

IX Chocs et percussions

La théorie des chocs dans le cadre de la mécanique des solides indéformables ne s'intéresse qu'aux états initiaux et finaux. En effet l'évolution du système pendant le choc est très complexe et fait appel entre autre à des vitesses de déformation très grandes, il faudrait être capable de modéliser des ondes de contraintes élastiques et plastiques se propageant dans le milieu (et à l'extérieur : bruit) pendant un intervalle de temps très court.

Nous sommes donc amenés à établir une schématisation du choc basée sur des hypothèses simplificatrices fortes. Il sera, comme pour le frottement, nécessaire de demander à l'expérience de fournir les coefficients entrant dans ces lois et précisant les propriétés globales des phénomènes mis en jeu pendant la durée du choc.

Définitions et modélisation

Définition d'un choc

Toute introduction d'une nouvelle liaison dans un système matériel qui s'effectue sur un intervalle de temps suffisamment court avec transfert de l'énergie cinétique en énergie de déformation sera caractérisée par un choc.

L'état avant le choc est appelé état initial noté $[\]^-$

L'état après le choc est appelé état final noté $[\]^+$

$$\Delta t = t^+ - t^- \text{ tends vers zéro}$$

Remarques :

L'état des vitesses avant le choc n'ayant aucune raison d'être compatible avec la nouvelle liaison, il y aura discontinuité du champ des vitesses lors du choc.

La suppression même brusque d'une liaison mécanique ne conduit pas à la notion de choc, en effet le champ des vitesses reste continu, et il n'y a pas de transfert d'énergie cinétique en énergie de déformation.

Définition d'une percussion

A toute force \vec{F} agissant sur le système on associe sa percussion définie par

$$\vec{P}_F = \lim_{t^+ \rightarrow t^-} \int_{t^-}^{t^+} \vec{F} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \vec{F} dt$$

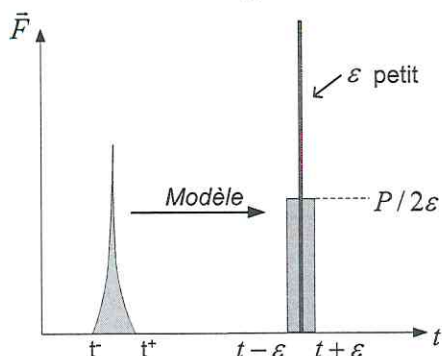
Remarques :

La percussion n'est pas un effort, cette grandeur a la dimension d'une quantité de mouvement $[M L T^{-1}]$.

Dans le sens commun une percussion est associée à un effort extrêmement important agissant sur une durée extrêmement courte. Notre définition est cohérente avec le sens commun, en effet **pour un effort donné fini (pesanteur, ressorts, chargement) la percussion associée est nulle.**

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} F_d dt = 0 \quad \text{en effet } F \text{ est une grandeur finie}$$

Pour une percussion donnée plus la durée du choc sera supposée courte plus la valeur maximale de l'effort modélisant le choc sera grande.



Les solides étant supposés infiniment rigides, les ondes ont une vitesse de propagation infinie, ce qui revient à admettre que tous les points du système sont sollicités au même instant. Ce qui entraîne que **dans toutes les liaisons du système mécanique apparaissent simultanément à un choc des percussions non nulles qui sont des inconnues du problème.**

L'étude du système pendant cet intervalle de temps très court étant impossible dans le cadre de la mécanique des solides indéformable. Nous sommes amenés à établir une schématisation du choc basée sur des hypothèses simplificatrices fortes. Passons maintenant en revue ces hypothèses de modélisation.

Hypothèse 1 (hypothèse sur les déplacements)

L'intervalle de temps est supposé suffisamment court pour que les déplacements du système soient négligeables pendant le choc.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{P} = \vec{0}$$

Remarque :

Cette hypothèse assure la continuité du champ des déplacements elle ne tient pas compte des déformations du système pendant le choc.

