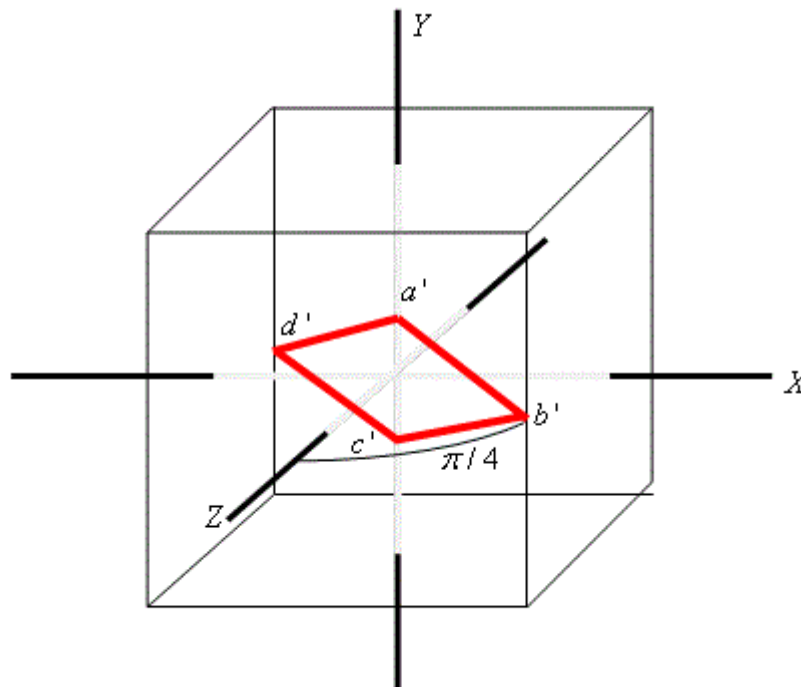


Figure: 34.11 - Situation finale

La diagonale bd est alors étendue et la diagonale ac est comprimée. L'angle en a qui valait $\pi/2$ vaut après déformation $\pi/2 + \gamma$ (en a'). De même, l'angle en b qui valait $\pi/2$ vaut à présent $\pi/2 - \gamma$ (Figure A).

Remarque: L'angle γ est appelé "angle de glissement" et nous le considérerons comme faible.

Nous pouvons nous rendre compte de l'effet de la déformation en isolant le losange et en lui faisant subir une rotation de $\pi/4$. Après déformation, nous avons la forme indiquée par les lignes en pointillés (Figure B).

L'angle de glissement étant petit, nous avons:

$$\frac{aa'}{ad} = \tan \gamma \approx \gamma \quad (34.33)$$

Donc γ représente le glissement du côté ab par rapport à dc divisé par la distance entre les deux plans ab et dc . L'analyse qui vient d'être effectuée reste valable quel que soit le corps solide ou liquide considéré.

Soit, à présent, le cas d'un solide élastique obéissant à la loi de Hooke. Le problème va consister à établir la relation entre l'angle de glissement γ et les contraintes tangentielles τ agissant sur les côtés du losange.

Soit le triangle rectangle oab . L'allongement du côté ob et le raccourcissement du côté oa pendant la

déformation s'obtiennent à partir des équations suivantes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \eta (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \eta (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \eta (\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned} \quad (34.34)$$

Comme:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \tau \quad \sigma_y = \sigma_2 = -\tau \quad \sigma_z = 0 \quad (34.35)$$

Nous avons:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\tau + \eta \tau] = \frac{(1+\eta)}{E} \tau \quad \text{et} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\tau - \eta \tau] = -\frac{(1+\eta)}{E} \tau \quad (34.36)$$

Donc:

$$oa' = oa + oa\varepsilon_y = oa(1 + \varepsilon_y) = oa \left[1 - \frac{(1+\eta)}{E} \tau \right] \quad (34.37)$$

alors la longueur oa' diminue si τ augmente .

$$ob' = ob + ob\varepsilon_x = ob(1 + \varepsilon_x) = ob \left[1 + \frac{(1+\eta)}{E} \tau \right] \quad (34.38)$$

donc ob' augmente si τ augmente.

Pour l'angle triangle rectangle $oa'b'$, nous avons:

$$\tan(oa'b') = \tan \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right) \right] = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{ob'}{oa'} = \frac{ob \left[1 + \frac{(1+\eta)}{E} \tau \right]}{oa \left[1 - \frac{(1+\eta)}{E} \tau \right]} = \frac{1 + \frac{(1+\eta)}{E} \tau}{1 - \frac{(1+\eta)}{E} \tau} \quad (34.39)$$

Or:

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} \right) + \tan \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) \tan \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{1 + \tan \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{1 - \tan \left(\frac{\gamma}{2} \right)} \quad (34.40)$$

Comme $\tan \frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2}$ (γ est petit) nous avons:

$$\frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \left(\frac{1 + \eta}{E}\right) \tau}{1 - \left(\frac{1 + \eta}{E}\right) \tau} \quad (34.41)$$

Soit:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \eta}{E} \tau \quad (34.42)$$

Finalement, nous avons la relation donnant le "**module de glissement**", ou "**module de Coulomb**", que nous avons donné plus haut sans démonstration:

$$\frac{\tau}{\gamma} = G = \frac{E}{2(1 + \eta)} \quad (34.43)$$

1.2.3. MODULE DE COMPRESSIBILITÉ

Nous reste encore à voir la provenance mathématique de l'expression d'un autre module tout aussi important que le module en cisaillement: le module de compressibilité κ .

Soient les équations déterminées dans l'étude précédente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \eta (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \eta (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \eta (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{aligned} \quad (34.44)$$

Si les forces appliquées sur le cube sont égales en intensité, nous avons:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma \quad (34.45)$$

Ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma - \eta (\sigma + \sigma) \right] = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\eta) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma - \eta (\sigma + \sigma) \right] = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\eta) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma - \eta (\sigma + \sigma) \right] = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\eta) \end{aligned} \quad (34.46)$$

En sommant les termes selon le principe de superposition linéaire des forces:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3\sigma}{E} (1 - 2\eta) \quad (34.47)$$

Or:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{|\Delta L_x|}{L_{x0}} + \frac{|\Delta L_y|}{L_{y0}} + \frac{|\Delta L_z|}{L_{z0}}$$

$$\varepsilon_x L_{x0} L_{y0} L_{z0} + \varepsilon_y L_{x0} L_{y0} L_{z0} + \varepsilon_z L_{x0} L_{y0} L_{z0} = |\Delta L_x| L_{y0} L_{z0} + |\Delta L_y| L_{x0} L_{z0} + |\Delta L_z| L_{x0} L_{y0} \quad (34.48)$$

$$\Rightarrow V_0 (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \Delta V$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\Delta V}{V_0}$$

Finalement:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \sigma \frac{3(1-2\eta)}{E} \quad (34.49)$$

ce que nous notons également:

$$\varepsilon_v = \sigma \frac{3(1-2\eta)}{E} = \sigma \cdot \kappa \quad (34.50)$$

ou encore:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_v}{\sigma} \quad (34.51)$$

avec κ étant par définition le "coefficient de compressibilité".

1.2.4. MODULE DE FLEXION

Pour l'étude du module de flexion considérons la situation ci-dessous:

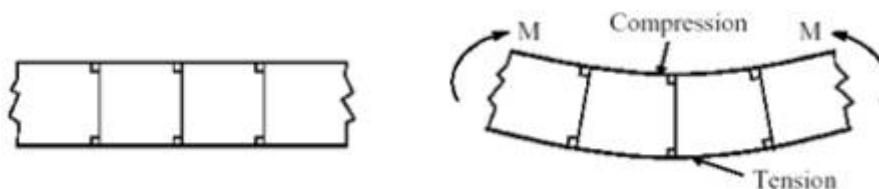


Figure: 34.12 - Exemple d'une barre en flexion

La figure de gauche ci-dessus représente un matériau à l'état statique. La figure de droite représente le même matériau mais soumis à un moment de force couplé M .

Comme le matériau subit à sa surface à la fois une compression et à l'opposé une tension, il doit donc exister une frontière (une ligne ou un plan) où aucune contrainte n'existe. Cette ligne ou ce plan (c'est rare que nous ayons affaire à un matériau ayant uniquement deux dimensions...) est appelé "**plan neutre**". Ce plan neutre va nous servir de référence pour définir la contrainte de flexion.

Maintenant que ce plan est défini, considérons les figures ci-dessous:

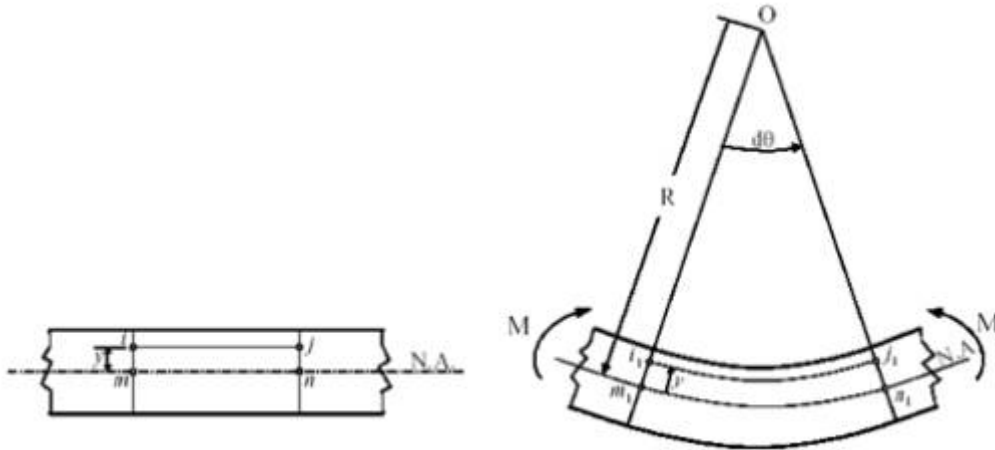


Figure: 34.13 - Illustration du plan de flexion pour déterminer le module de flexion

Soit R le rayon de courbure de la barre (cylindre, plaque, parallélépipède, ...). La déformation sur le segment i_1j_1 est définie par la relation:

$$\varepsilon_{NP} = \frac{i_1j_1 - ij}{ij} \quad (34.52)$$

Les longueurs mn et ij sont définies par:

$$ij = mn = m_1n_1 = Rd\theta \quad (34.53)$$

et la longueur i_1j_1 par:

$$i_1j_1 = (R - y)d\theta \quad (34.54)$$

ainsi l'expression de la déformation devient:

$$\varepsilon_{NP} = \frac{(R - y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = -\frac{y}{R} \quad (34.55)$$

ce qui indique que la déformation varie de façon linéaire avec y .

