objets. La première mesure de la constante G fut faite par Cavendish en 1798. Il utilisa la balance de torsion([6]) inventée par Coulomb. La valeur actuelle de G est:

$$\textbf{Constante de gravitation universelle } G = 6{,}6742 \pm 0{,}0010\, 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

11.2.1 Force gravitationnelle d'une distribution sphérique de masses.

Nous allons calculer la force gravitationnelle exercée par une distribution sphérique uniforme de masses. Avant nous calculerons la force exercée par une mince coquille sphérique d'épaisseur ε. Et encore avant cela, nous calculerons la force exercée par un anneau étroit de la coquille. L'anneau sera symétrique par rapport à l'axe qui relie la masse M_1 au centre de la sphère. Ceci fait que toutes les particules de l'anneau se trouvent à la même distance de la masse M_1.

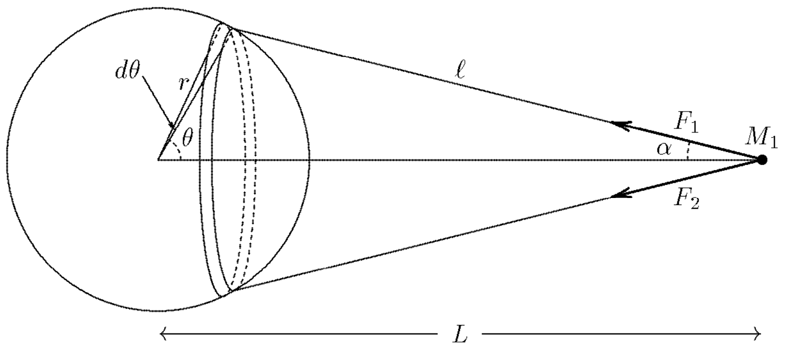

Figure 11.2 L'attraction de chaque particule de l'anneau, additionnée avec celle de la particule opposée donnent une résultante dirigée vers le centre de la sphère.

Chaque particule exerce une force sur M_1 qui peut être décomposée en une composante parallèle à la droite qui relie M_1 au centre de la sphère et une autre perpendiculaire à cette droite. La composante perpendiculaire due à chaque particule s'annule avec celle de la particule de l'anneau diamétralement opposée. De sorte que les seules composantes qui restent sont les composantes longitudinales. Celles-ci étant parallèles, on peut les additionner directement. De plus, on obtient la composante longitudinale en multipliant la force exercée par la particule par $\cos\alpha$. La force totale exercée par l'anneau sera donc la même que si toute la masse de l'anneau se trouvait à distance ℓ de M_1 mais sans oublier de multiplier par $\cos\alpha$.

$$F_{anneau} = G\frac{M_1 M_{anneau}}{\ell^2}\cos\alpha$$

Le volume de l'anneau est égal à sa longueur par sa largeur par son épaisseur (n'oubliez pas qu'il est très mince et très étroit). Si la densité du matériau de l'anneau est ρ, la longueur de l'anneau est $2\pi r\sin\theta$. Sa largeur est $r\,d\theta$ et son épaisseur est ε.

La masse de l'anneau sera:

$$M_{anneau} = \rho V = \rho 2\pi r \sin\theta\, r\, d\theta\, \varepsilon$$

Cette masse est évidemment différentielle, puisque la largeur est différentielle. On corrige:

$$dM = \rho\varepsilon 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$$

La force exercée sur la masse M_1 sera aussi différentielle:

$$dF = G\frac{M_1 dM}{\ell^2} = G\frac{M_1 \rho\varepsilon 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta}{\ell^2}\cos\alpha \tag{11.2}$$

([6]) Les anglo-saxons appellent, à tort, cette balance, "balance de Cavendish".

Pour calculer la force totale il faut faire la somme de tous les anneaux sur la coquille. Dans l'expression précédente les variables α, θ et ℓ sont dépendantes. Pour pouvoir intégrer, il faut transformer l'expression pour la mettre en fonction d'une seule variable. La plus commode est ℓ. Dans la figure on voit que:

$$\cos\alpha = \frac{L - r\cos\theta}{\ell} \tag{11.3}$$

Le théorème du cosinus (ou théorème de Pythagore généralisé) nous dit:

$$\ell^2 = r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta \tag{11.4}$$

$$r\cos\theta = \frac{r^2 + L^2 - \ell^2}{2L} \tag{11.5}$$

En différenciant l'équation 11.5 nous obtenons:

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{\ell}{rL} d\ell \tag{11.6}$$

En remplaçant l'équation 11.5 dans l'équation 11.3:

$$\cos\alpha = \frac{L - \frac{r^2+L^2-\ell^2}{2L}}{\ell} = \frac{L^2 - r^2 + \ell^2}{2L\ell}$$

puis on remplace cette valeur ainsi que l'équation 11.6 dans l'équation 11.2:

$$dF = G\frac{M_1 dM}{\ell^2} = G\frac{M_1\rho\varepsilon 2\pi r^2 \frac{\ell}{rL} d\ell}{\ell^2}\frac{L^2 - r^2 + \ell^2}{2L\ell} = \frac{GM_1\rho\varepsilon\pi r}{L^2}\left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1\right) d\ell$$