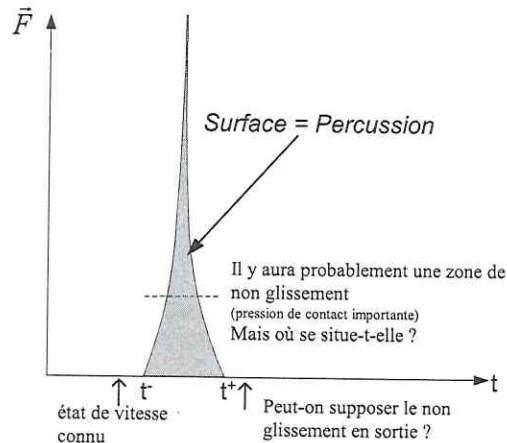
Hypothèse 2 (hypothèse sur les percussions)

On admet que les propriétés relatives au torseur des efforts s'appliquent de façon identique au torseur des Percussions

Remarques :

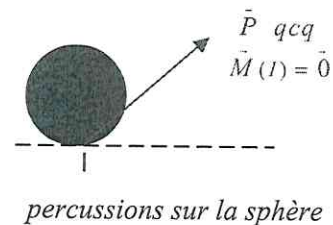
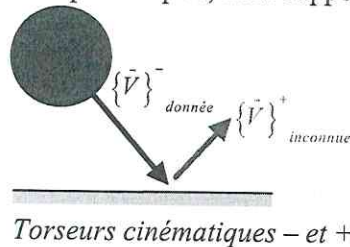
Cette hypothèse entraîne que la percussion dans une liaison parfaite possèdera les mêmes propriétés que le torseur des efforts de liaison. Or physiquement rien n'assure que pour des efforts extrêmement important l'hypothèse de liaison parfaite reste valable sur la durée du choc.

Suivant cette hypothèse il est possible d'appliquer les lois de frottement sur les percussions. Or il est impossible de connaître les conditions de contact durant le choc alors comment supposer qu'il y a glissement ou non glissement ?



En écrivant les lois de frottement sur les percussions nous formulerons une hypothèse de glissement ou de non glissement sur l'état des vitesses en sortie de choc, c'est à dire après le choc. Alors que la percussion représente une valeur globale de l'effort sur la durée du choc. Cette contradiction fait que ce modèle simple ne peut donner que des résultats approchés pour des problèmes complexes.

Moyennant ces deux premières hypothèses peut-on résoudre le simple problème du rebond. Prenons le cas d'une sphère venant en contact avec le sol à un instant t . Les conditions de contact sont quelconques, nous supposons simplement qu'il reste ponctuel.



Bilan :

$$9 \text{ inconnues : } \begin{cases} 6 \text{ paramètres} \\ 3 \text{ efforts } \bar{P} \text{ percussion} \end{cases} \begin{cases} 3 \text{ vitesses : } u^+, v^+, w^+ \\ 3 \text{ rotations : } p^+, q^+, r^+ \end{cases} \text{ pour } 8 \text{ équations : } \begin{cases} 6 \text{ PFD} \\ 2 \text{ Lois de frottement} \end{cases}$$

Il nous manque une information, pour pouvoir résoudre ce problème. Cette équation supplémentaire correspond à la troisième hypothèse ou loi de restitution de Newton.

Hypothèse 3 (hypothèse sur les vitesses)

Après le choc la vitesse relative des deux points P_1 et P_2 des solides S_1 et S_2 venant en contact en un point géométrique P (lieu du choc) est inversement proportionnelle à celle d'avant le choc

$$[\vec{V}_{12}(P) \cdot \vec{n}]^+ = -r [\vec{V}_{12}(P) \cdot \vec{n}]^-$$

r est le coefficient de restitution

Remarques :

Cette hypothèse nous donne une équation qui introduit une discontinuité de l'état des vitesses entre les instants t^- et t^+ . Elle permet de traduire la restitution de

l'énergie cinétique emmagasinée en partie sous forme d'énergie de déformation pendant la durée du choc. En fait pendant le choc il faudrait considérer deux phases :

Phase de déformation : durant laquelle l'énergie cinétique se transforme en énergie de déformation,

Phase de restitution : qui restitue partiellement ou intégralement l'énergie de déformation sous forme d'énergie cinétique.