Nous pouvons définir le module de flexion par:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{NP}} = \frac{-\sigma R}{y} \quad (34.56)$$

Considérons l'état statique de la barre. La somme des contraintes de tractions et compressions sont alors nulles. Effectivement, nous le voyons bien si nous considérons le schéma ci-dessous:

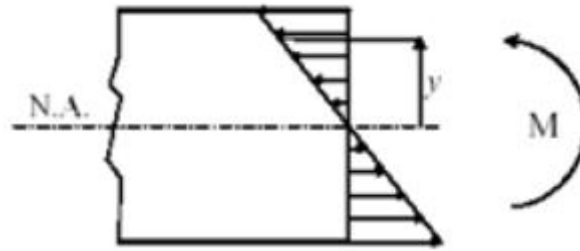


Figure: 34.14 - Agrandissement sur le plan de flexion

Considérons σdS la force agissante sur un élément de surface dS . Nous pouvons considérer l'équilibre des forces à l'état statique tel que:

$$\sum F = \int \sigma dS = 0 \quad (34.57)$$

En substituant l'expression de la contrainte obtenue précédemment:

$$\int -\frac{E y}{R} dS = -\frac{E}{R} \int y dS = 0 \quad (34.58)$$

En supposant linéaire la caractéristique de contrainte en première approximation donc $E = c^{te}$.

En simplifiant un tant soit peu:

$$\int y dS = 0 \quad (34.59)$$

Si nous multiplions l'intégrale par σ alors la relation doit être égale au moment de force M appliqué tel que:

$$\int \sigma y dS = M \quad (34.60)$$

En substituant par l'expression de la contrainte obtenue précédemment:

$$M = \int \sigma y dS = \int -\frac{E y^2}{R} dS = -\frac{E}{R} \int y^2 dS \quad (34.61)$$

Ce qui nous amène à définir le terme:

$$I = \int y^2 dS \quad (34.62)$$

que les ingénieurs nomment le "**moment d'inertie de la barre par rapport au plan neutral**" ou encore "**moment d'inertie statique**". Ce terme représente une mesure de la rigidité de la section transversale de la barre d'un point de vue géométrique, sans considérations des propriétés matérielles.

Substituant cette relation dans l'équation de contrainte de flexion, nous obtenons le "**module de flexion**":

$$E = \frac{MR}{I} = -\frac{\sigma R}{y} \quad (34.63)$$

La difficulté pour l'ingénieur consiste souvent à localiser mathématiquement le plan neutral...

1.3. ONDES TRANSVERSALES DANS LES SOLIDES

Les ondes sonores transversales ou "**ondes S**" (ondes de cisaillement) ne se produisent que dans les solides. Les couches successives du milieu se déplacent latéralement sans qu'il y ait de changement de volume, de densité ou de pression:

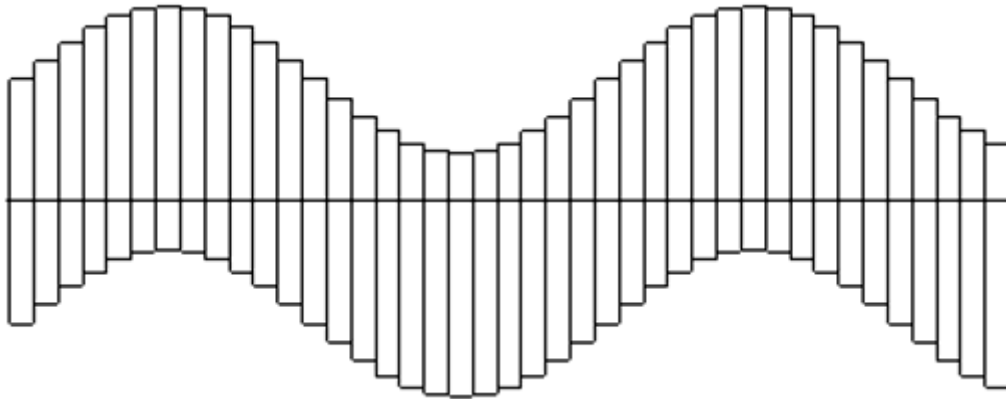


Figure: 34.15 - Exemple d'onde de cisaillement

Le milieu se déforme de la même manière que vous pouvez déformer un livre ou une rame de papier posé à plat en poussant le haut horizontalement. Ni le livre, ni la rame ne changent de volume.

L'obtention de l'équation d'onde pour des ondes transversales est presque la même que pour une corde (cf. chapitre de Mécanique Ondulatoire). Prenons trois minces couches planes contiguës du milieu (voir figure ci-dessous):

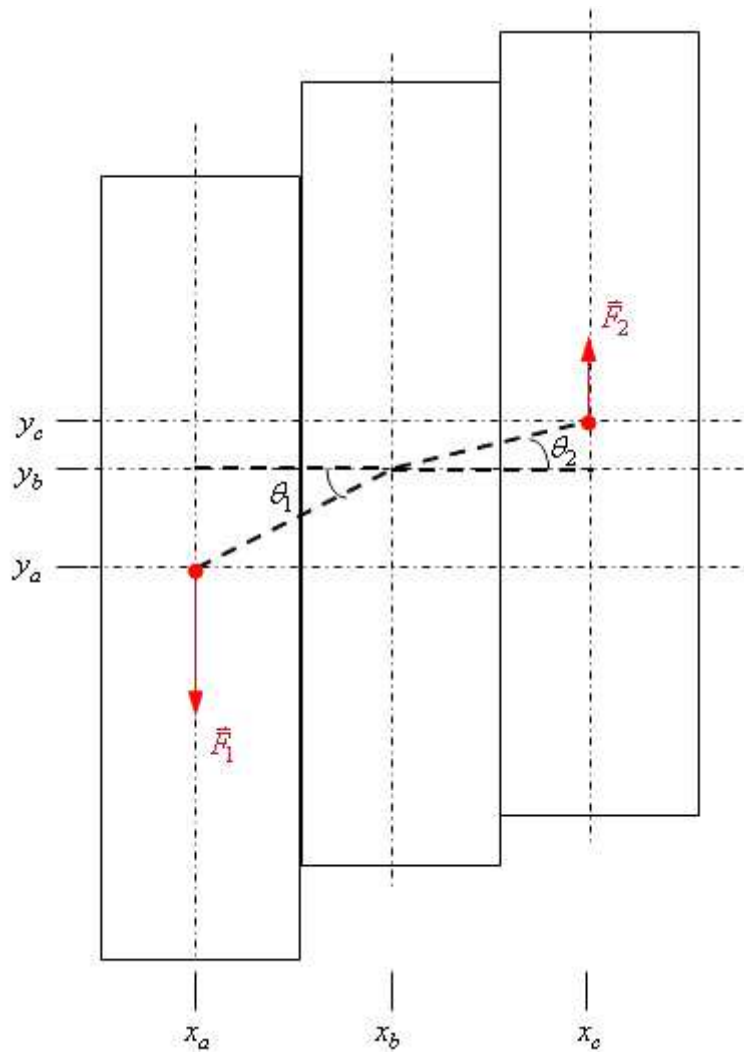


Figure: 34.16 - Agrandissement sur trois couches d'une onde de cisaillement

Les centres des couches se situent en x_a, x_b, x_c avec:

$$x_c - x_b = x_b - x_a = \Delta x \quad (34.64)$$

Le déplacement transversal des trois couches adjacentes est y_a, y_b, y_c . Les angles de déformation respectivement entre la couche b et la couche a , et, entre la couche c et la couche b sont au premier ordre en approximation de Taylor (cf. chapitre sur les Suites et Séries):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right) \cong \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\ \theta_2 &= \arctan \left(\frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} \right) \cong \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} \end{aligned} \quad (34.65)$$

Si nous calculons les forces entre les couches pour un morceau de couche de surface S , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{S} &= G \frac{y_b - y_a}{dx} \\ \frac{F_2}{S} &= G \frac{y_c - y_b}{dx} \end{aligned} \quad (34.66)$$

où G est le module de glissement du milieu. La résultante des forces est alors:

$$F_b = F_2 - F_1 = SG \left(\frac{y_c - y_b}{dx} - \frac{y_b - y_a}{dx} \right) \quad (34.67)$$

La force de la tranche F_b sera égale à tout moment au produit de la masse du morceau de couche b , d'épaisseur dx , surface S et densité ρ , multipliée par l'accélération de la couche:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_b \quad (34.68)$$

Nous avons alors:

$$F_b = ma_b = \rho S dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_b = SG \left(\frac{y_c - y_b}{dx} - \frac{y_b - y_a}{dx} \right) \quad (34.69)$$

Ce qui donne:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_b = \frac{G}{\rho} \frac{\left(\frac{y_c - y_b}{dx} - \frac{y_b - y_a}{dx} \right)}{dx} = \frac{G}{\rho} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_b \quad (34.70)$$

Ce que nous venons de déduire pour une valeur quelconque x_b , est aussi vrai pour n'importe quelle coordonnée:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (34.71)$$

et la vitesse de propagation des ondes transversales est donc:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (34.72)$$

Le rapport G/ρ a les unités du carré d'une vitesse:

$$\frac{G}{\rho} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{\frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{kg \cdot m \cdot m^3}{m^2 \cdot s^2 \cdot kg} = \frac{m^2}{s^2} \quad (34.73)$$

Il s'agit donc d'une équation d'onde de la forme (rappel) d'une équation de Poisson (plus particulièrement il s'agit d'une équation de d'Alembert):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (34.74)$$

avec:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (34.75)$$

Les ondes transversales ne se propagent que dans les solides et de ce fait, nous ne pouvons pas les entendre à moins de les transformer en ondes longitudinales par des moyens mécaniques ou électriques. Les ondes transversales peuvent se transmettre le long d'une barre ou d'une tige quelconque ou même d'un fil métallique, et ceci sans besoin que ce dernier soit sous tension. Même si le fil métallique est sous tension, la vitesse des ondes de cisaillement ne dépend pas de la tension. C'est le module de cisaillement élevé de l'acier qui donne aux guitares électriques ce bruit caractéristique.

