

Les infiniment petits

I Introduction

L'introduction de $\frac{df}{dx}$ est due à Leibniz (1684) pour lequel cela signifiait

$$\frac{\text{variation infiniment petite de } f}{\text{variation infiniment petite de } x}$$

df est une « quantité évanouissante ». Euler faisait usage de l'infiniment petit ε (1748). La notion de dérivée en tant que limite est apparue au XIX^e siècle. Remarque : y a été introduit par Newton (1671) et y' par Lagrange (1797). Cette notion est revenue avec l'analyse non standard (1966) qui définit un infinitésimal comme un nombre réel x tel que $|x| \leq y$ pour tout nombre réel y standard strictement positif. Il y a une définition mathématique de standard, disons que c'est tout nombre que l'on peut raisonnablement écrire. Lorsqu'un physicien raisonne avec les infinitésimaux, on peut dire soit qu'il raisonne comme à l'époque de Leibniz soit qu'il fait de l'analyse non standard. Il est probable qu'il faille plutôt envisager le premier cas.

II Signification de dx

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

la notation infinitésimale condense ceci en sous-entendant la limite soit

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{(x + dx) - x}$$

et donc $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$. Ceci est une *égalité* et non une approximation, cf. la différentielle $df = f'(x)dx$, fonction linéaire tangente à $f(x)$.

III Calcul avec une variable : fusée

On prend l'exemple de la fusée libre de masse M de vitesse v (par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$) éjectant un gaz à la vitesse V (par rapport à la fusée) soit $v + V$ (par rapport au référentiel

$\mathcal{R}_0$) et avec un débit $D_m = -\frac{dM}{dt} > 0$. On note $\langle x \rangle_a^b = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \cdot dt$ la valeur moyenne de x entre a et b . La conservation de la quantité de mouvement entre t et $t + \Delta t$ s'écrit, le gaz étant éjecté à une vitesse évoluant entre $v(t) + V$ et $v(t + \Delta t) + V$:

$$\begin{aligned} M(t) \cdot v(t) &= M(t + \Delta t) \cdot v(t + \Delta t) - \Delta M (\langle v \rangle_t^{t+\Delta t} + V) \\ &= \left\{ M(t) + \frac{dM}{dt} \Delta t \right\} \left\{ v(t) + \langle a \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t \right\} - \frac{dM}{dt} \Delta t (\langle v \rangle_t^{t+\Delta t} + V) \\ &= M(t) \cdot v(t) + M(t) \cdot \langle a(t) \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t - D_m \cdot v(t) \Delta t - D_m \Delta t \Delta t \langle a(t) \rangle_t^{t+\Delta t} \\ &\quad + D_m \langle v \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t + D_m \cdot V \Delta t \end{aligned}$$

soit après simplification par $M(t) \cdot v(t)$:

$$M(t) \langle a \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t = +D_m \langle a(t) \rangle \Delta t^2 - D_m \cdot V \Delta t + D_m \cdot v(t) \Delta t - D_m \langle v \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t$$

En divisant par Δt et en effectuant le passage à la limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(t) \langle a \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{+D_m \langle a(t) \rangle \Delta t^2 - D_m \cdot V \Delta t + D_m \cdot v(t) \Delta t - D_m \langle v \rangle_t^{t+\Delta t} \Delta t}{\Delta t} \\ M(t) a(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} +D_m \langle a(t) \rangle \Delta t - D_m \cdot V + D_m \cdot v(t) - D_m \langle v \rangle_t^{t+\Delta t} \\ M(t) a(t) &= -D_m V \end{aligned}$$

On peut condenser ce calcul en considérant que la définition de l'infiniment petit contient la notion de limite et donc

- lorsqu'il y a une différence il faut faire la distinction $f(t)$ et $f(t + dt)$,
- lorsqu'il y a une somme¹, on peut confondre $\langle f \rangle_t^{t+\Delta t}$ et $f(t)$:

$$\begin{aligned} M(t) v(t) &= M(t + dt) \cdot v(t + dt) - dM \cdot (v(t) + V) \\ &= \left\{ M(t) + \frac{dM}{dt} dt \right\} \left\{ v(t) + a(t) \cdot dt \right\} - \frac{dM}{dt} dt \cdot (v(t) + V) \\ &= M(t) \cdot v(t) + M(t) \cdot a(t) \cdot dt \\ &\quad + D_m \cdot v(t) \cdot dt + D_m \cdot a(t) \cdot dt \cdot dt \\ &\quad - D_m \cdot v(t) \cdot dt - D_m V \cdot dt \end{aligned}$$

En suivant cette méthode le terme $D_m \cdot a(t) \cdot dt \cdot dt$ s'annule bien, on ne le néglige pas et les deux termes $D_m \cdot v(t) \cdot dt$ se compensent bien, il n'y a pas d'approximation.