Le Coefficient de restitution r dépend du comportement des matériaux venant en contact. Il est déterminé expérimentalement en laissant tomber d'une hauteur « h » une bille constituée d'un des matériaux sur un bloc massif constitué de l'autre matériau. La masse du bloc étant très grande devant celle de la bille, nous pouvons considérer qu'il reste immobile. On mesure la hauteur « h' » à laquelle remonte la bille après le choc.

$$\begin{aligned} [\vec{V}_{12}(P), \vec{n}]^- &= \sqrt{2gh} \\ [\vec{V}_{12}(P), \vec{n}]^+ &= \sqrt{2gh'} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{h'}{h}} \quad \text{en pratique } 0 \leq r < 1$$

Le cas $r = 1$ est un cas limite idéal : choc parfaitement élastique

Le cas $r = 0$ est un cas particulier dit du choc mou. Dans ce cas particulier la liaison entre deux éléments du système subsiste après le choc pour donner naissance à un élément unique. On conservera cependant la notion d'intervalle de temps du choc pour caractériser les vitesses avant et après le choc.

Citons quelques ordres de grandeur de r :	Bois-bois	0,5
	Acier-acier	0,6
	Verre-verre	0,9

Équations des chocs

La mise en équations relative à l'étude des chocs en mécanique des solides indéformables a pour unique objectif l'étude des mouvements du système matériel après le choc, connaissant la cinématique du système avant. En effet comme nous venons de le préciser, la durée du choc et ce qui se passe pendant cet intervalle de temps ne peut pas être modélisé dans le cadre de ce cours.

Nous devons donc écrire le principe fondamental sous forme impulsionnelle, c'est à dire pouvoir intégrer le torseur des quantités d'accélération pour se ramener à la variation du torseur cinétique entre les instants « t^- » et « t^+ ».

Les moments seront donc toujours calculés soit en G centre de masse du système matériel, soit par rapport à un point O fixe dans le repère galiléen considéré.

$$\text{Ainsi nous avons : } \begin{cases} \int_{t^-}^{t^+} m \vec{\gamma}_o(G) dt = [m \vec{V}_o(G)]_+^- \\ \int_{t^-}^{t^+} \vec{\delta}_o(G \text{ ou } O, S) dt = [\vec{\sigma}_o(G \text{ ou } O, S)]_+^- \end{cases}$$

En considérant la percussion de tous les efforts extérieurs appliqués au système, nous obtenons les 6 équations correspondant à la forme impulsionnelle du PFD :

Équations : en un point fixe ou au centre de masse du système.

$$\text{La forme impulsionnelle du PFD : } \begin{cases} \bar{P}_{\text{Ext}/\Sigma} = [m\bar{V}(G)]_{-}^{+} \\ \bar{M}(O, \bar{P}_{\text{Ext}/\Sigma}) = [\bar{\sigma}_g(O, \Sigma)]_{-}^{+} \end{cases}$$

Applications

Centre de percussion

Par définition le centre de percussion est le point où il faut appliquer une percussion pour que les répercussions soient nulles.

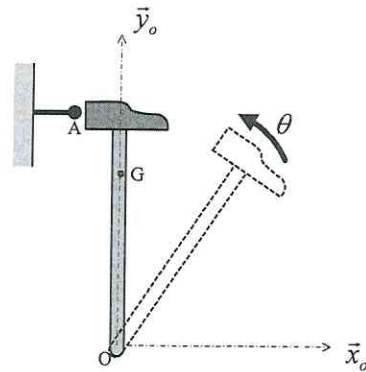
Pour illustrer cette notion prenons l'exemple d'un coup de marteau sur un clou. La question est de déterminer la distance à laquelle il faut tenir le marteau pour qu'il n'y ait pas de répercussion dans le poignet.

Il faut que le point d'impact sur le clou soit le centre de percussion du marteau.

Ce problème est schématisé sur la figure ci-contre. Le contact est supposé ponctuel et le choc est sans rebond.

$$\text{L'état de vitesse avant est connu : } \begin{cases} \bar{V}_o^-(O) = \vec{0} \\ \bar{\Omega}^- = \omega \bar{z}_o \end{cases}$$

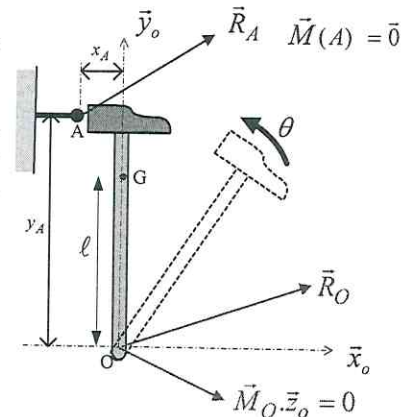
$$\text{L'état de vitesse après est nul : } \begin{cases} \bar{V}_o^+(O) = \vec{0} \\ \bar{\Omega}^+ = \vec{0}_o \end{cases}$$



La figure ci-contre précise les dimensions du marteau et le torseur des efforts de percussion en A et O.