Un autre cas remarquable d'ondes transversales (de cisaillement) est celui des ondes sismiques. On y trouve des ondes sismiques de cisaillement et aussi des ondes longitudinales ou de pression. Les ondes de cisaillement se propagent dans la croûte terrestre à $3'600 \left[m \cdot s^{-1} \right]$ et les ondes de pression à $6'000 \left[m \cdot s^{-1} \right]$. Lors d'un séisme ou d'une explosion atomique, les deux types d'onde seront produits, mais comme les ondes se propagent à des vitesses différentes, elles n'arriveront pas en même temps à des stations de détection lointaines. C'est à partir de cette différence des temps d'arrivée que l'on détermine la distance à l'épicentre. La direction est obtenue à partir de la direction des oscillations. Seules les stations suffisamment éloignées pour recevoir les deux types d'onde séparément peuvent faire la détermination de l'épicentre.

Pour résumer, nous avons pour les ondes longitudinales dans un solide (cf. chapitre de Musique Mathématique):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (34.76)$$

et pour les ondes transversales:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (34.77)$$

Pour les détails des développements mathématiques concernant les gaz et les solides, le lecteur devra se rendre dans le chapitre de Musique Mathématique (Acoustique).

2. LIQUIDES

Les fluides usuels sont de deux types: les liquides et les gaz (les solides sont aussi parfois considérés comme des fluides... ce n'est qu'une question d'opinion...). Étymologiquement, un fluide est susceptible de s'écouler. Le liquide adopte la forme du récipient qui le contient tout en conservant un volume propre à peu près invariable. Le gaz n'a pas de volume propre: il envahit uniformément (mécanique statistique de Boltzmann) le récipient dans lequel il est maintenu. Une atmosphère en constitue un cas spécial, du fait qu'elle est maintenue par la gravité à la périphérie d'un astre, ce qui exclut l'uniformité de la densité ou pression.

La distinction entre liquide et gaz est subtile. Nous pouvons cependant dire que le volume propre des liquides manifeste l'existence d'une cohésion liée à une densité assez grande (liaisons de Van der Waals); cette cohésion disparaît avec le volume propre chez les gaz.

$$\frac{49}{5792} \quad (70.32)$$

Ensuite, comme nous avons un train à quatre roues, nous devons avoir:

$$r \cong \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \quad (70.33)$$

et nous prenons alors (toujours en nous aidant de la commande ifactor de Maple 4.00b):

$$r \cong \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{7}{32} \cdot \frac{7}{181} \quad (70.34)$$

2. RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (R.D.M.)

La résistance des matériaux (R.D.M. se dit "ResDem" pour les intimes...) est, comme tous les autres chapitres de ce site, un domaine extrêmement vaste dont le niveau de détail et la complexité des calculs peut exploser. Nous allons dans les paragraphes qui suivent nous attarder sur l'essentiel que l'ingénieur (en entreprise) doit savoir. Les développements sont simplifiés à l'extrême pour des cas particuliers triviaux (barres et poutres rectilignes). Dans la réalité, il faut utiliser le calcul tensoriel, les plans d'expérience ou la modélisation informatique avec les MEF (méthodes des éléments finis).

Avant de commencer à étudier quelques cas concrets simples faisons quelques rappels des démonstrations issues du chapitre de Mécanique des Milieux Continus:

Le solide considéré comme rigide n'existe pas, ce n'est qu'une approximation commode. L'expérience montre en effet qu'un solide est toujours légèrement déformable sous l'effet de forces extérieures.

Les relations entre déformations et tensions sont en général compliquées par suite de l'anisotropie des réseaux cristallins. Cependant, les solides n'étant généralement pas des monocristaux mais des substances polycristallines, constituées d'assemblages de microcristaux associés au hasard, ils peuvent être considérés comme isotropes.

Ensuite, il convient de considérer globalement les hypothèses suivantes relativement aux développements qui vont suivre:

H1. La matière est homogène, c'est-à-dire pour rappel de même constitution physique et de même structure dans tout le volume de la pièce.

H2. La matière est isotrope, c'est-à-dire pour rappel que ses propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point du corps.

H3. La matière est parfaitement élastique, c'est-à-dire pour rappel qu'après élimination des efforts extérieurs, la pièce reprend immédiatement ses dimensions primitives (au contraire de la limite plastique!).

H4. Les déformations (déplacements des points de la ligne caractéristiques) sont petites par rapport aux dimensions des objets étudiés.

H5. Toute section droite (sections transversales) avant déformation reste droite après déformation (hypothèses de Navier-Bernoulli).

H6. Les résultats obtenus en R.D.M. ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés (Hypothèse de Barré de Saint Venant).

H7. Dans le domaine élastique, la matière obéit à la loi de proportionnalité et donc les déformations sont liées par la loi de Hooke démontrée dans le chapitre de Mécanique Des Milieux Continus. Cette loi linéaire permet d'appliquer le principe de superposition des forces et des déformations à la résistance.

Nous avons vus dans le chapitre de Mécanique des Milieux Continus que la loi de Hooke stipule, lorsque les déformations sont réversibles, qu'il y a proportionnalité entre tension et déformation (une des variantes de formulation de la loi de Hooke):

$$F = k |\Delta L| = \frac{E \cdot S}{L_0} |\Delta L| = E \cdot S \cdot \varepsilon = E \cdot S \cdot \varepsilon \quad (70.35)$$

ou:

$$\frac{F}{S} = \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (70.36)$$

où E est le module de Young, ε la déformation normale et σ la contrainte normale. Indiquons que le rapport:

$$\frac{E \cdot S}{L_0} \quad (70.37)$$

est souvent appelée "**raideur de la barre**" dans la littérature spécialisée et est souvent notée k .

Nous avons également démontré dans le chapitre de Mécanique des Milieux Continus que la contrainte tangentielle était donnée par:

$$\tau = \frac{E}{(1+2\eta)} \gamma = G \cdot \gamma \quad (70.38)$$

où G est le module de cisaillement, γ est l'angle de déformation et η le coefficient de Poisson, nombre sans dimensions. Nous avons donc une relation entre le module d'élasticité et de rigidité valable dans le cas des petites déformations.

Nous avons vu également dans le même chapitre que pour un solide ou un liquide soumis à une surpression isotrope uniforme nous avons:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \sigma \frac{3(1-2\eta)}{E} = \sigma \cdot \kappa = \kappa \cdot \Delta P \quad (70.39)$$

Le coefficient de compressibilité κ est donc un nombre positif, par conséquent en utilisant la relation précédente, nous avons:

$$\kappa > 0 \Rightarrow (1-2\eta) > 0 \Rightarrow 2\eta < 1 \quad (70.40)$$

et vient alors un résultat connu:

$$\eta < \frac{1}{2} \quad (70.41)$$

Donc le coefficient de Poisson ne peut pas être plus grand que $\frac{1}{2}$ et il peut être négatif (dans ce dernier cas nous parlons alors de matériaux auxétiques).

Enfin, rappelons que nous avons vu dans le chapitre de Mécanique des Milieux Continus que la contraction unitaire selon l'axe z était donnée lors d'une traction selon l'axe x par:

$$\varepsilon_z = -\eta \frac{\sigma_x}{E} = -\eta \varepsilon_x \quad (70.42)$$

Soit autrement écrit (en se concentrant sur le plan XZ):

$$\frac{|\Delta L_z|}{L_{0z}} = -\eta \frac{|\Delta L_x|}{L_{0x}} \quad (70.43)$$

Soit:

$$\eta = -\frac{\frac{|\Delta L_z|}{L_{0z}}}{\frac{|\Delta L_x|}{L_{0x}}} = \frac{(L_z - L_{0z})/L_{0z}}{(L_x - L_{0x})/L_{0x}} \quad (70.44)$$

Et c'est ce que montre la figure ci-dessous:



Figure: 70.8 - Traction sur une pièce test

Nous avons également démontré dans le chapitre de Mécanique des Milieux Continus la relation suivante lors de notre étude du module de flexion:

$$M = \frac{E \cdot I}{R} = \frac{E \cdot \int y^2 dS}{R} = \frac{-\sigma I}{y} \quad (70.45)$$

qui exprime le moment de flexion pour une poutre sous un effort M (moment de force), la travée d'écrivant alors un arc de cercle de rayon de courbure R et où I caractérise la "rigidité de forme" du matériau ayant une aire transversale donnée. C'est une relation très importante dans de nombreux domaines de la construction (navale, automobile, architecture, etc.).

Remarque: I est appelé le "moment d'inertie statique" ou "moment quadratique" comme nous l'avons déjà spécifié dans le chapitre de mécanique des milieux continus.

2.1. MOMENTS QUADRATIQUES

Voyons les trois moments d'inerties statiques I_x classiques du domaine de la RDM car souvent rencontrés dans la pratique (construction).

Remarque: La théorie des moments d'inertie est pour rappel présentée dans le chapitre de Mécanique Classique. Dans le chapitre sur les Formes Géométriques nous avons démontré en détails les moments d'inerties des volumes les plus courants.

1. Moment d'inertie statique transversal de la plaque rectangulaire de côté b et hauteur h :

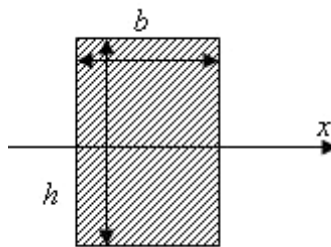


Figure: 70.9 - Plaque rectangulaire et axe d'inertie

Le domaine occupé par la plaque est donné par:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -b/2 \leq x \leq b/2, -h/2 \leq y \leq h/2\} \quad (70.46)$$

Nous avons alors:

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dx dy = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 x \Big|_{-b/2}^{b/2} dy = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = \frac{b}{3} y^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \quad (70.47)$$

2. Moment d'inertie statique transversal d'un disque de diamètre:

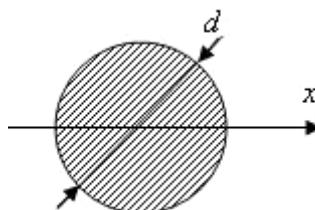


Figure: 70.10 - Disque et axe d'inertie

Ici le domaine d'intégration est:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq d^2 / 4\} \quad (70.48)$$

où d est le diamètre du disque.