Énergie cinétique

$$\begin{aligned} 2 \times (E_c(t + dt) - E_c(t)) &= M(t + dt) v(t + dt)^2 + dM (v(t + dt) + V)^2 - M(t) v(t)^2 \\ &= (M(t) - D_m dt) (v(t) + a dt)^2 + D_m dt (v(t) + a dt + V)^2 - M(t) v(t)^2 \\ &= M(t) v(t)^2 + 2M(t) v(t) a dt - D_m dt v(t)^2 \\ &\quad + D_m dt v(t)^2 + D_m dt V^2 + 2D_m dt v(t) V - M(t) v(t)^2 \\ &= 2M(t) v(t) a dt + D_m dt v(t)^2 + 2D_m dt v(t) V \\ &= D_m dt v(t)^2 \end{aligned}$$

On a éliminé d'office les termes d'ordre deux et trois.

$$\text{Soit } \frac{dE_c}{dt} = 2D_m v(t)^2$$

1. une valeur moyenne entre deux instants est une somme

III.1 Calcul avec deux variables : diffusion thermique

On prend comme exemple l'établissement de l'équation de diffusion thermique à une dimension : on a donc $T = T(x, t)$. On prend une tranche cylindrique de section droite S placée entre x et $x + \Delta x$ que l'on observe entre t et $t + \Delta t$, on suppose qu'il n'y a pas de dilatation i.e. volume invariable donc pas de travail ($\delta W = 0$) et ρ , masse volumique, constante; on suppose de même que c , la capacité thermique massique, est constante. Entre t et $t + \Delta t$, la température passe de $T(x, t)$ à $T(x, t + \Delta t)$ et donc, la capacité thermique étant $dC = c\rho S dx$,

$$\begin{aligned} U(t + \Delta t) - U(t) &= \int_x^{x+\Delta x} c\rho S (T(x', t + \Delta t) - T(x', t)) dx' \\ &= c\rho S \Delta x \langle T(x, t + \Delta t) - T(x, t) \rangle_x \end{aligned}$$

On écrit le premier principe $dU = \delta Q + \delta W = \delta Q$. Par définition de la densité de flux thermique, $\delta Q = \oint \Delta t \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \Delta t \cdot S (j_Q(x) - j_Q(x + \Delta x))$, le signe moins venant de la définition du vecteur surface comme vecteur entrant. Plus précisément, le flux a lieu entre t et $t + \Delta t$, soit pour le côté x :

$$Q(x) = \Delta t \cdot j_Q \cdot S(x) = \int_t^{t+\Delta t} j_Q(x, t') S dt' = \Delta t S \langle j_Q(x, t') \rangle$$

On égale les deux expressions, on divise par Δt et Δx , on simplifie par S et on utilise les propriétés des valeurs moyennes $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ et $\langle ka \rangle = k \langle a \rangle$:

$$c\rho \left\langle \frac{T(x', t + \Delta t) - T(x', t)}{\Delta t} \right\rangle_x^{x+\Delta x} = \left\langle \frac{j_Q(x, t') - j_Q(x, t')}{\Delta x} \right\rangle_t^{t+\Delta t}$$

On effectue enfin le passage $\Delta t \rightarrow 0$ puis $\Delta x \rightarrow 0$. La première valeur moyenne tend bien vers la valeur en x de la dérivée partielle de T par rapport à t . On ferait de même avec le côté droit. On obtient $c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}$.

Conclusion 1 si T désigne la température, à l'instant t , d'une tranche entre x et $x + dx$, par définition de dx qui condense le calcul ci-dessus (passage à la limite sous entendu), ce T est bien $T(x, t)$. De même si j_Q désigne la densité de flux entrant, en x , entre t et $t + dt$, ce j_Q est bien $j_Q(x, t)$.

Conclusion 2 si T désigne la température de la face en x et T' la température de la face en $x + dx$, $T' - T = \frac{\partial T}{\partial x} dx$ et ceci de manière exacte (différentielle) et non approchée.