La percussion en A est considérée comme une donnée du problème. Nous chercherons les conditions à vérifier pour annuler toutes les composantes du torseur de la percussion en O, c'est à dire dans le poignet (celui-ci est modélisé par un pivot parfait).

Les efforts extérieurs donnés sont le champ de pesanteur et le couple appliqué par le poignet sur le marteau pour imposer la vitesse de rotation ω avant le choc. La percussion associée aux efforts donnés est nulle.



Calculons le torseur cinétique en O avant le choc (après il est nul)

$$\begin{cases} \bar{V}_o^-(G) = -\ell \omega \bar{x}_o \\ J(O, S) \bar{\Omega}^- = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\omega \\ -D\omega \\ C\omega \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\bar{V}_o^-(G)]_{-}^{+} = \ell \omega \bar{x}_o \\ [\bar{\sigma}_o(O, S)]_{-}^{+} = \begin{bmatrix} E\omega \\ D\omega \\ -C\omega \end{bmatrix} \end{cases}$$

Calculons le moment en O des Percussions

$$\vec{M}(O, \vec{P}_{ext/\Sigma}) = \begin{Bmatrix} L_o \\ M_o \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -x_A \\ y_A \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_o + y_A Z_A \\ M_o + x_A Z_A \\ -x_A Y_A - y_A X_A \end{Bmatrix}$$

D'où les 6 équations déduites du PFD :

$$\begin{cases} \text{résultantes :} \\ \text{moments :} \end{cases} \begin{cases} X_o + X_A = M\ell\omega \\ Y_o + Y_A = 0 \\ Z_o + Z_A = 0 \\ L_o + y_A Z_A = E\omega \\ M_o + x_A Z_A = D\omega \\ -x_A Y_A - y_A X_A = -C\omega \end{cases}$$

Pour avoir $(Y_o, Z_o) = (0, 0)$ les équations 2 et 3 $\Rightarrow (Y_A, Z_A) = (0, 0)$

La percussion doit être horizontale (// à la vitesse du centre de masse à l'impact)

$$X_o = 0 \Rightarrow \boxed{X_A = M\ell\omega} \quad \text{relation (1)}$$

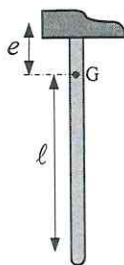
La percussion $\vec{R}_o = \vec{0}$, utilisons maintenant les équations de moments :

$$\begin{cases} L_o = E\omega \\ M_o = D\omega \\ -y_A X_A = -C\omega \end{cases}$$

Pour avoir $(L_o, M_o) = (0, 0)$ les équations 4 et 5 $\Rightarrow (D, E) = (0, 0)$

L'axe de rotation du marteau doit être principal d'inertie, ce sera le cas si le point d'impact appartient au plan de symétrie du marteau.

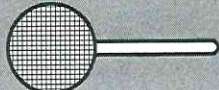
La dernière équation compte tenu de la relation (1) nous donne $\Rightarrow \boxed{y_A = \frac{C}{M\ell}}$



Nous pouvons donc calculer la distance entre le point d'impact et le poignet pour que la répercussion dans le poignet soit nulle. Le moment d'inertie en G du marteau est de la forme :

$$C_G = Mk^2 \quad \text{avec } k \text{ rayon de giration.}$$

$$\text{D'où } C = Mk^2 + M\ell^2 \Rightarrow y_A = \ell + \frac{k^2}{\ell} = \ell + e$$

 <p>Exercice 9-1</p>	<p>Déterminer le centre de percussion d'une raquette de tennis schématisée par une tige de masse m de longueur ℓ, et un anneau de masse M de rayon R. Application $m=M$ et $\ell = 2R$.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tension dans une corde d'alpinisme lors d'une chute

Examinons le cas où un grimpeur situé en haut d'une cordée dévisse. Il chute d'une hauteur h , avant que la corde ne se tende formant un angle α avec la verticale. Nous noterons ℓ la longueur de la corde entre le dernier mousqueton et le grimpeur ayant chuté, et β l'angle que fait la corde entre les mousquetons.