Nous avons toujours:

$$I_x = \int_S y^2 dx dy \quad (70.49)$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (70.50)$$

Le jacobien de la transformation est égal à r (cf. chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral). Nous obtenons:

$$I_x = \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} r^3 (\sin \theta)^2 d\theta dr = \pi \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{64} \quad (70.51)$$

3. Moment d'inertie statique d'une couronne de diamètre extérieur D et diamètre intérieur d :

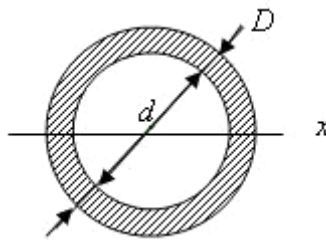


Figure: 70.11 - Couronne et axe d'inertie

Ici le domaine d'intégration est:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq D^2 / 4\} \quad (70.52)$$

où D et d sont respectivement les diamètres du grand et du petit disque.

Si nous notons S_1 le domaine du grand disque et S_2 celui du petit disque alors:

$$I_x = \int_{S_1} y^2 dx dy - \int_{S_2} y^2 dx dy = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \quad (70.53)$$

en utilisant le moment d'inertie statique du disque.

Pour résumer, nous avons donc:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_S y^2 ds = \iint_S y^2 dx dy \\
 I_y &= \int_S x^2 ds = \iint_S x^2 dx dy
 \end{aligned}
 \quad (70.54)$$

et enfin il existe aussi le moment quadratique polaire de S par rapport à un point O :

$$I_0 = \int_S r^2 ds = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = I_x + I_y \quad (70.55)$$

Il est donc aisé dans des cas simples de connaître le moment d'inertie polaire et celui-ci est très utile dans le cadre de l'étude de la torsion.

Il découle de ces outils que plus les éléments de la section sont situés loin de l'axe, plus le moment quadratique sera important et plus (nous le démontrerons dans ce qui suit) les flèches seront faibles.

2.2. ÉQUATION DE LA LIGNE ÉLASTIQUE

Pour cet exemple de cas d'école mais très utilisé dans la pratique nous allons d'abord devoir obtenir mathématiquement la forme géométrique que prend la fibre neutre d'une poutre soumise à des efforts de flexion.

Remarque: Si toutes les réactions d'un système sollicité se trouvent à partir des équations d'équilibre statique, le problème est dit "**statiquement déterminé**" ou "**isostatique**". Lorsque les équations de la statique ne permettent pas de trouver l'équilibre d'un système, le système est dit "**hyperstatique**" ou "**statiquement indéterminé**". Nous disons aussi que tant qu'il y a une "liberté de mouvement" malgré n points de liaison, nous sommes en isostatique.

En faisant l'hypothèse que les déformations sont faibles et que le poids de la poutre est faible devant la force qui plie la poutre, nous pouvons faire le schéma suivant:

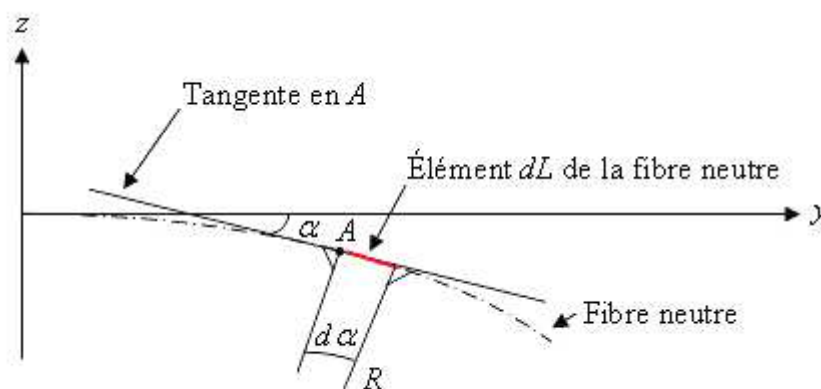


Figure: 70.12 - Poutre (simplifiée...) soumise à un effort

Par définition de la dérivée et en vertu de l'hypothèse des faibles déformations (cela fonctionne donc quand même bien jusqu'à 45°...):

$$\frac{dz}{dy} = \tan \alpha \cong \alpha \quad (70.56)$$

Soit en dérivant encore une fois:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d\alpha}{dy} \quad (70.57)$$

D'autre part, la figure montre que (cf. chapitre de Trigonométrie):

$$dL = R d\alpha \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dL} \quad (70.58)$$

Mais du fait que la courbe de la fibre neutre s'écarte peu de l'axe y (déformations faibles), nous pouvons écrire:

$$dy \cong dL \quad (70.59)$$

Donc:

$$\frac{1}{R} \cong \frac{d\alpha}{dy} \quad (70.60)$$

Ainsi, nous pouvons écrire en utilisant les relations obtenues plus haut:

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I}} \quad (70.61)$$

qui est donc l'équation différentielle donnant $z = f(y)$, appelée "**équation de la ligne élastique**".

Une autre approche courante mais moins intuitive pour obtenir la même relation est de partir de:

$$M = \frac{E \cdot I}{R} \quad (70.62)$$

et de rappeler que le rayon de courbure R est donné par (cf. chapitre de Géométrie Différentielle):

$$R = \frac{1}{C} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} \quad (25.63)$$

Soit en adaptant l'écriture à notre contexte:

$$M = \frac{E \cdot I}{R} = \frac{E \cdot I}{\frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{|z''|}} \quad (25.64)$$

et en négligeant la dérivée première pour les faibles déformations nous retrouvons bien:

$$M = \frac{E \cdot I}{R} = \frac{E \cdot I}{(1+z'^2)^{3/2}} \cong \frac{E \cdot I}{|z''|} = E \cdot I \frac{d^2 z}{dy^2} \quad (25.65)$$

Exemples:

E1. Poutre encastrée que d'un seul côté dite "poutre en porte à faux" (cas classique dans la construction et les habitations) avec charge concentrée (ponctuelle) à l'extrémité:

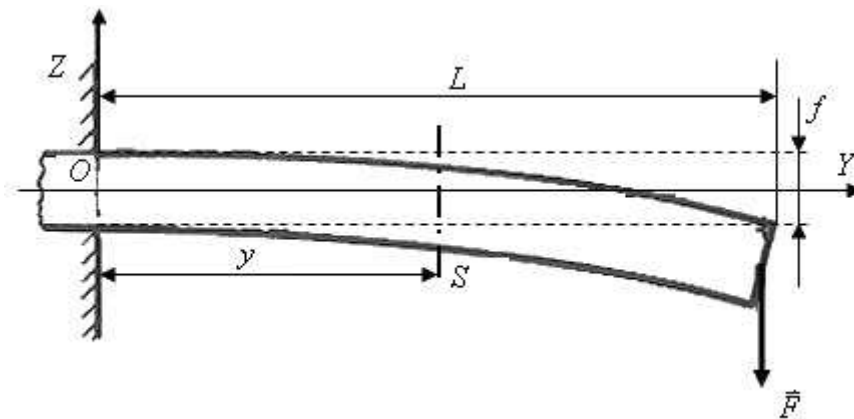


Figure: 70.13 - Poutre encastrée d'un seul côté avec force ponctuelle

Dans la section S quelconque, le moment de force (de flexion) vaut donc:

$$M(y) = F \cdot (L - y) = \frac{E \cdot I}{R} \Rightarrow \frac{F \cdot (L - y)}{E \cdot I} = \frac{1}{R} \quad (70.66)$$

D'autre part:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{R} \quad (70.67)$$

En éliminant R entre ces deux relations, il reste:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{F}{E \cdot I} (L - y) \quad (70.68)$$

La figure montre que les conditions aux limites sont:

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases} \quad (70.69)$$

Nous tirons après intégration:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{F}{E \cdot I} \left(Ly - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (70.70)$$

$$z = \frac{F}{E \cdot I} \left(L \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{3} y^3 \right)$$

Soit:

$$z = \frac{F \cdot L}{E \cdot I} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{y^3}{3} \quad (70.71)$$

Si $y = L$ la déformation est maximale et z prend donc la valeur maximale f appelée la "flèche". Il s'ensuit:

$$z = f = \frac{F \cdot L}{E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (70.72)$$

Soit la déformation verticale maximale de l'extrémité pour une poutre encastree que d'un côté est finalement:

$$f = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (70.73)$$

Toutes les données de cette relation nous sont connues (force, longueur, module de Young, inertie statique) et il est alors possible de déterminer si la barre va casser ou non car il suffit d'appliquer la relation démontrée plus haut:

$$M = \frac{-\sigma \cdot I}{y} \Rightarrow |\sigma| = \frac{y \cdot M}{I} = \frac{f \cdot M}{I} \quad (70.74)$$

Et donc grâce à la relation:

$$\sigma = \frac{f \cdot M}{I} \quad (70.75)$$

et sachant expérimentalement à partir de quelle valeur expérimentale de σ le matériau casse on saura quand la barre cassera (du moins approximativement!) en connaissant la flèche f , le moment fléchissant M et le moment quadratique I .

Nous avons donc un résultat qui va nous être utile par la suite:

$$df = F \frac{1}{E \cdot I} y^2 dy \quad (70.76)$$

et en intégrant de 0 à L nous retrouvons la flèche de notre poutre précédente!