Pour faire la somme sur tous les anneaux il faut que ℓ varie entre $L - r$ et $L + r$. Intégrons la partie variable:

$$\int_{L-r}^{L+r}\left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1\right) d\ell = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{1}{L-r} - \frac{1}{L+r}\right) + 2r = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{L + r - L + r}{L^2 - r^2}\right) + 2r = 4r$$

Le force totale sera:

$$F = \frac{GM_1\rho\varepsilon 4\pi r^2}{L^2}$$

Mais $4\pi r^2$ est la surface de la coquille, ε est son épaisseur et ρ sa densité. Le produit des trois est la masse m de la coquille:

$$F = \frac{GM_1 m}{L^2}$$

La force d'attraction entre la masse M_1 et la coquille est la même que si toute la masse de la coquille se trouvait concentrée au centre de la coquille.

On peut considérer une sphère comme formée par des coquilles concentriques. La force d'attraction entre la sphère et une masse ponctuelle est la somme des forces d'attraction de chaque coquille. Elle est donc la même que si toute la masse de la sphère se trouvait concentrée au centre de la sphère. On peut remarquer que ce résultat est valable même si les coquilles ont des densités différentes. Par exemple, les coquilles plus internes peuvent être plus denses que les externes (comme c'est le cas pour la terre). La seule condition à respecter est que chaque coquille sphérique ait une densité uniforme.

On obtient un résultat amusant quand on fait le même calcul quand la masse M_1 est située à l'intérieur de la coquille. Le calcul est le même sauf que les limites de l'intégrale changent: cette fois ℓ doit varier entre $r - L$ et $L + r$:

$$\int_{r-L}^{L+r}\left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1\right) d\ell = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{1}{r-L} - \frac{1}{L+r}\right) + 2L = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{L + r - r + L}{r^2 - L^2}\right) + 2L = 0$$

Donc, les forces sur une masse à l'intérieur de la coquille s'annulent. Le résultat est valable aussi si la coquille est épaisse car on peut l'imaginer comme formée par une infinitude de coquilles minces.

La raison de ce résultat n'est pas une raison mathématique mais une raison physique. Les masses de la coquille qui se trouvent alignées avec la masse M_1 à l'intérieur exercent des forces inversement proportionnelles à leur distance à la masse M_1. Mais pour un même *angle solide* la quantité de masse de la coquille augmente avec le carré de la distance. En conséquence l'augmentation de la distance est compensée par l'augmentation de masses et les forces de masses en opposition se compensent exactement. Ce résultat est valable pour toutes les forces qui diminuent avec le carré de la distance et, notamment, pour l'attraction électrostatique.

La force d'attraction qu'une masse sphérique de rayon R exerce sur une particule de masse située à une distance $r < R$ *(à l'intérieur)* de la sphère, est égale à celle qu'exerce la sphère de rayon r. Tout le reste de la sphère, la partie située entre r et R est une coquille épaisse dont les forces sur la particule à son intérieur s'annulent.

11.2.2 Masse de la terre et variations de g.

Après la mesure de la constante de gravitation universelle, les gens dirent que Cavendish était la première personne à avoir "pesé la terre". La raison est qu'une fois G connue on peut déduire immédiatement la masse de la terre. En effet, un objet de masse M placé sur la surface de la terre est attiré par la terre avec une force $F = Mg$. Mais cette force est égale à celle donnée par la loi de Newton:

$$Mg = G\frac{M_t M}{r^2}$$

où M_t est la masse de la terre et $r = 40\,000\,km/2\pi$ est son rayon.

$$M_t = \frac{gr^2}{G} = \frac{9{,}81\ \left(6{,}366\,10^6\right)^2}{6{,}67\,10^{-11}} = 5{,}96\,10^{24}kg$$

La valeur de l'accélération de gravité **g** n'est autre chose que:

$$g = \frac{GM_t}{r^2}$$

g varie avec la hauteur. Il diminue quand la hauteur augmente car r augmente. Il diminue aussi quand on est à l'intérieur de la terre (dans une galerie de mine, par exemple) car bien que r diminue, la masse de la sphère située à l'intérieur de r diminue encore plus vite.

g varie aussi avec la latitude, et ceci pour deux raisons. La première est que comme la terre est aplatie aux pôles, le rayon est plus grand à l'équateur qu'aux pôles([7]). Donc **g** est plus petite à l'équateur qu'aux pôles. La deuxième raison est que, comme la terre tourne, la force centrifuge est plus grande à l'équateur (rayon de rotation plus grand) qu'aux pôles, où elle est nulle. La valeur de **g** au niveau de la mer passe de 9,7803 à l'équateur, à 9,8322 aux pôles.

ATTENTION.

Il ne faut pas confondre l'accélération de gravité réelle qui dépend de l'endroit où on se trouve, avec l'accélération de gravité standard $9{,}80665\,m/s^2$ utilisée dans la définition de la force en Newtons. Un Newton vaut toujours $1\,kg \cdot 9{,}80665\,m/s^2$ mais le nombre de Newtons nécessaires pour soulever une masse d'un kilogramme dépend de l'endroit où l'on se trouve.

([7]) La différence entre le rayon à l'équateur et le rayon aux pôles est de 22 km.