E2. La poutre soutenue (appelée aussi "poutre à 2 appuis simples" ou "poutre isostatique") est l'exemple le plus classique en construction et donc en architecture (et ceux qui ont joué pendant l'enfance à mettre des lattes de bois pour passer par dessus une petite rivière). Il s'agit d'une poutre homogène, de section constante, reposant sur deux appuis libres à ses extrémités et soumis à une charge F en son centre:

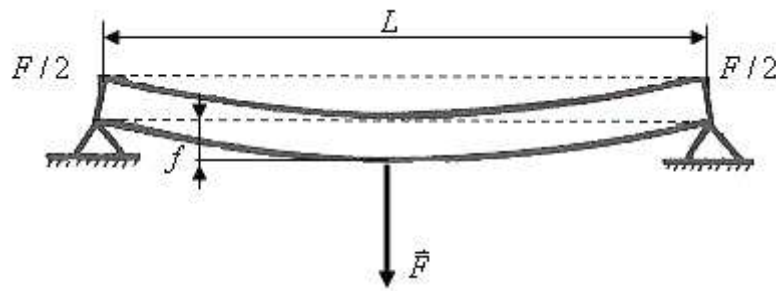


Figure: 70.14 - Poutre soutenue avec force ponctuelle centrée

Nous pouvons donc considérer que tout se passe comme si nous avions $F/2$ aux deux extrémités de deux poutres de longueur $L/2$ (ainsi la somme vaut bien F , c'est-à-dire le moment fléchissant). Remarquons que nous négligeons le poids de la poutre devant F , mais F peut être tout simplement le poids de la poutre! En utilisant la dernière relation de l'exemple précédent, nous avons:

$$df = \frac{F}{2} \frac{1}{E \cdot I} y^2 dy \quad (70.77)$$

Soit:

$$f = \frac{F}{2} \frac{1}{E \cdot I} \int_0^{L/2} y^2 dy = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad (70.78)$$

Soit la déformation verticale maximale d'une poutre posée des deux côtés est finalement (en changeant un peu la notation):

$$f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad (70.79)$$

Ainsi, pour une même longueur de poutre, à F identique la flèche est donc 16 fois moindre que pour une poutre encastree! Il était intuitif qu'elle soit moins élevée pour une force identique mais difficile de deviner qu'elle le serait d'un facteur 16!

C'est cette relation qui est aussi utilisée pour les poutres IPN (fameuses en construction!).

E3. Poutre encastree que d'un seul côté dite "poutre en porte à faux" (cas classique dans la construction et les habitations) avec charge linéique constante w :

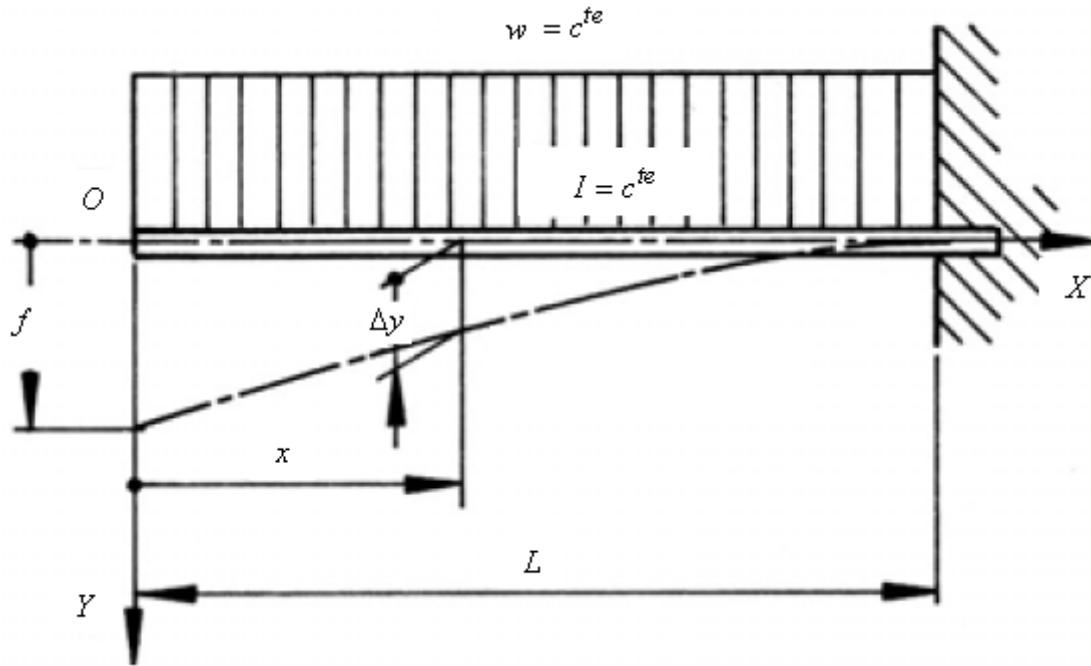


Figure: 70.15 - Poutre encastrée d'un seul côté avec force linéique constante

Le développement est simple mais certaines simplifications sont astucieuses afin d'obtenir un résultat élégant.

Nous partons toujours de l'équation de la ligne élastique en adoptant les écritures à la configuration choisie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (70.80)$$

Soit explicitement:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\int F dx}{EI} = \frac{\int (\int q dx) dx}{EI} = \frac{\int w x dx}{EI} = \frac{w \frac{x^2}{2} + c^{te}}{EI} \quad (70.81)$$

Comme le moment de force M est nul en $x = 0$, nous avons la constante qui est nulle. Dès lors:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w \frac{x^2}{2}}{EI} \quad (70.82)$$

En intégrant encore une fois, il vient:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{EI} \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{w}{EI} \frac{x^3}{6} + c^{te} \quad (70.83)$$

Comme pour $x = L$ par hypothèse la déformation est nulle, nous avons la constante qui est alors donnée par:

$$y' = \frac{w}{EI} \frac{L^3}{6} + c^{te} = 0 \Rightarrow c^{te} = -\frac{wL^3}{6EI} \quad (70.84)$$

Soit:

$$y' = \frac{w}{EI} \frac{x^3}{6} - \frac{wL^3}{6EI} = \frac{wL^3}{6EI} \left(\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 1 \right) \quad (70.85)$$

En intégrant encore une dernière fois:

$$y = \frac{w}{6EI} \int (x^3 - L^3) dx = \frac{w}{6EI} \left(\frac{x^4}{4} - L^3 x \right) + c^{te} \quad (70.86)$$

Et comme en $x = L$ nous avons y qui est aussi nul, il vient pour la constante:

$$y = \frac{w}{6EI} \left(\frac{L^4}{4} - L^3 L \right) + c^{te} = 0 \Rightarrow c^{te} = \frac{wL^4}{8EI} \quad (70.87)$$

Soit:

$$y = \frac{w}{6EI} \left(\frac{x^4}{4} - L^3 x \right) + \frac{wL^4}{8EI} \quad (70.88)$$

et comme la flèche est de toute façon en $x = 0$, nous avons alors:

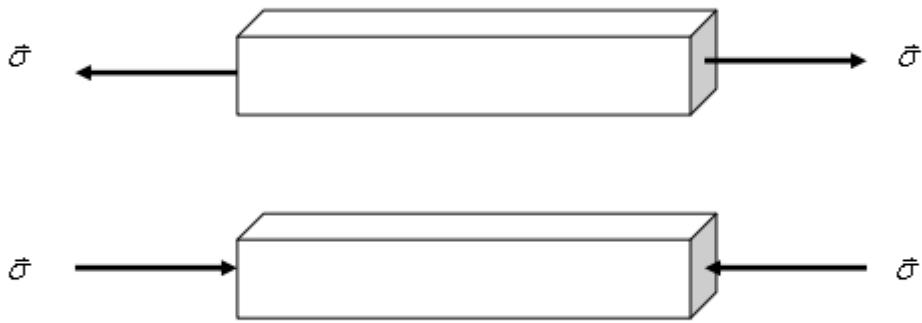
$$f = \frac{wL^4}{8EI} \quad (70.89)$$

2.2.1. ÉQUATION DES POUTRES (EULER-BERNOULLI)

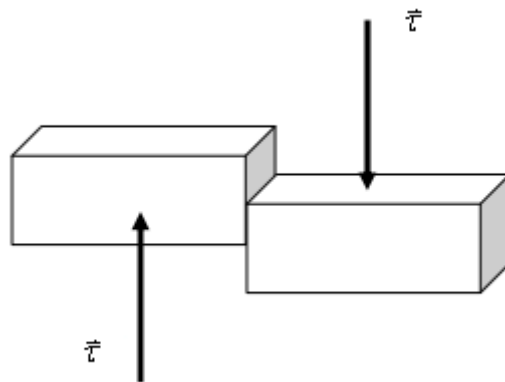
Considérons maintenant le cas d'une poutre encastree des deux cotes (cas encore plus courant que les deux exemples precedents!). L'analyse va etre un peu plus difficile et il va nous falloir introduire plusieurs concepts.

Une poutre en pratique doit resister aux efforts suivants:

- Tension ou compression:



- Cisaillement (effort tranchant):



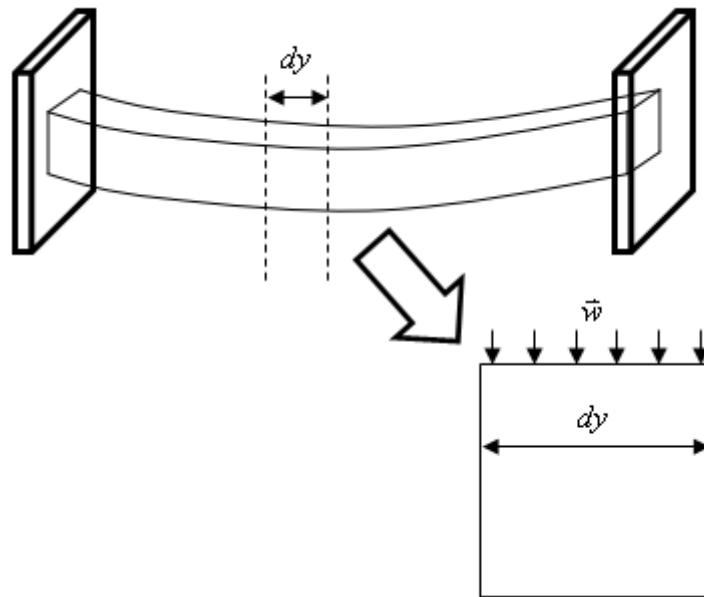
- Flexion (effort fléchissant):



Si une poutre est en équilibre, alors les efforts internes doivent satisfaire en tout point:

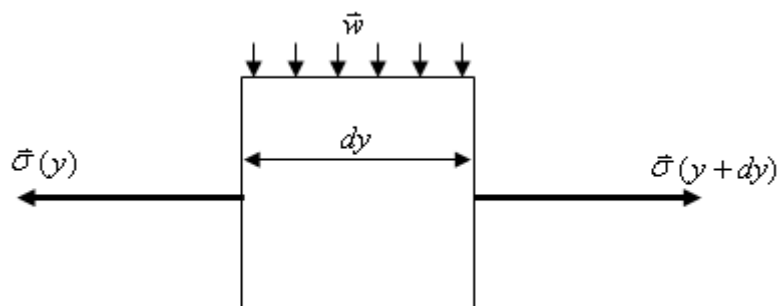
$$\begin{aligned}
 \sum \vec{F}_{\text{horizontales}} &= \sum \vec{F}_{\text{Tension/Compression}} = \vec{0} \\
 \sum \vec{F}_{\text{verticales}} &= \sum \vec{F}_{\text{Cisaillement}} = \vec{0} \\
 \sum \vec{M} &= \sum \vec{M}_{\text{Flexion}} = \vec{0}
 \end{aligned}
 \quad (70.90)$$

Considérons maintenant une poutre encastree à ses deux extrémités (poutre bi-encastree) et prenons en un tranche de longueur infinitésimale dy telle que localement sa courbure soit nulle. La poutre sera supposée soumise à une force (poids) uniforme sur toute sa longueur (force qui peut aussi être assimilée à son propre poids comme nous l'avons déjà précisé plus haut). Il est alors d'usage de noter \vec{w} la force par unité de longueur (poids total divisé par la longueur) qui est bien évidemment une charge linéique:



Si la poutre est à l'équilibre une fois déformée (faiblement ou beaucoup déformée cela importe peu!) alors les sommes des forces de tension, compression, cisaillement et flexion doivent être nulles en chaque point comme nous l'avons déjà dit! Cela ne veut cependant pas dire qu'en chaque point de la ligne élastique les valeurs de chacun des forces est égale! Bien au contraire. Il y a bien évidemment des différences (sinon quoi il n'y aurait pas déformation).

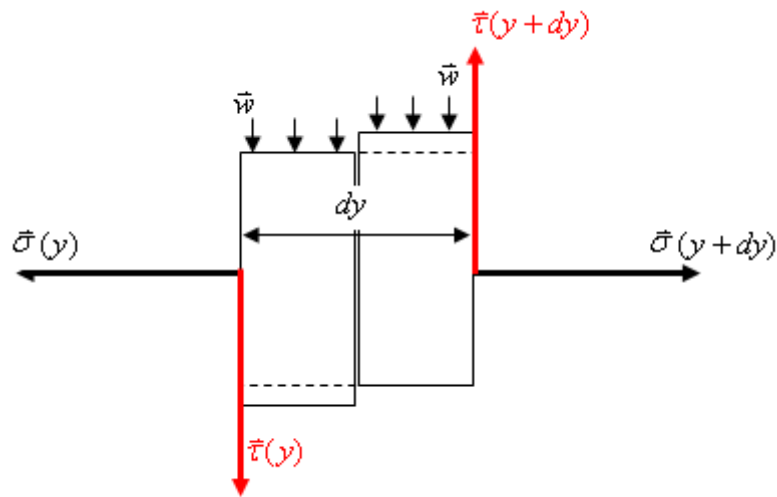
Faisons alors d'abord la somme des forces locales de tension et de compression (horizontales) de l'élément de longueur dy . Nous avons alors schématiquement:



Soit algébriquement (le variationnel pouvant être négatif ou positif peu importe!):

$$\sum \vec{F}_{horizontales} = \vec{\sigma}(y+dy) - \vec{\sigma}(y) = \vec{\sigma} + d\vec{\sigma} - \vec{\sigma} = d\vec{\sigma} = \vec{0} \quad (70.91)$$

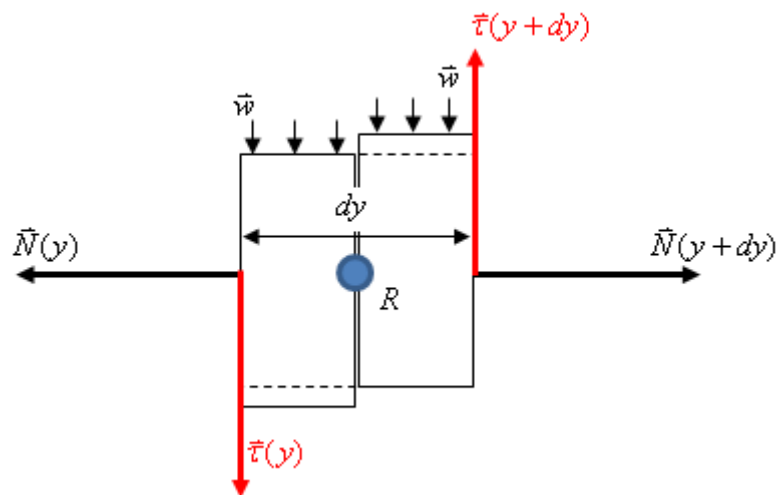
Si maintenant nous nous occupons des forces verticales à la source du cisaillement. Nous avons alors schématiquement:



Soit algébriquement (le variationnel pouvant être négatif ou positif peu importe!):

$$\sum \vec{F}_{\text{verticales}} = \vec{\tau}(y+dy) - \vec{\tau}(y) = \vec{\tau} + d\vec{\tau} - \vec{\tau} - \bar{w}dy = d\vec{\tau} - \bar{w}dy = \vec{0} \quad (70.92)$$

Et finalement pour les moments de flexion la somme est aussi forcément nulle à l'équilibre. Cependant contrairement aux deux sommes algébriques précédentes où nous pouvions utiliser seulement le différentiel, nous devons pour les moments de flexion choisir un point R de référence puisque pour rappel... le moment de force est par définition le produit d'une force par une distance. Nous choisissons donc naturellement le centre de gravité:



La charge linéaire uniforme \bar{w} sur la longueur dy génère une de force à mi-distance de:

$$\vec{F}_{\bar{w}} = (\bar{w}(y)dy) \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \bar{w}(y) dy^2 \quad (70.93)$$

mais comme elle est confondue aux choix de notre repère, alors son moment de force est nul!

Nous avons alors algébriquement:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{M} &= \vec{M}(y) + \vec{M}(-y) + \vec{\tau}(y) \frac{dy}{2} + \vec{\tau}(-y) \frac{dy}{2} \\
&= \underbrace{\vec{M} + d\vec{M}}_{=\vec{M}(y)} - \underbrace{\vec{M}}_{=\vec{M}(-y)} + \underbrace{(\vec{\tau} + d\vec{\tau})}_{=\vec{\tau}(y)} \frac{dy}{2} + \underbrace{\vec{\tau}}_{=\vec{\tau}(-y)} \frac{dy}{2} = d\vec{M} + \vec{\tau} \frac{dy}{2} + d\vec{\tau} \frac{dy}{2} + \vec{\tau} \frac{dy}{2} \quad (70.94) \\
&= d\vec{M} + \vec{\tau} dy + d\vec{\tau} \frac{dy}{2} = \vec{0}
\end{aligned}$$

et si nous négligeons les différentiels d'ordre deux:

$$d\vec{M} + \vec{\tau} dy = \vec{0} \quad (70.95)$$

Nous avons donc au final:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{\sigma} = \vec{0} \\ d\vec{\tau} - \vec{w} dy = \vec{0} \\ d\vec{M} + \vec{\tau} dy = \vec{0} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{\sigma}}{dy} = \vec{0} \\ \frac{d\vec{\tau}}{dy} = \vec{w} \\ \frac{d\vec{M}}{dy} = -\vec{\tau} \end{cases} \quad (70.96)$$

Pour déterminer le moment de fléchissement à partir de la charge linéaire (ce qui intéresse en priorité le praticien), nous dérivons deux fois la troisième relation et faisons une substitution:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{d\vec{M}}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} \vec{\tau} = -\vec{w} \quad (70.97)$$

Soit:

$$\frac{d^2 \vec{M}}{dy^2} = -\vec{w} \quad (70.98)$$

Le problème avec cette dernière relation est la connaissance des moments. Il faudrait nous débarrasser absolument de ce terme. Ce que nous connaissons facilement c'est la fonction de déformation et nous avons démontré plus haut que:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (70.99)$$

Il vient alors immédiatement en substituant la relation précédente dans l'antéprécédente:

$$EI \frac{d^4 z}{dy^4} = -w(y) \quad (70.100)$$

Il s'agit de la relation la plus important de la théorie des poutres car elle permet en connaissance la charge linéaire de déterminer la fonction de déformation ou inversement! Elle est tellement important qu'on l'appelle "**équation des poutres**" ou encore en honneur à ceux qui l'ont déterminé: "**équation d'Euler-Bernoulli**".

Comme il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 4 qui va générer quatre constantes à chaque intégration, il nous faudra alors 4 conditions initiales pour la résoudre complètement.

Exemple:

Nous souhaiterions calculer la déformation d'une poutre fixée des deux côtés et chargée uniformément connaissant sa longueur L , son module d'élasticité E , son moment d'inertie I . Nous partons alors (nous changeons les notations pour montrer que selon les ouvrages les axes pris peuvent être notés différemment):

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) \quad (70.101)$$

avec les conditions initiales:

$$y(x=0) = 0, \quad y(x=L) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(x=0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(x=L) = 0 \quad (70.102)$$

Et intégrant à répétition, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{-wx}{EI} + C_1 &\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-wx^2}{2EI} + C_1 x + C_2 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-wx^3}{6EI} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ \Rightarrow y(x) = \frac{-wx^4}{24EI} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned} \quad (70.103)$$

Des deux conditions initiales:

$$y(x=0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(x=0) = 0 \quad (70.104)$$

Il en découle que:

$$C_3 = C_4 = 0 \quad (70.105)$$

Avec les deux autres conditions restantes, nous obtenons le système suivant qui doit nous permettre de déterminer les deux constantes restantes:

$$\begin{cases} \frac{-wL^4}{24EI} + \frac{C_1 L^3}{6} + \frac{C_2 L^2}{2} = 0 \\ \frac{-wL^3}{6EI} + \frac{C_1 L^2}{2} + C_2 L = 0 \end{cases} \quad (70.106)$$

Après il s'agit simplement de résoudre un simple système linéaire (cf. chapitre d'Algèbre Linéaire):

$$\begin{cases} \frac{-wL^4}{24EI} + \frac{C_1L^3}{6} + \frac{C_2L^2}{2} = 0 \\ \frac{-wL^3}{6EI} + \frac{C_1L^2}{2} + C_2L = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} \frac{24}{L^2} \\ \frac{6}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-wL^2}{EI} + 4C_1L + 12C_2 = 0 \\ \frac{-2wL^2}{EI} + 6C_1L + 12C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{wL}{2EI} \\ C_2 = \frac{-wL^2}{12EI} \end{cases} \quad (70.107)$$

Donc une poutre bi-encastée idéale soumise à une charge uniforme et décrite par:

$$y(x) = \frac{-wx^4}{24EI} + \frac{wLx^3}{12EI} - \frac{wL^2x^2}{24EI} = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 2Lx + L^2) = \frac{-wx^2}{24EI}(x-L)^2 \quad (70.108)$$

Pour déterminer la flèche, il nous faut donc chercher le point x où cette relation a un optimum. Nous avons alors:

$$f'(x) = [x^2(x-L)^2]' = 2x(x-L)^2 + 2x^2(x-L) = 2x(x-L)(x-L+x) = 2x(x-L)(2x-L) = 0 \quad (70.109)$$

Il s'ensuit que la flèche à un maximum en $x = L/2$. En injectant cela dans $y(x)$ nous obtenons la fameuse relation souvent donnée dans la littérature mais rarement démontrée:

$$f = \frac{w}{24EI} \cdot \frac{L^4}{16} = \frac{wL^4}{384EI} \quad (70.110)$$

Il s'ensuit que la flèche d'une poutre est proportionnelle à la puissance quatrième de la longueur de la poutre! Une si forte dépendance impose des limitations significatives dans les constructions civiles basées sur des poutres.

Remarque: La charge linéique constante, soit sur la longueur totale de la poutre, soit par tronçons successifs, est une sollicitation fréquente dans les pièces à axe horizontal. Elle peut provenir du poids propre de la pièce à section constante ou d'une charge provoquée par une poussée extérieure (gravité par exemple).

2.2.2. ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE

Après un survol rapide des diverses déformations élastiques des pièces sollicitées par les efforts fondamentaux, nous allons établir ici l'expression générale de l'énergie élastique accumulée dans une barre de forme quelconque sollicité par des efforts extérieurs.

Rappelons pour cette étude que nous pouvons écrire la loi de Hooke (cf. chapitre de Mécanique Des Milieux Continus) sous la forme suivante:

$$|\Delta L| = \frac{F \cdot L_0}{E \cdot S} = \frac{F}{k} \quad (70.111)$$

et l'énergie potentielle élastique d'un ressort démontrée dans le chapitre de Mécanique Classique est donnée par:

$$E_{Elastique} = \frac{1}{2} kx^2 \quad (70.112)$$

ou en déplacement relatif:

$$E_{Elastique} = \frac{1}{2} k\Delta x^2 \quad (70.113)$$

Dans le domaine de traction (ou compression) longitudinale des barres, il est d'usage de considérer la barre comme un ressort (...) et alors d'utiliser la constante de raideur de la loi de Hook... en espérant que cela colle à l'expérience:

$$E_{Elastique} = \frac{1}{2} k\Delta x^2 = \frac{1}{2} \frac{E \cdot S}{L_0} \Delta x^2 = \frac{E \cdot S}{2L_0} \Delta L^2 \quad (70.114)$$

où conformément à l'usage, nous notons le déplacement longitudinal L au lieu de x . En injectant la loi de Hook (oui... ça tourne un peu en rond...):

$$E_{Elastique} = \frac{E \cdot S}{2L_0} \left(\frac{F \cdot L_0}{E \cdot S} \right)^2 = \frac{F^2 \cdot L_0}{2 \cdot E \cdot S} \quad (70.115)$$

Il suffit alors de diviser par la longueur de la barre pour avoir l'énergie linéique élastique:

$$E_{Elastique,linéique} = \frac{F^2}{2 \cdot E \cdot S} \quad (70.116)$$

L'énergie volumique, notée traditionnellement comme en thermodynamique par une minuscule, est alors:

$$e = \frac{F^2 \cdot L_0}{2 \cdot E \cdot S \cdot V} = \frac{F^2 \cdot L_0}{2 \cdot E \cdot S \cdot S \cdot L_0} = \frac{F^2}{2 \cdot E \cdot S^2} = \left(\frac{F}{S} \right)^2 \frac{1}{2E} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (70.117)$$

2.3. TORSION

Rappelons au lecteur d'abord une étude faite dans le chapitre de Mécanique Classique sur le pendule de torsion où certains éléments avaient volontairement tus. Étudions cela plus en détails car très utile pour les arbres de transmission ou les ressorts dans la vie de tous les jours.

Considérons maintenant un fil cylindrique fixé en sa base et soumis à un moment de torsion \vec{M} . Sous l'effet de ce moment de torsion, la face supérieure du fil est décalée d'un angle ϑ par rapport à la face inférieure, la matière subissant une tension de torsion (ou cisaillement τ):

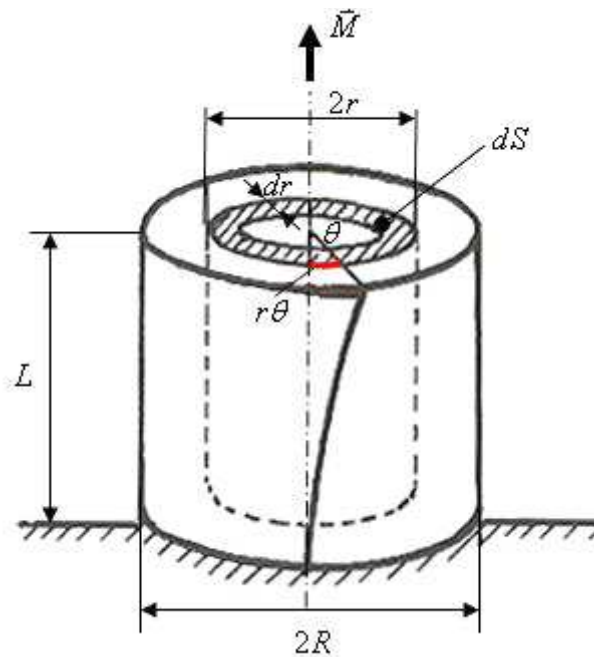


Figure: 70.16 - Fil sous torsion

Imaginons à l'intérieur du fil un tube élémentaire de rayon r , d'épaisseur dr , et observons l'effet de la torsion sur ce tube déroulé (cela nous permettra une approche approximative du phénomène intéressé):

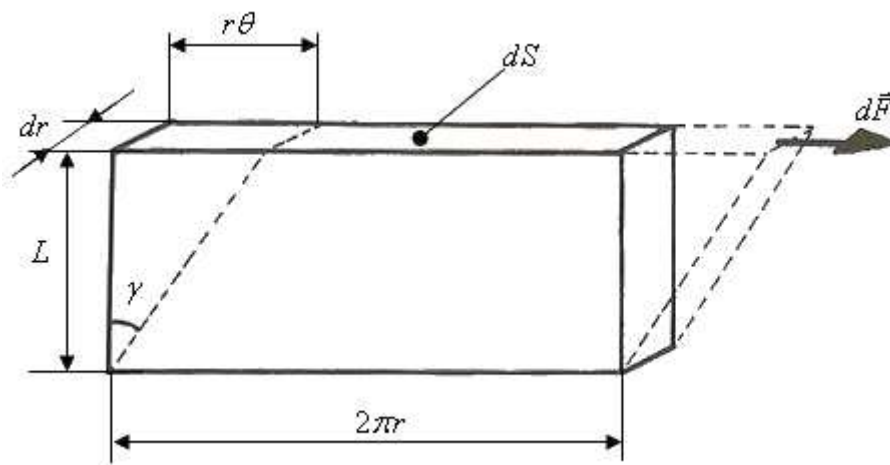


Figure: 70.17 - Extraction un élément du fil sous torsion

Cherchons une relation entre le moment de torsion \vec{M} et l'angle de torsion θ .

Pour le tube déroulé, appliquons les relations du cisaillement:

$$G \cdot \gamma = \tau = \frac{dF}{dS} \Rightarrow dF = \gamma G dS \quad (70.118)$$

or la figure montre que (les déformations étant faibles) au premier ordre en série de Taylor (cf. chapitre sur les Suites et Séries):

$$\gamma = \arctan\left(\frac{r \cdot \theta}{L}\right) \cong \frac{r \cdot \theta}{L} \quad (70.119)$$

d'où:

$$dF = \frac{r \cdot \theta}{L} G dS \quad (70.120)$$

Le moment élémentaire dû à cette force est par définition du moment de force:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \quad (70.121)$$

Soit puisque \vec{r} et $d\vec{F}$ sont perpendiculaires:

$$dM = \frac{\theta \cdot G}{L} r^2 dS \quad (70.122)$$

Le moment total vaut alors:

$$M = \int_{r=0}^{r=R} dM = \frac{\theta \cdot G}{L} \int_{r=0}^{r=R} r^2 dS = \frac{\theta \cdot G}{L} I_0 \quad (70.123)$$

donc:

$$M = \left(\frac{G \cdot I_0}{L} \right) \theta = - \left(- \frac{G \cdot I_0}{L} \right) \theta = -k\theta \quad (70.124)$$

Nous retrouvons donc la relation du pendule de torsion que nous avons posé lors de notre étude du pendule de torsion dans le chapitre de Mécanique Classique avec comme différence que cette fois la constante k , la "**constante de torsion**" est explicite!!!!

Le numérateur de la constante k est appelé dans le domaine dans la résistance des matériaux "**rigidité torsionnelle**" et la constante k elle-même est souvent appelée "**raideur de l'arbre**" au lieu de "constante de torsion". Dans la pratique on cherche surtout à trouver la valeur numérique de l'expression suivante:

$$\theta = \frac{M \cdot L}{G \cdot I_0} \quad (70.125)$$

puisque cela donnera l'amplitude angulaire de la torsion.

Voyons donc une application très importante au ressort de compression de type hélicoïdal (l'approche est approximative à nouveau à défaut de mieux...) travaillant en torsion.

D'abord il faut bien se rendre compte que lorsqu'une force est appliquée au ressort, les extrémités vont tourner d'un angle θ alpha faible (torsion) correspondant au parcours d'une distance x qui elle-même correspond au rétrécissement du ressort (ben oui! il faut bien que cette longueur soit reprise quelque part).

Soit alors un ressort de rayon extérieur R (soit de diamètre D), de module de cisaillement G , avec un diamètre de corps d (diamètre du cylindre plié dont est composé le ressort):

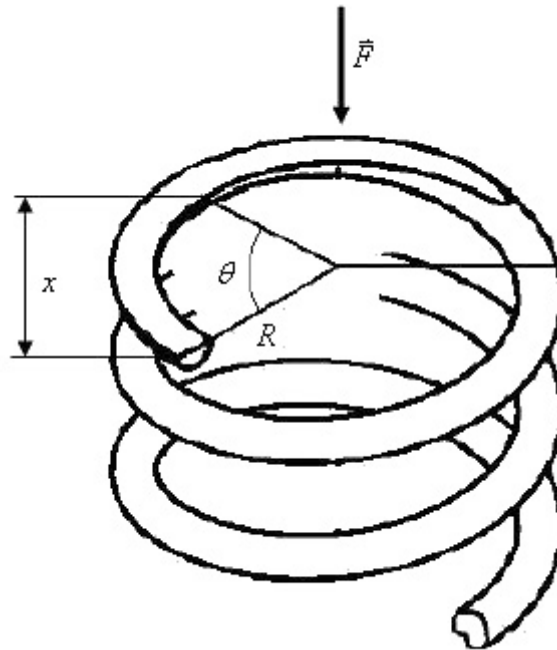


Figure: 70.18 - Ressort spiral sous effort

Pour l'analyse nous aurons besoin simplement de mélanger plusieurs de relations démontrées jusqu'à maintenant. En premier lieu l'angle de torsion d'une poutre de longueur L (longueur du ressort en l'occurrence!):

$$\theta = \frac{M \cdot L}{G \cdot I_0} \quad (70.126)$$

Avec:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (70.127)$$

et:

$$L = n \cdot \pi \cdot D \quad (70.128)$$

Par ailleurs, le moment de torsion s'écrit:

$$M = F \cdot R = F \cdot \frac{D}{2} \quad (70.129)$$

Nous arrivons donc à:

$$\theta = \frac{M \cdot L}{G \cdot I_0} = \frac{F \cdot \frac{D}{2} \cdot n \cdot \pi \cdot D}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16 \cdot F \cdot n \cdot D^2}{G \cdot d^4} \quad (70.130)$$

Remarque: Le rapport M / θ , au même titre que pour l'arbre, est appelé la "**raideur du ressort**".

Le déplacement (déformation) x vaut lui (cf. chapitre de Trigonométrie):

$$x = R \cdot \theta = \frac{D}{2} \theta \quad (70.131)$$

Nous arrivons finalement à:

$$x = \frac{D}{2} \frac{16 \cdot F \cdot n \cdot D^2}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot F \cdot n \cdot D^3}{G \cdot d^4} \quad (70.132)$$

ce qui nous amène à la relation mondialement connue dans le monde dans la R.D.M. en ce qui concerne les ressorts:

$$F = \left(\frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} \right) x = k \cdot x \quad (70.133)$$

où k est la constante de "raideur du ressort"!! Si maintenant, nous utilisons l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort démontrée dans le chapitre de Mécanique Classique:

$$E_{\text{Elastique}} = \frac{1}{2} k x^2 \quad (70.134) \quad (70.135)$$

nous pouvons alors déterminer l'énergie qu'un ressort spiral peut absorber.

2.4. FLAMBAGE

Nous terminons cette étude de la R.D.M. avec le flambage (cas d'étude classique en construction et mécanique) qui consiste à déterminer (dans un cas particulier simple) la force minimale F_0 à partir de laquelle une barre de longueur L , de module de Young E fixée à ses deux extrémités peut plier (avec un rayon R) jusqu'à casser sans qu'il y ait besoin de trop augmenter la force F_0 (il s'agit donc à nouveau d'une valeur d'indication!).

Dans l'étude de ce phénomène, nous considérons que dès que la barre commence à plier nous avons alors F_0 (et nous ne sommes alors plus très loin de la force permettant de la casser).

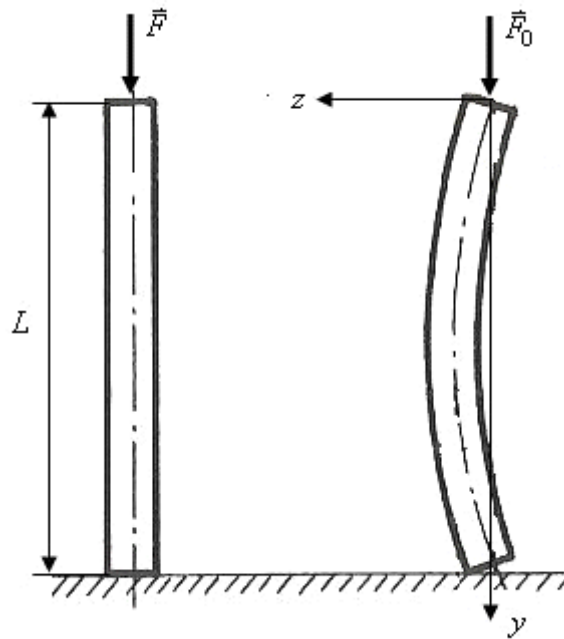


Figure: 70.19 - Exemple de flambage

Lorsque la barre commence à plier nous avons alors une force \vec{F}_0 qui s'applique à chaque élément de volume de la barre mais comme ceux-ci ne sont pas distribués de la même manière selon l'axe z , ils ne créent pas le même moment de force!

À l'équilibre de la force de flambement, la barre soumet un moment de rappel. Nous avons alors:

$$M(z) = -z \cdot F \quad (70.136)$$

En exprimant le moment de flexion M au moyen de la relation:

$$M = -\frac{E \cdot I}{R} \quad (70.137)$$

Il vient:

$$z \cdot F_0 + \frac{E \cdot I}{R} = 0 \quad (70.138)$$

En utilisant l'équation de la ligne élastique et en substituant, nous obtenons:

$$z \cdot F_0 + E \cdot I \frac{d^2 z}{dy^2} = 0 \quad (70.139)$$

soit:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{F_0}{E \cdot I} z = \frac{d^2 z}{dy^2} + \Omega z = 0 \quad (70.140)$$

qui est l'équation différentielle de flambage permettant de calculer la force de flambage avec les conditions initiales:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow z = 0 \\ y = L &\Rightarrow z = 0 \end{aligned} \quad (70.141)$$

Indiquons que la relation:

$$z \cdot F_0 + E \cdot I \frac{d^2 z}{dy^2} = 0 \quad (70.142)$$

est très souvent écrite sous la forme suivante dans la littérature:

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{z F_0}{EI} = \frac{M}{EI}} \quad (70.143)$$

La résolution de l'équation différentielle du second ordre:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{F_0}{E \cdot I} z = \frac{d^2 z}{dy^2} + \Omega z = 0 \quad (70.144)$$

est relativement aisée (cf. chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral) puisque l'équation caractéristique est:

$$K^2 + \frac{F_0}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow K_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} \quad (70.145)$$

Nous avons alors la solution homogène:

$$\begin{aligned} z_h &= A e^{i \sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y} + B e^{-i \sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y} \\ &= A \cos \left(\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y \right) + A i \sin \left(\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y \right) - B i \sin \left(\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y \right) \end{aligned} \quad (70.146)$$

La condition $y = 0 \Rightarrow z = 0$ impose:

$$z_h = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \quad (70.147)$$

Il vient alors:

$$z = 2A i \sin \left(\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} y \right) \quad (70.148)$$

La deuxième condition $y = 0 \Rightarrow z = L$ impose:

$$z = 2A i \sin \left(\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} L \right) = 0 \quad (70.149)$$

Donc il vient immédiatement que:

$$\sqrt{\frac{F_0}{E \cdot I}} L = k\pi \quad (70.150)$$

avec $k = 1$ (car k valant zéro n'est pas une solution physique possible et k entier supérieur à 1 signifierait que la barre plie sur plusieurs périodes ce qui n'est pas le cas puisqu'elle le fait seulement sur une demi-période comme le montrait la figure plus haut). Soit:

$$F_0 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad (70.151)$$

Cette relation est parfois appelée "**formule d'Euler**" (à ne pas confondre avec la formule du même nom en théorie des graphes) et la charge limite la "**charge ou force critique d'Euler**" pour une poutre parfaitement encastree aux extrémités. L'ensemble de l'étude étant le "**flambage d'Euler**".

2.5. TRACTION

Considérons maintenant le cas d'une barre suspendue seulement à son propre poids. La surface de sa section circulaire est S et h la hauteur totale de cette barre. Le module de Young du matériau est noté E (cf. chapitre de Mécanique des Milieux Continus) et ρ sa masse volumique.

Il est facile de constater qu'une section située à une altitude z supporte le poids du morceau de barre situé sous elle:

$$F(z) = \rho g S (h - z) \quad (70.152)$$

La contrainte n'est alors pas constante dans la barre:

$$\sigma(z) = \frac{F(z)}{S} = \rho g (h - z) \quad (70.153)$$

et la déformation non plus:

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{\rho g}{E} (h - z) \quad (70.154)$$

z étant l'abscisse sur la barre, la déformation inhomogène est liée au déplacement par la relation:

$$\varepsilon(z) = \frac{du(z)}{dz} \quad (70.155)$$

Après intégration, nous obtenons la forme générale du déplacement:

$$du(z) = \varepsilon(z) dz = \frac{\rho g}{E} (h - z) dz \Rightarrow u(z) = \frac{\rho g}{E} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) + c^{te} \quad (70.156)$$

où la constante est à déterminer en utilisant les éventuelles conditions de liaison aux extrémités de la barre. Si l'extrémité supérieure est encastree, le déplacement y est donc nul:

$$u(z = 0) = 0 \Rightarrow c^{te} = 0 \quad (70.157)$$

Le déplacement en tout point de la barre s'exprime donc:

$$u(z) = \frac{\rho g}{E} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) \quad (70.158)$$

L'allongement de la barre est l'écart en déplacement entre les deux extrémités de la barre:

$$\Delta h = u(h) - u(0) \quad (70.159)$$

Nous avons alors trivialement:

$$\Delta h = \frac{\rho g}{E} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{\rho g}{E} \frac{h^2}{2} \quad (70.160)$$